UNIVERZITET U BANJOJ LUCI

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

# KARAKTERI KONAČNIH GRUPA

MASTER RAD

**Mentor:**

**dr Duško Bogdanić**

**Kandidat:**

**Jovanka Đukanović**

Banja Luka, 2018.

UNIVERSITY OF BANJA LUKA

FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

# CHARACTERS OF FINITE GROUPS

MASTER'S THESIS

**Supervisor:**

**Dr Duško Bogdanić**

**Candidate:**

**Jovanka Đukanović**

Banja Luka, 2018.

**Mentor:** dr Duško Bogdanić, Univerzitet u Banjoj Luci, Prirodno-matematički fakultet

**Naslov master rada:** Karakteri konačnih grupa

**Rezime:** U ovom radu uvedeni su pojmovi reprezentacija grupa i $FG$-modula u cilju uvođenja pojma karaktera. Cilj ovog rada je izračunavanje kompletne tabele karaktera simetrične grupe permutacija. Konkretno, u ovom radu je u pitanju simetrična grupa permutacija reda 7, a ono što je o karakterima navedeno može se koristiti i za izračunavanje kompletne tabele karaktera simetrične grupe permutacija višeg reda. Teorija karaktera sadrži i druge tvrdnje koje mogu pomoći u izračunavanju tabela karaktera kako ovih, tako i nekih drugi konačnih grupa, ali su ovdje navedene samo one koje se koriste za rješavanje ciljanog problema. Sadržaj ovog rada može se koristiti kao baza za izvođenje dokaza Bernsajdove teoreme o prostim grupama.

Karakteri su značajni po tome što daju veliki broj informacija o grupama čiji su oni karakteri, a mnogo su jednostavnijeg zapisa od npr. reprezentacija. Time oni omogućavaju jednostavniji pristup rješavanju određenih problema, a za razliku od reprezentacija gdje čuvamo cijele matrice, dovoljno je da čuvamo samo njihov trag, što i predstavlja karakter.

**Ključne riječi:** karakteri konačnih grupa, tabela karaktera, reprezentacije grupa, $FG$-moduli, simetrična grupa permutacija reda $n$, centralizator

**Naučna oblast:** Prirodne nauke

**Naučno polje:** Teorija brojeva, teorija polja, algebarska geometrija, algebra, teorija grupa

**Klasifikaciona oznaka za naučnu oblast:** P 000

**Klasifikaciona oznaka za naučno polje:** P 120

**Supervisor:** Dr Duško Bogdanić, University of Banja Luka, Faculty of Natural Sciences and Mathematics

**Title of master's thesis:** Characters of finite Groups

**Abstract:** In this thesis, we introduce the notion of respresentations of groups and $FG$-modules, with the goal of introducing the notion of a character. Our main objective is to compute the complete table of characters of a symmetric permutation group. More precisely, we consider the symmetric group of order 7, but the results about characters can also be applied to the symmetric groups of higher order. The character theory also contains additional theorems that can be used to compute the character tables of a symmetric group, as well as some other finite groups. However, here we focus only on those that are relevant to the problem at hand. The results from this thesis can be used as a basis for proving the Burnside's theorem about simple groups.

Characters are important because they give us plenty of information about their groups and their notation is much simpler than that of e.g. representations. Hence, they allow simpler approach to solving certain problems, because, compared to representations where we need to keep the track of the whole matrices, for characters we need to keep track only of their trace.

**Keywords:** characters of finite groups, character tables, group representations, $FG$-modules, symmetric group of permutations of degree $n$, centralizer

**Scientific area:** Natural sciences

**Scientific field:** Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory

**Classification code of scientific area:** P 000

**Classification code of scientific field:** P 120

# Sadržaj


**1 Uvod** **1**

**2 Reprezentacije** **3**

**3 $FG$-moduli** **5**

**4 Pomoćna tvrđenja i definicije** **8**

**5 Karakteri** **10**

5.1 Permutacioni karakter . . . . . 11

5.2 Skalarni proizvod karaktera . . . . . 12

5.3 Relacije ortogonalnosti . . . . . 14

5.4 Linearni karakteri simetrične grupe $S_n$ . . . . . 15

5.5 Tenzorski proizvod i njegove primjene . . . . . 17

5.6 Neki ireducibilni karakteri simetrične grupe $S_n$ . . . . . 24

**6 Tabela karaktera simetrične grupe $S_7$** **28**

**7 Zaključak** **39**

# 1 Uvod

Na samom početku ovog rada, biće govora o reprezentacijama i $FG$-modulima. Prethodno će biti primjenjeno da uvedemo karaktere, na koje je usmjereno težište ovog rada.

U dijelu o karakterima, sem uvođenja novih pojmova i opisivanja svojstava koje karakteri imaju, biće navedeni neki od načina za nalaženje ireducibilnih karaktera. Nakon toga, navedeno će biti primjenjeno za nalaženje tabele karaktera simetrične grupe $S_7$. Tabela karaktera je matrica u koju su unijete vrijednosti ireducibilnih karaktera određene grupe. Naravno, govorićemo o karakterima konačne grupe. Karakteri su konstantni na klasama konjugacije grupe, što nam dodatno olakšava njihov zapis i čini ga preglednijim. Samim tim, dosta je jednostavnije ponovo pronaći neku vrijednost koja nam je potrebna za neka dalja računanja.

U karakterima se kriju razne osobine $FG$-modula, reprezentacija i grupa, pa se mnogi problemi iz teorije reprezentacija mogu riješiti koristeći ono što je poznato za karaktere. Zbog jednostavnijeg zapisa u odnosu na reprezentacije i zbog toga što je umjesto čuvanja cijelih matrica, dovoljno čuvati njihov trag, što i predstavlja karakter, utoliko su oni bolji i jednostavniji pristup rješavanju nekih problema.

Kompletan rad usmjeren je ka pronalaženju kompletne tabele karaktera grupe $S_7$, pa su i definicije i tvrdnje koje se nalaze u radu, birane tako da se ta ideja može realizovati. Samo neke od tvrdnji biće dokazane, a za dokaze teorema koje nisu dokazane u radu mogu se koristiti knjige navedene u literaturi.

Ovo je vrlo zanimljiva oblast, čija primjena može da se nađe ne samo u rješavanju nekih problema u oblasti matematike, nego i u fizici, hemiji i dr.

Jedna od najpoznatijih primjena teorije reprezentacija je za dokazivanje Bernsajdove teoreme koja tvrdi da, ako su $p$ i $q$ prosti brojevi, $a$ i $b$ pozitivni cijeli brojevi takvi da je $a+b \geq 2$, nijedna grupa reda $p^a q^b$ nije prosta.

Vršeći proračune sa vrijednostima karaktera dobijaju se određene konstante koje sadrže informacije o množenju u grupi, a koje se mogu koristiti za dobijanje informacija o podgrupama grupe G.

Teorija reprezentacija se intenzivno koristi u fizici. Svaki fizički sistem sadrži grupu simetrija $G$, a za izvjesne vektorske prostore povezane sa sistemom često se ispostavi da su $\mathbb{R}G$-moduli. Na primjer, vibracija molekula je opisana različitim diferencijalnim jednačinama, a grupa simetrija molekula djeluje na prostoru rješenja ovih diferencijalnih jednačina.

Teorija reprezentacija se primjenjuje i pri izučavanju kvarkova, elementarnih čestica koje sačinjavaju protone, neutrone i sve ostale složene čestice tj. hadrone, nukleone, mezone itd.

# 2 Reprezentacije

Kako linearna algebra radi sa konkretnijim strukturama od apstraktne teorije grupa, cilj teorije reprezentacija je povezati elemente grupe sa matricama. Neformalno, reprezentacije su način da se zapišu elementi grupe kao matrice.
Neka je $G$ grupa, a $F$ polje realnih ili kompleksnih brojeva. Sa $GL(n,F)$ označimo grupu invertibilnih $n \times n$ matrica sa elementima iz $F$.

**Definicija 2.1** *Reprezentacija grupe $G$ nad poljem $F$ je homomorfizam $\rho$ iz $G$ u $GL(n,F)$, za neko $n$. Stepen reprezentacije $\rho$ je prirodan broj $n$.*

Funkcija će uglavnom biti primjenjivana s desne strane, odnosno za sliku od $g$ u odnosu na $\rho$ pisaćemo $g\rho$ umjesto $\rho g$. Takođe, zapis je skraćen izostavljanjem zagrada koje se obično pišu oko elementa $g$. Zagrade su korištene kod složenijih izraza da bi bilo jasno na koji izraz se funkcija primjenjuje.

**Primjer 1** *Neka je $G = C_4 = \{1, g, g^2, g^3\}$, gdje je $g^4 = 1$. Posmatrajmo matrice*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $M^4 = I$, to ove matrice formiraju cikličku grupu reda 4. Funkcija $\rho : G \longrightarrow GL(2,F)$ koja je definisana sa

$$\rho : g^i \longrightarrow M^i \quad (0 \leq i \leq 3),$$

je reprezentacija grupe $G$ nad $F$. Stepen ove reprezentacije je 2.

■

Neka je $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ reprezentacija i $T$ invertibilna $n \times n$ matrica nad poljem $F$. Za sve $n \times n$ matrice $A$ i $B$ je

$$(T^{-1}AT)(T^{-1}BT) = T^{-1}(AB)T.$$

Koristeći ovu činjenicu možemo dobiti novu reprezentaciju $\sigma$ iz $\rho$ definišući je na sljedeći način:

$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$ za sve $g \in G$. Kako za sve $g,h \in G$, iz

$$\begin{aligned}(gh)\sigma &= T^{-1}((gh)\rho)T \\ &= T^{-1}((g\rho)(h\rho))T \\ &= T^{-1}(g\rho)T \cdot T^{-1}(h\rho)T \\ &= (g\sigma)(h\sigma),\end{aligned}$$

slijedi da je $\sigma$ reprezentacija.

**Definicija 2.2** *Neka su $\rho : G \longrightarrow GL(m,F)$ i $\sigma : G \longrightarrow GL(n,F)$ reprezentacije grupe G nad poljem $F$. Kažemo da je $\rho$ ekvivalentna sa $\sigma$, ako je $n = m$ i ako postoji invertibilna $n \times n$ matrica $T$, takva da je za svako $g \in G$, $g\sigma = T^{-1}(g\rho)T$.*

Jezgro reprezentacije sadrži elemente grupe $G$ za koje je $g\rho$ jedinična matrica, odnosno $Ker\ \rho = \{g \in G : g\rho = I_n\}$ i ono je normalna podgrupa grupe $G$.

**Definicija 2.3** *Reprezentacija $\rho : G \longrightarrow GL(1,F)$ koja je definisana sa $g\rho = (1)$ za sve $g \in G$, naziva se trivijalna reprezentacija grupe G.*

Za nas su značajne vjerodostojne reprezentacije koje se definišu na sljedeći način.

**Definicija 2.4** *Reprezentacija $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ je vjerodostojna ako je $Ker\ \rho = \{1\}$, tj. ako je jedinični element grupe G jedini element za koji je $g\rho = I_n$.*

# 3 $FG$-moduli

Postoji bliska veza između reprezentacija i $FG$-modula, pa ćemo se upoznati sa njima i nekim njihovim bitnim svojstvima.

**Definicija 3.1** *Neka je $V$ vektorski prostor nad $F$ i neka je $G$ grupa. Tada je $V$ $FG$-modul ako je množenje $vg, (v \in V, g \in G)$ definisano i zadovoljava sljedeće uslove, za sve $u, v \in V$, $\lambda \in F$ i $g, h \in G$:*

1. $vg \in V$,
2. $v(gh) = (vg)h$,
3. $v1 = v$,
4. $(\lambda v)g = \lambda(vg)$,
5. $(u+v)g = ug + vg$.

U nazivu $FG$-modul koristimo slovo $F$ da označimo da je $V$ vektorski prostor nad $F$, a $G$ je grupa iz koje uzimamo elemente $g$, da bi formirali proizvod $(vg, v \in V)$.

**Definicija 3.2** *Neka je $V$ $FG$-modul i $\mathcal{B}$ baza od $V$. Za svaki element $g \in G$, $[g]_{\mathcal{B}}$ označava matricu endomorfizma $v \longmapsto vg$ od $V$, u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.*

Sljedeća tvrdnja ukazuje na blisku vezu između $FG$-modula i reprezentacija, a biće navedena bez dokaza.

**Teorema 3.1**

1. *Ako je $\rho : G \longrightarrow GL(n,F)$ reprezentacija grupe $G$ nad poljem $F$ i $V = F^n$, tada $V$ postaje $FG$-modul, ako definišemo množenje $vg$ sa $vg = v(g\rho)$, $v \in V$, $g \in G$. Postoji baza $\mathcal{B}$ od $V$ takva da je $g\rho = [g]_{\mathcal{B}}$ za sve $g \in G$.*
2. *Pretpostavimo da je $V$ $FG$-modul i $\mathcal{B}$ baza od $V$. Tada je funkcija $g \longrightarrow [g]_{\mathcal{B}}$, $g \in G$, reprezentacija grupe $G$ nad $F$.*

U nastavku će biti definisane još neke značajne vrste $FG$-modula.

**Definicija 3.3**

1. *Trivijalan $FG$-modul je jednodimenzionalan vektorski prostor $V$ nad $F$ takav da je $vg = v$ za sve $v \in V,\ g \in G$.*

2. *$FG$-modul $V$ je vjerodostojan ako je jedinični element, jedini element $g$, za koji je $vg = v$ za sve $v \in V$.*

**Definicija 3.4** *Neka je $G$ podgrupa od $S_n$. $FG$-modul sa bazom $v_1, v_2, \ldots, v_n$, takvom da je $v_i g = v_{ig}$ za sve $g \in G$, naziva se permutacioni modul grupe $G$ nad $F$. Bazu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ zovemo prirodna baza od $V$.*

Kada je riječ o permutacionom modulu, specifično je da matrica $[g]_{\mathcal{B}}$, gdje je $\mathcal{B}$ neka baza tog permutacionog modula, ima po jednu jedinicu i sve ostale nule u svakoj svojoj vrsti i koloni. Ovakvu matricu nazivamo permutacionom matricom.
$FG$-modul daje veliki broj reprezentacija i sve su one predstavljene oblikom $g \longrightarrow [g]_{\mathcal{B}}$, $g \in G$ za neku bazu $\mathcal{B}$. Može se dokazati da su sve ove reprezentacije ekvivalentne jedna drugoj i da svake dvije ekvivalentne reprezentacije grupe $G$ proizilaze iz istog $FG$-modula.
Za nas su značajni ireducibilni $FG$-moduli, a da bi mogli govoriti o njima, potrebno je uvesti narednu definiciju.

**Definicija 3.5** *Neka je $V$ $FG$-modul. Podskup $W$ od $V$ je $FG$-podmodul od $V$, ako je $W$ potprostor i $wg \in W$ za svako $w \in W$ i sve $g \in G$.*

Možemo ovo shvatiti i drugačije. Ustvari, $FG$-podmodul od $V$ je vektorski potprostor koji je takođe i $FG$-modul.

**Definicija 3.6** *$FG$-modul $V$ je ireducibilan, ako nije nula i ako nema drugi $FG$-podmodul, osim samog sebe i nula modula $\{0\}$.*
*Ako $V$ ima $FG$-podmodul različit od $\{0\}$ i samog sebe, tada je $V$ reducibilan.*

Reprezentacija $\sigma : G \longrightarrow GL(n,F)$ je ireducibilna ako je odgovarajući $FG$-modul $F^n$ dat sa

$$vg = v(g\rho),\, v \in F^n,\, g \in G$$

ireducibilan. Ako je $F^n$ reducibilan isto je i sa reprezentacijom $\rho$.

Sljedeća teorema je navedena bez dokaza.

**Teorema 3.2** *Neka je $G$ konačna grupa i $V$ $\mathbb{C}G$-modul. Ako $g \in G$, tada postoji baza $\mathcal{B}$ od $V$ takva da je matrica $[g]_{\mathcal{B}}$ dijagonalna. Ako $g$ ima red $n$, tada su elementi na dijagonali matrice $[g]_{\mathcal{B}}$, $n$-ti korijeni iz jedinice.*

Funkcije koje čuvaju strukturu grupa i vektorskih prostora su homomorfizmi grupa i linearne transformacije, redom. Za $FG$-module takvu ulogu imaju $FG$-homomorfizmi.

**Definicija 3.7** *Neka su $V$ i $W$ $FG$-moduli. Za funkciju $\vartheta : V \longmapsto W$ kažemo da je $FG$-homomorfizam, ako je linearna transformacija i ako vrijedi*

$$(vg)\vartheta = (v\vartheta)g \text{ za sve } v \in V \text{ i } g \in G.$$

Drugim riječima ako $\vartheta$ slika $v$ u $w$, onda slika i $vg$ u $wg$.

# 4 Pomoćna tvrđenja i definicije

U ovom poglavlju biće navedene neke od definicija, tvrdnji i činjenica koje će nam trebati kasnije, za određivanje tabele karaktera. To je uglavnom vezano za simetrične grupe i permutacije, jer je rad usmjeren ka rješavanju problema nalaženja tabele karaktera simetrične grupe $S_7$.

Neka je $S_n$ simetrična grupa reda $n$ i neka je $x \in S_n$ proizvoljna permutacija. Tip permutacije $x$ je uređena $n$-torka

$$type(x) = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

gdje je $c_i$ broj ciklusa dužine $i$ u razlaganju permutacije $x$ na proizvod disjunktnih ciklusa.

**Teorema 4.1** *Dvije permutacije su konjugovane ako i samo ako su istog tipa.*

To znači da se u jednoj klasi konjugacije nalaze sve one permutacije koje su istog tipa.

Broj permutacija u određenoj klasi konjugacije u $S_n$ može se odrediti uz pomoć naredne teoreme.

**Teorema 4.2** *Broj permutacija tipa $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ u $S_n$ je*

$$\frac{n!}{1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \ldots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!}\,.$$

Centralizator grupe će igrati bitnu ulogu u pronalaženju tabele karaktera. Slijedi njegova definicija.

**Definicija 4.1** *Neka je $x \in G$. Centralizator od $x$ u grupi $G$, u oznaci $C_G(x)$, je skup elemenata grupe $G$ koji komutiraju sa $x$, tj.*

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\}.$$

Sljedeću teoremu možemo iskoristiti da izračunamo broj elemenata centralizatora od $x$ u grupi $G$, ako znamo broj elemenata u klasi konjugacije čiji je predstavnik element $x$.

**Teorema 4.3** *Neka je $x \in G$, gdje je $G$ konačna grupa. Tada je veličina klase konjugacije $x^G$ data sa*

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|.$$

*Specijalno $|x^G|$ dijeli $|G|$.*

*Dokaz.* Uočimo da za $g,h \in G$ vrijedi

$$\begin{aligned} g^{-1}xg = h^{-1}xh &\Leftrightarrow hg^{-1}x = xhg^{-1} \\ &\Leftrightarrow hg^{-1} \in C_G(x), \\ &\Leftrightarrow C_G(x)g = C_G(x)h. \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga, možemo definisati injektivnu funkciju $f$ sa $x^G$ u skup desnih koseta od $C_G(x)$ u $G$ sa

$$f : g^{-1}xg \longmapsto C_G(x)g,\ g \in G.$$

Jasno je da je $f$ sirjektivna, pa je i bijekcija. Time je dokazano da je $|x^G| = |G : C_G(x)|$.

∎

# 5 Karakteri

Karakteri imaju jednostavniji i pregledniji zapis od reprezentacija, a u njima se kriju razna svojstva reprezentacija i samih grupa. U nastavku rada će biti više govora o karakterima, kako bi se upoznali sa njima i njihovim svojstvima. Krenimo od definicije.

**Definicija 5.1** *Pretpostavimo da je $V$ $\mathbb{C}G$-modul sa bazom $\mathcal{B}$. Tada je karakter modula $V$ funkcija data sa*

$$\chi(g) = tr[g]_{\mathcal{B}},\ g \in G,$$

*gdje je sa $tr[g]_{\mathcal{B}}$ označen trag matrice $[g]_{\mathcal{B}}$.*

Karakter modula $V$ ne zavisi od baze $\mathcal{B}$. Zbog toga, karakter reprezentacije $\rho : G \longrightarrow GL(n,C)$ definišemo kao karakter $\chi$, odgovarajućeg $\mathbb{C}G$-modula $C^n$, sa

$$\chi(g) = tr(g\rho),\ g \in G.$$

**Definicija 5.2** *Kažemo da je $\chi$ karakter grupe $G$ ako je $\chi$ karakter nekog $\mathbb{C}G$-modula. Kažemo da je $\chi$ ireducibilan karakter grupe $G$, ako je $\chi$ karakter ireducibilnog $\mathbb{C}G$-modula, a $\chi$ je reducibilan ako je karakter reducibilnog $\mathbb{C}G$-modula.*

**Teorema 5.1** *Ako su $x$ i $y$ konjugovani elementi grupe $G$, tada je*

$$\chi(x) = \chi(y)$$

*za sve karaktere $\chi$ grupe $G$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da su $x$ i $y$ konjugovani elementi grupe $G$. Tada je $x = g^{-1}yg$ za neko $g \in G$. Neka je $V$ $\mathbb{C}G$ modul i neka je $\mathcal{B}$ baza od $V$. Tada je

$$[x]_{\mathcal{B}} = [g^{-1}yg]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}^{-1}[y]_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}.$$

Odavde je $tr[x]_{\mathcal{B}} = tr[y]_{\mathcal{B}}$, pa je i $\chi(x) = \chi(y)$, gdje je $\chi$ karakter od $V$.

■

U nastavku uvodimo još neke nove pojmove u vezi sa karakterima.

**Definicija 5.3** *Ako je $\chi$ karakter $\mathbb{C}G$-modula $V$, tada dimenziju od $V$ nazivamo stepen karaktera $\chi$.*

**Definicija 5.4** *Ako je $\chi$ karakter grupe $G$, tada je jezgro od $\chi$, što označavamo sa $Ker\ \chi$, definisano sa*

$$Ker\ \chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}.$$

Karaktere stepena 1 nazivamo linearni karakteri. Linearni karakteri su ireducibilni.

**Primjer 2** *Karakter trivijalnog $\mathbb{C}G$-modula je linearan karakter, koji se naziva trivijalni karakter grupe $G$. Označavamo ga sa $1_G$. Tako je*

$$1_G : g \longrightarrow 1 \text{ za svako } g \in G.$$

Trivijalni karakter je ireducibilan karakter svake grupe, pa u formiranju tabele karaktera, uvijek imamo za početak jedan ireducibilan karakter.

## 5.1 Permutacioni karakter

Kada je grupa $G$ podgrupa simetrične grupe $S_n$, lako možemo doći do jednog karaktera, ali za njega ne mora da važi da je ireducibilan. Taj karakter se naziva permutacioni karakter, a u nastavku će biti nešto više riječi o njemu.

Neka je $G$ podgrupa od $S_n$. Tada su elementi grupe $G$ permutacije skupa $\{1,2,\ldots,n\}$. Permutacioni modul $V$ (vidjeti definiciju 3.4), za grupu $G$ nad poljem $\mathbb{C}$ ima bazu $v_1, v_2, \ldots, v_n$, koju ćemo označiti sa $\mathcal{B}$, gdje je za svako $g \in G$

$$v_i g = v_{ig},\ 1 \leq i \leq n.$$

Kako nas, zbog karaktera, zanima trag matrice $[g]_{\mathcal{B}}$, to su nam interesantni samo elementi na glavnoj dijagonali te matrice. Ako je $ig \neq i$, tada je element na poziciji $ii$ u matrici $[g]_{\mathcal{B}}$ jednak 0, a inače je jednak 1. Zbog toga za permutacioni karakter vrijedi

$$\pi(g) = |fix(g)|,\ g \in G, \tag{1}$$

gdje je $fix(g) = \{i : 1 \leq i \leq n \text{ i } ig = i\}$.

Važna nam je i naredna tvrdnja, na osnovu koje može da se izračuna još jedan karakter.

**Teorema 5.2** *Neka je G podgrupa simetrične grupe $S_n$. Funkcija*

$$\mathcal{V}(g) = |fix(g)| - 1,\ g \in G$$

*je karakter grupe G.*

## 5.2 Skalarni proizvod karaktera

Za dalje izučavanje karaktera, upoznaćemo se sa operacijom skalarnog množenja karaktera, a zatim vidjeti za šta bi nam to moglo koristiti u okviru teorije karaktera.
Karakteri konačne grupe $G$ su funkcije iz $G$ u $\mathbb{C}$. Ako za neko $\lambda \in \mathbb{C}$ i takve dvije funkcije $\vartheta$ i $\phi$ definišemo $\vartheta + \varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sa $(\vartheta + \varphi)(g) = \vartheta(g) + \phi(g),\ g \in G$ i $\lambda\vartheta : G \longrightarrow \mathbb{C}$ sa $\lambda\vartheta(g) = \lambda(\vartheta(g)),\ g \in G$, tada skup svih funkcija iz $G$ u $\mathbb{C}$ čini vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Tako ove funkcije možemo posmatrati i kao vektore.
U ovom vektorskom prostoru može se formirati i skalarni proizvod.

**Definicija 5.5** *Pretpostavimo da su $\vartheta$ i $\phi$ funkcije iz G u $\mathbb{C}$. Definišemo*

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g)\overline{\phi(g)}.$$

Ovo je skalarni proizvod jer zadovoljava naredne uslove:

- $\langle \vartheta, \phi \rangle = \overline{\langle \vartheta, \phi \rangle}$ za sve $\vartheta, \phi$,
- $\langle \lambda_1\vartheta_1 + \lambda_2\vartheta_2, \phi \rangle = \lambda_1 \langle \vartheta_1, \phi \rangle + \lambda_2 \langle \vartheta_2, \phi \rangle$ za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ i sve vektore $\vartheta_1, \vartheta_2, \phi$,
- $\langle \vartheta, \vartheta \rangle > 0$ ako je $\vartheta \neq 0$.

**Teorema 5.3** *Pretpostavimo da G ima tačno l klasa konjugacije sa predstavnicima $g_1, g_2, \ldots, g_l$. Neka su $\chi$ i $\psi$ karakteri grupe G.*

*1.* $\langle \psi, \chi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1})$

*2.* $\langle \psi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$

*Dokaz.* Dokazaćemo samo drugo tvrđenje.
Kako su karakteri konstantni na klasi konjugacije imamo da je

$$\sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = |g_i^G| \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)},$$

gdje $g_i^G$ označava klasu konjugacije grupe $G$ koja sadrži $g_i$. Dalje je

$$G = \bigcup_{i=1}^{l} g_i^G \text{ i } |g_i^G| = |G|/|C_G(g_i)|,$$

na osnovu teoreme 4.3 i činjenice da je svaka grupa unija klasa konjugacije, a različite klase konjugacije su disjunktne. Tako je

$$\begin{aligned}\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} \sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \frac{|g_i^G|}{|G|} \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)} \\ &= \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{|C_G(g_i)|} \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}.\end{aligned}$$

■

Može se pokazati da ireducibilni karakteri grupe $G$ formiraju ortonormiran skup vektora u vektorskom prostoru funkcija iz $G$ u $\mathbb{C}$, tj. može se dokazati naredna teorema.

**Teorema 5.4** *Neka su $U$ i $V$ neizomorfni ireducibilni $\mathbb{C}G$-moduli sa karakterima $\chi$ i $\psi$, redom. Tada je*

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1, \text{ i}$$
$$\langle \chi, \psi \rangle = 0.$$

Koristeći ovu teoremu, može se dokazati i naredna.

**Teorema 5.5** *Neka su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri grupe $G$. Ako je $\psi$ neki karakter grupe $G$, tada je*

$$\psi = d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + \cdots + d_k\chi_k$$

*za neke nenegativne cijele brojeve $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Takođe,*

$$d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \text{ za } 1 \leq i \leq k, \text{ i}$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2.$$

Kako tabelu karaktera čine samo ireducibilni karakteri, pri konstrukciji često se koristi naredna teorema da bi se provjerilo da li je neki karakter ireducibilan ili nije.

**Teorema 5.6** *Neka je $V$ $\mathbb{C}G$-modul sa karakterom $\psi$. Tada je $V$ ireducibilan ako i samo ako je $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.*

## 5.3 Relacije ortogonalnosti

Relacije ortogonalnosti su u izvjesnom smislu, veza između elemenata tabele karaktera. Zato ćemo prvo uvesti pojam tabele karaktera, ali prije toga uvedimo pojam klasne funkcije i neke tvrdnje vezane za nju.

**Definicija 5.6** *Klasna funkcija na grupi $G$ je funkcija $\psi : G \longrightarrow \mathbb{C}$, takva da je $\psi(x) = \psi(y)$ kad god su $x$ i $y$ konjugovani elementi grupe $G$ (što znači da je $\psi$ konstantna na klasi konjugacije).*

**Teorema 5.7** *Broj ireducibilnih karaktera grupe $G$ jednak je broju klasa konjugacije grupe $G$.*

**Teorema 5.8** *Ireducibilni karakteri $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ grupe $G$ formiraju bazu vektorskog prostora svih klasnih funkcija na grupi $G$. Ako je $\psi$ klasna funkcija, tada je*

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i,$$

*gdje je $\lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$ za $1 \leq i \leq k$.*

**Definicija 5.7** *Neka su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri grupe $G$ i neka su $g_1, g_2, \ldots, g_k$ predstavnici klasa konjugacije grupe $G$. Matrica dimenzije $k \times k$ čiji je $ij$-ti element $\chi_i(g_j)$, za sve $i, j$ gdje je $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$, naziva se tabela karaktera grupe $G$.*

Vrste u tabeli su indeksirane po nazivima ireducibilnih karaktera grupe $G$, dok su kolone nazvane po klasama konjugacije grupe $G$, ili što je češće, po predstavnicima klasa.

**Teorema 5.9** *Neka su $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri grupe $G$ i neka su $g_1, g_2, \ldots, g_k$ predstavnici klasa konjugacije grupe $G$. Tada važe sljedeće relacije za svako $r, s \in \{1, 2, \ldots, k\}$.*

1. *Relacije ortogonalnosti za vrste:* $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$.

2. *Relacije ortogonalnosti za kolone:* $\sum\limits_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|$.

*Dokaz.* Dokazaćemo samo drugu tvrdnju teoreme.
Za $1 \leq s \leq k$, neka je $\psi_s$ linearna kombinacija od $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$, npr.

$$\psi_s = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i,\ \lambda_i \in \mathbb{C}.$$

Znamo da je $\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$, pa je

$$\lambda_i = \langle \psi_s, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)}.$$

Sada je $\psi_s(g) = 1$ ako je $g$ konjugovano sa $g_s$, a $\psi_s(g) = 0$ ako nije. Takođe na osnovu teoreme 4.3, imamo da je broj elemenata grupe $G$ koji su konjugovani sa $g_s$, $|G|/|C_G(g_s)|$. Tada je

$$\lambda_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in g_s^G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|},$$

pa je

$$\delta_{rs} = \psi_s(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|},$$

iz čega slijedi tvrdnja.

■

## 5.4 Linearni karakteri simetrične grupe $S_n$

U narednom dijelu biće pokazano da simetrična grupa $S_n$ za $n \geq 2$, ima tačno dva linearna karaktera.

**Definicija 5.8** *Za grupu $G$, neka je $G'$ podgrupa grupe $G$ koja je generisana elementima oblika $ghg^{-1}h^{-1}$, $g,h \in G$. Podgrupa $G'$ se naziva komutatorska podgrupa grupe $G$.*

Element $ghg^{-1}h^{-1}$ naziva se komutator elemenata $g,h \in G$. Ako elementi $g$ i $h$ komutiraju, tada je njihov komutator $ghg^{-1}h^{-1}$ jednak jediničnom elementu. Ova podgrupa, u izvjesnom smislu, mjeri koliko grupa odstupa od toga da bude Abelova.
Umjesto zapisa

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \mathrm{n} \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

za permutaciju $\pi \in S_n$ koristićemo naredni zapis $\pi = \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Primijetimo još jedno svojstvo permutacija, odnosno kako je $\rho\pi\rho^{-1}$ dobijeno iz permutacije $\pi$. Vrijedi

$$\rho\pi\rho^{-1} = \begin{pmatrix} i \\ \rho(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \pi(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho(i) \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(i) \\ \rho\pi(i) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

To znači da, ako je permutacija $\pi = (a_1 \ldots a_{k_1})(b_1 \ldots i\pi(i) \ldots b_{k_2}) \ldots (c_1 \ldots c_{k_s})$, onda $\rho\pi\rho^{-1} = (\rho(a_1) \ldots \rho(a_{k_1}))(\rho(b_1) \ldots \rho(i)\rho\pi(i) \ldots \rho(b_{k_2})) \ldots (\rho(c_1) \ldots \rho(c_{k_s}))$. Na osnovu toga zaključujemo da je dužina ciklusa u $\rho\pi\rho^{-1}$ jednaka onim u $\pi$.

**Teorema 5.10** *$A_n$ je komutatorska podgrupa od $S_n$. Svaki element od $A_n$ je i sam komutator.*

*Dokaz.* Komutator u $S_n$ je element oblika $\pi\rho\pi^{-1}\rho^{-1}$. Kako je $sgn\ \pi = sgn\ \pi^{-1}$ i $sgn\ \rho = sgn\ \rho^{-1}$ svaki komutator je sadržan u $A_n$. To znači da je komutatorska podgrupa $S_n'$ od $S_n$, koja je generisana svim ovim elementima, takođe sadržana u $A_n$, tj. $S_n' \leqslant A_n$.

Treba još dokazati da je i $A_n \leqslant S_n'$.

Primijetimo da za svako $i$ takvo da je $2i+1 \leq n$ imamo da je

$$(1, \ldots, 2i+1) = (1, \ldots, i+1)(i+1, \ldots, 2i+1)$$

pa je tako $(1, \ldots, 2i+1)$ oblika $\rho\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1}$ gdje je $\rho := (1, \ldots, i+1)$, a $\sigma$ odgovarajući element grupe $S_{2i+1}$ (primijeniti jednakost 2). Isto tako, za $i \leq j$ je

$$(1, \ldots, 2i)(2i+1, \ldots, 2i+2j) = (1, \ldots, i+j+1)(2i, i+j+1, \ldots, 2i+2j),$$

pa su ovi elementi komutatori u $S_{2i+2j}$.

Slična tvrdnja važi za proizvoljni ciklus neparne dužine i za svaki par disjunktnih ciklusa sa parnom dužinom.

Parna permutacija može da sadrži cikluse neparne dužine, za koje smo dokazali da su oblika $\rho\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1}$, paran broj ciklusa parne dužine ili oboje. Ukoliko permutacija sadrži parne cikluse, kako ih je paran broj, njih možemo upariti, pa je i ona oblika $\rho\sigma\rho^{-1}\sigma^{-1}$, tj. komutator.

■

Za svaku konačnu grupu $G$ i njenu komutatorsku podgrupu $G'$, faktor grupa $G/G'$ je izomorfna grupi jednodimenzionalnih karaktera grupe $G$ nad $\mathbb{C}$ ([4], Poglavlje 1). U prethodnoj teoremi 5.10, pokazano je da vrijedi $S_n' = A_n$. Imamo onda da je $S_n/S_n' = \{A_n, A_n(12)\} \cong C_2$, pa $G$ ima tačno dva jednodimenzionalna, tj. linearna karaktera.
Ti linearni karakteri su

$$\chi_1 = 1_{S_n} \text{ i}$$

$$\chi_2(g) = \begin{cases} 1 & \text{ako } g \in A_n, \\ -1 & \text{ako } g \notin A_n. \end{cases}$$

Uz pomoć linearnih karaktera grupe $G$, se na jednostavan način mogu dobiti novi ireducibilni karakteri grupe $G$, od već postojećih.

**Teorema 5.11** *Pretpostavimo da je $\chi$ karakter od $G$ i $\lambda$ linearni karakter od $G$. Proizvod $\chi\lambda$ dat sa $\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g)$, $g \in G$ je karakter od $G$. Ako je $\chi$ ireducibilan, tada je i $\chi\lambda$ takođe ireducibilan karakter.*

## 5.5 Tenzorski proizvod i njegove primjene

Možemo množiti bilo koja dva karaktera grupe $G$, a njihov proizvod će ponovo biti karakter. Naravno, taj novodobijeni karakter, ne mora biti ireducibilan, čak i ako smo množili ireducibilne karaktere. Množeći karakter sa samim sobom, određeni broj puta, dobijamo određene stepene tog karaktera.
Neka su $V$ i $W$ vektorski prostori nad $\mathbb{C}$ sa bazama $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i $w_1, w_2, \ldots, w_n$ redom. Definišimo simbol $v_i \otimes w_j$ za sve $i$ i $j$, takve da je $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Tenzorski prostor $V \otimes W$ definišimo tako da predstavlja $mn$-dimenzionalni prostor nad $\mathbb{C}$, sa bazom datom sa

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Za $v \in V$ i $w \in W$ gdje je

$$v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \text{ i } w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j,\ (\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C})$$

definišemo
$$v \otimes w = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j).$$
Za tenzorski proizvod vrijede naredna svojstva.

**Teorema 5.12**

1. *Ako su* $v \in V,\ w \in W$ *i* $\lambda \in \mathbb{C}$, *tada*
$$v \otimes (\lambda w) = (\lambda v) \otimes w = \lambda (v \otimes w).$$

2. *Ako su* $x_1, x_2, \ldots, x_a \in V$ *i* $y_1, y_2, \ldots, y_b \in W$, *tada je*
$$\left(\sum_{i=1}^{a} x_i\right) \otimes \left(\sum_{j=1}^{b} y_j\right) = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j.$$

Konstrukcija $V \otimes W$ je zavisila od izbora baza od $V$ i $W$, ali naredna teorema govori o tome da mogu biti uzete i druge baze.

**Teorema 5.13** *Ako je* $e_1, e_2, \ldots, e_m$ *baza od* $V$ *i* $f_1, f_2, \ldots, f_n \in W$, *baza od* $W$, *tada elementi u*
$$\{e_i \otimes f_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$
*čine bazu od* $V \otimes W$.

*Dokaz.* $v_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} e_k$, $w_j = \sum_{l=1}^{n} \mu_{jl} f_l$, gdje su $\lambda_{ik}, \mu_{jl} \in \mathbb{C}$. Na osnovu 5.12 imamo da je
$$v_i \otimes w_j = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \mu_{jl} (e_k \otimes f_l).$$
Kako elementi $v_i \otimes w_j$ gdje je $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, čine bazu od $V \otimes W$, onda $mn$ elemenata $e_k \otimes f_l$ razapinju $V \otimes W$. Kako je $V \otimes W$ dimenzije $mn$, slijedi da su elementi $e_k \otimes f_l$ takođe i baza od $V \otimes W$.

■

Kako je definisan tenzorski proizvod dva vektorska prostora, sada isto možemo uraditi i za dva $\mathbb{C}G$-modula.

Neka je $G$ konačna grupa i neka su $V$ i $W$ $\mathbb{C}G$-moduli sa bazama $v_1, v_2, \ldots, v_m$ i $w_1, w_2, \ldots, w_n$, redom. Vidjeli smo da elementi

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

čine bazu od $V \otimes W$. Prvo definišemo množenje baznih elemenata $v_i \otimes w_j$ elementima grupe $G$, pa onda linearno proširujemo do množenja bilo kog elementa iz $V \otimes W$ elementima grupe $G$.

**Definicija 5.9** *Neka je $g \in G$. Za sve $i, j$ definišemo*

$$(v_i \otimes w_j)g = v_i g \otimes w_j g$$

*i uopštenije $\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes w_j)\right) g = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes w_j g)$ za proizvoljan kompleksan broj $\lambda_{ij}$.*

**Teorema 5.14** *Za sve $v \in V, w \in W$ i sve $g \in G$, imamo da je*

$$(v \otimes w)g = vg \otimes wg.$$

*Dokaz.* Neka su $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ i $w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$.Tada

$$\begin{aligned}
(v \otimes w)g &= \left(\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes w_j)\right) g && \text{[na osnovu teoreme 5.12]} \\
&= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i g \otimes w_j g) \\
&= \left(\sum_{i} \lambda_i v_i g\right) \otimes \left(\sum_{j} \mu j w_j g\right) && \text{[na osnovu teoreme 5.12]} \\
&= vg \otimes wg.
\end{aligned}$$

■

Množenje koje je dato u definiciji 5.9, vektorski prostor $V \otimes W$ pretvara u $\mathbb{C}G$-modul.

Vratimo se karakterima.

**Teorema 5.15** *Neka su $V$ i $W$ $\mathbb{C}G$-moduli sa karakterima $\chi$ i $\psi$, redom. Karakter $\mathbb{C}G$-modula $V \otimes W$ je proizvod karaktera $\chi\psi$, gdje je*

$$\chi\psi(g) = \chi(g)\psi(g), \text{ za sve } g \in G.$$

*Dokaz.* Neka je $g \in G$. Po teoremi 3.2, možemo izabrati bazu $e_1, e_2, \ldots, e_m$ od $V$ i $f_1, f_2, \ldots, f_n$ od $W$ takvu da je $e_i g = \lambda_i e_i$ gdje je $1 \leq i \leq m$ i $f_j g = \mu_j f_j$ gdje je $1 \leq j \leq n$, za neke $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{C}$. Tada je

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i, \ \psi(g) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j.$$

Sada imamo da je za sve $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$,

$$(e_i \otimes f_j)g = e_i g \otimes f_j g = \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j),$$

a po teoremi 5.13 vektori $e_i \otimes f_j$ formiraju bazu od $V \otimes W$. Odatle slijedi da, ako je $\phi$ karakter od $V \otimes W$, tada je

$$\phi(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \left( \sum_i \lambda_i \right) \left( \sum_j \mu_j \right) = \chi(g)\psi(g),$$

čime je tvrdnja dokazana.

■

Kao posljedica navedenog, vrijedi i naredno tvrđenje.

**Teorema 5.16** *Proizvod dva karaktera grupe $G$ je karakter grupe $G$.*

U narednom dijelu ćemo vidjeti kako stepenujemo karaktere i koliko su stepeni karaktera korisni za izračunavanje tabele karaktera neke konačne grupe.
Vidjeli smo da je poizvod dva karaktera opet karakter. Ako karakter $\chi$ množimo samim sobom dobijamo karakter $\chi^2$. Proces možemo nastaviti, množeći dobijeni karakter $\chi^2$, ponovo sa karakterom $\chi$ i na taj način dobiti karakter $\chi^3$, itd. Za nenegativan cijeli broj $n$ definišemo $\chi^n$ sa $\chi^n(g) = (\chi(g))^n$ za sve $g \in G$. Imamo da je $\chi^0 = 1_G$.

**Teorema 5.17** *Neka je $\chi$ vjerodostojan karakter grupe $G$ i pretpostavimo da $\chi(g)$ uzima tačno $r$ različitih vrijednosti kako $g$ prolazi kroz grupu $G$. Tada je svaki ireducibilni karakter grupe $G$ sabirak u zbiru koji predstavlja neki od karaktera $\chi^0, \chi^1, \ldots, \chi^{r-1}$.*

*Dokaz.* Neka $r$ vrijednosti koje $\chi$ uzima budu $a_1, a_2, \ldots, a_r$, i za $1 \leq i \leq r$, definišemo

$$G_i = \{g \in G : \chi(g) = a_i\}.$$

Uzmimo da je $a_1 = \chi(1)$, pa je $G_1 = Ker\ \chi$. Kako je $\chi$ vjerodostojan, $G_1 = \{1\}$. Neka je sada $\psi$ ireducibilan karakter grupe $G$. Trebamo pokazati da je $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$ za neko $j$ takvo da je $0 \leq j \leq r-1$.

Za $1 \leq i \leq r$, neka je

$$\beta_i = \sum_{g \in G_i} \overline{\psi(g)}$$

i primijetimo da je $\beta_1 = \psi(1) \neq 0$. Tada je za sve $j \geq 0$,

$$\langle \chi^j, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\chi(g))^j \overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} (a_i)^j \beta_i.$$

Neka je $A$, $r \times r$ matrica sa $ij$-tim elementom $(a_i)^{j-1}$ i neka je $b$ vektor vrsta, koji je dat sa $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$. Sada je matrica $A$ invertibilna kao Vandermondova matrica, a $b \neq 0$ jer je $\beta_1 \neq 0$. Tada je i $bA \neq 0$. Imamo da je $(j+1)$-vi element u vektor vrsti $bA$ jednak $|G|\langle \chi^j, \psi \rangle$, pa je $\langle \chi^j, \psi \rangle \neq 0$ za neko j, gdje je $1 \leq j \leq r-1$, kao što je i trebalo dokazati.

■

Sada će biti pokazano kako se može izvršiti dekompozicija karaktera $\chi^2$.

Ako je $V$ $CG$-modul sa karakterom $\chi$, tada modul $V \otimes V$ ima karakter $\chi^2$. Definišimo linearnu transformaciju $T : V \otimes V \longmapsto V \otimes V$ sa

$$(v_i \otimes v_j)T = v_j \otimes v_i \text{ za sve } i, j,$$

gdje je $v_1, v_2, \ldots, v_n$ baza od $V$. Ovu definiciju možemo linearno proširiti i doći do zaključka da za svako $v, w \in V$ imamo da je $(v \otimes w)T = w \otimes v$. Samim tim $T$ ne zavisi od izbora baze.

Definišimo podskupove od $V \otimes V$ na sljedeći način:

$$S(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : xT = x\},$$

$$A(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : xT = -x.\}$$

Kako je $T$ linearno, to su $S(V \otimes V)$ i $A(V \otimes V)$ potprostori od $V \otimes V$. Potprostor $S(V \otimes V)$ se zove simetrični dio od $V \otimes V$, a $A(V \otimes V)$ antisimetrični dio od $V \otimes V$.

**Teorema 5.18** *Potprostori $S(V \otimes V)$ i $A(V \otimes V)$ su $\mathbb{C}G$-podmoduli od $V \otimes V$. Takođe*

$$V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V).$$

*Dokaz.* Za sve $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ i $g \in G$ vrijedi

$$\left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right) Tg = \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_j g \otimes v_i g)$$
$$= \sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i g \otimes v_j g)T$$
$$= \left(\sum_{i,j} \lambda_{ij}(v_i \otimes v_j)\right) gT.$$

Slijedi da je $T$ $\mathbb{C}G$-homomorfizam sa $V \otimes V$ na samog sebe. Tako za $x \in S(V \otimes V)$ i $y \in A(V \otimes V)$ i $g \in G$, imamo

$$(xg)T = (xT)g = xg \text{ i}$$

$$(yg)T = (yT)g = -yg,$$

pa je $xg \in S(V \otimes V)$ i $yg \in A(V \otimes V)$. Odatle su $S(V \otimes V)$ i $A(V \otimes V)$ $\mathbb{C}G$-podmoduli od $V \otimes V$. Ako je $x \in S(V \otimes V) \cap A(V \otimes V)$ tada je $x = xT = -x$, odakle je $x = 0$. Dalje imamo, za $x \in V$

$$x = \frac{1}{2}(x + xT) + \frac{1}{2}(x - xT).$$

Kako je $T^2$ identitet, vrijedi $\frac{1}{2}(x + xT) \in S(V \otimes V)$ i $\frac{1}{2}(x - xT) \in A(V \otimes V)$. Odatle je

$$V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V).$$

■

**Teorema 5.19** *Neka je $v_1, v_2, \ldots, v_n$ baza od $V$.*

1. *Vektori $v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i$, $1 \leq i \leq j \leq n$ čine bazu od $S(V \otimes V)$. Dimenzija od $S(V \otimes V)$ je $n(n+1)/2$.*

2. *Vektori $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i$, $1 \leq i \leq j \leq n$ čine bazu od $A(V \otimes V)$. Dimenzija od $A(V \otimes V)$ je $n(n-1)/2$.*

*Dokaz.* Vektori $v_i \otimes v_j + v_j \otimes v_i$, $1 \leq i \leq j \leq n$ su linearno nezavisni elementi u $S(V \otimes V)$, a vektori $v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i$, $1 \leq i \leq j \leq n$ su linearno nezavisni u $A(V \otimes V)$. Tada je

$$dim\, S(V \otimes V) \geq n(n+1)/2, dim\, A(V \otimes V) \geq n(n-1)/2.$$

Na osnovu teoreme 5.18 je

$$dim\ S(V\otimes V)+dim\ A(V\otimes V)=dim\ V\otimes V=n^2.$$

Možemo zaključiti da su obje gornje nejednakosti ustvari jednakosti, na osnovu čega su tvrdnje dokazane.

■

Definišemo $\chi_S$ da je karakter od $\mathbb{C}G$-modula $S(V\otimes V)$, a $\chi_A$ da je karakter od $\mathbb{C}G$-modula $A(V\otimes V)$. Na osnovu teoreme 5.18 je

$$\chi^2=\chi_S+\chi_A.$$

Pogledajmo kako se računaju ti karakteri.

**Teorema 5.20** *Za $g\in G$ vrijedi*

$$\chi_S(g)=\frac{1}{2}(\chi^2(g)+\chi(g^2))\ i$$
$$\chi_A(g)=\frac{1}{2}(\chi^2(g)-\chi(g^2)).$$

*Dokaz.* Na osnovu teoreme 3.2 možemo izabrati bazu $e_1,e_2,\dots,e_n$ od $V$ tako da je $e_ig=\lambda_ie_i$, gdje je $1\le i\le n$ za neke kompleksne brojeve $\lambda_i$. Tada je

$$(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i)g=\lambda_i\lambda_j(e_i\otimes e_j-e_j\otimes e_i),$$

pa na osnovu teoreme 5.19 pod 2, imamo da je

$$\chi_A(g)=\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j.$$

Sada je $e_ig^2=\lambda_i^2e_i$, pa je $\chi(g)=\sum_i\lambda_i$ i $\chi(g^2)=\sum_i\lambda_i^2$. Znači

$$\chi^2(g)=(\chi(g))^2=\sum_i\lambda_i^2+2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\chi(g^2)+2\chi_A(g).$$

Tada je

$$\chi_A(g)=\frac{1}{2}(\chi^2(g)-\chi(g^2)).$$

Takođe

$$\chi^2=\chi_S+\chi_A,$$

što imlicira da je

$$\chi_S(g)=\chi^2(g)-\chi_A(g)=\frac{1}{2}(\chi^2(g)+\chi(g^2)).$$

## 5.6 Neki ireducibilni karakteri simetrične grupe $S_n$

Neka je $\Omega$ skup. Označimo sa $Sym(\Omega)$ grupu svih permutacija od $\Omega$. Specijalno, ako je $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$, tada je $Sym(\Omega) = S_n$.

**Definicija 5.10** *Neka je G grupa i $\Omega$ skup. Akcija grupe G na skup $\Omega$ je homomorfizam $\phi : G \longmapsto Sym(\Omega)$. Kažemo takođe, da G dejstvuje na $\Omega$ sa $\phi$.*

Da bi pojednostavili zapis, ako je $\phi : G \longmapsto Sym(\Omega)$ akcija, za $\omega \in \Omega$ i $g \in G$ pišemo samo $\omega g$ umjesto $\omega(g\phi)$. Sa ovom notacijom, ako želimo reći da je $\phi$ homomorfizam, pišemo $\omega(gh) = (\omega g)h$ za sve $\omega \in \Omega$ i $g,h \in G$.
Definišimo relaciju $\sim$ na skupu $\Omega$. Za svako $\alpha,\beta \in \Omega$, imamo da je $\alpha \sim \beta$ ako i samo ako postoji $g \in G$ takvo da je $\alpha g = \beta$. Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije na $\Omega$. Klase ekvivalencije se zovu orbite grupe $G$ na $\Omega$, a $\Omega$ je disjunktna unija orbita od $G$. Broj orbita grupe $G$ na $\Omega$ označavamo sa $orb(G,\Omega)$. Grupa $G$ je tranzitivna ako je $orb(G,\Omega) = 1$.
Za $\omega \in \Omega$, sa $\omega^G$ označavamo orbite grupe $G$ koje sadrže $\omega$, tj.

$$\omega^G = \{\omega g : g \in G\},$$

a sa $G_\omega$ stabilizator grupe $G$, odnosno

$$G_\omega = \{g \in G : \omega g = \omega\}.$$

**Teorema 5.21** *Stabilizator od $G_\omega$ je podgrupa grupe G. Veličina orbite $\omega^G$ je jednaka indeksu od $G_\omega$ u G, tj.*

$$|\omega^G| = |G : G_\omega|.$$

Označimo sa $\mathbb{C}\Omega$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ za koji je $\Omega$ baza, tj. neka $\mathbb{C}\Omega$ sadrži sve izraze oblika

$$\sum_{\omega\in\Omega} \lambda_\omega \omega \text{ gdje je } \lambda_\omega \in \mathbb{C},$$

sa sabiranjem i skalarnim množenjem. Definišući

$$\left(\sum \lambda_\omega \omega\right) g = \sum \lambda_\omega (\omega g),$$

možemo od $\mathbb{C}\Omega$ formirati $\mathbb{C}G$-modul, koji nazivamo permutacioni modul. Ako je $\pi$ karakter permutacionog modula, tada za svako $g \in G$, vrijedi da je

$$\pi(g) = |fix_\omega(g)|,$$

gdje je $fix_{\omega}(g) = \{\omega \in \Omega : \omega g = \omega\}$. Karakter $\pi$ nazivamo permutacioni karakter grupe $G$ na $\Omega$.

**Teorema 5.22** *Neka je $G$ grupa koja dejstvuje na konačni skup $\Omega$, i neka je $\pi$ permutacioni karakter. Tada je*

$$\langle \pi, 1_G \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix_{\omega}(g)| = orb(G, \Omega).$$

Kao posljedica vrijedi i naredna teorema.

**Teorema 5.23** *$G$ je tranzitivna na $\Omega$ ako i samo ako je $\langle \pi, 1_G \rangle = 1$.*

Neka je sada $G$ grupa koja dejstvuje na dva skupa $\Omega_1$ i $\Omega_2$ sa odgovarajućim permutacionim karakterima $\pi_1$ i $\pi_2$, redom. Možemo definisati akciju grupe $G$ na Dekartov proizvod $\Omega_1 \times \Omega_2$ uzimajući da je

$$(\omega_1, \omega_2)g = (\omega_1 g, \omega_2 g)$$

za sve $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$, $g \in G$. Vrijedi $fix_{\Omega_1 \times \Omega_2}(g) = fix_{\Omega_1} \times fix_{\Omega_2}$ za svako $g \in G$. Ako je $\pi$ permutacioni karakter grupe $G$ na $\Omega_1 \times \Omega_2$, tada je

$$\pi(g) = \pi_1(g)\pi_2(g)$$

za sve $g \in G$.

**Teorema 5.24** *Neka $G$ dejstvuje na skupove $\Omega_1$ i $\Omega_2$ sa odgovarajućim permutacionim karakterima $\pi_1$ i $\pi_2$, redom. Tada je*

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = orb(G, \Omega_1 \times \Omega_2).$$

*Dokaz.* Imamo da je

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix_{\omega_1}(g)||fix_{\omega_2}(g)| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |fix_{\omega_1 \times \omega_2}(g)|,$$

što je jednako $orb(G, \Omega_1 \times \Omega_2)$ na osnovu teoreme 5.22.

■

**Definicija 5.11** *Broj orbita grupe $G$ na $\Omega \times \Omega$, zove se rang grupe $G$ na $\Omega$, a označavamo ga sa $r(G, \Omega)$. Pišemo*

$$r(G, \Omega) = orb(G, \Omega \times \Omega).$$

Naredna teorema je direktna posljedica teoreme 5.24.

**Teorema 5.25** *Neka $G$ dejstvuje na $\Omega$, permutacionim karakterom $\pi$. Tada je*

$$r(G,\Omega) = \langle \pi, \pi \rangle.$$

**Definicija 5.12** *Neka je $G$ tranzitivna na $\Omega$. Kaže se da je $G$ 2-tranzitivna na $\Omega$ ako je $r(G,\Omega) = 2$.*

**Teorema 5.26** *Ako je $G$ 2-tranzitivna na $\Omega$, sa permutacionim karakterom $\pi$, tada je*

$$\pi = 1_G + \chi,$$

*gdje je $\chi$ ireducibilan karakter grupe $G$.*

Na osnovu teoreme 5.7, znamo da je broj ireducibilnih karaktera grupe $G$ jednak broju klasa konjugacije grupe $G$. Već je pomenuto i da se u jednoj klasi konjugacije simetrične grupe, nalaze sve one permutacije koje su istog tipa. Znači da je broj klasa konjugacije, pa samim tim i broj ireducibilnih karaktera simetrične grupe $S_n$, jednak broju permutacija različitog tipa. Tip permutacije možemo vidjeti i kao particiju broja $n$. Kao što je ranije pomenuto, tip permutacije $x \in S_n$ je uređena $n$-torka $type(x) = (c_1, c_2, \dots, c_k)$, gdje je $c_k$ broj ciklusa dužine $k$ u razlaganju permutacije $x$ na proizvod disjunktnih ciklusa. Imamo da je $c_1 + 2c_2 + \cdots + nc_n = n$, tj. tada je

$$(\underbrace{n, n, \dots, n,}_{c_n \text{ puta n}} \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2,}_{c_2 \text{ puta } 2} \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{c_1 \text{ puta } 1})$$

particija broja $n$. Možemo zaključiti da je broj različitih ireducibilnih karaktera od $S_n$ jednak broju particija broja $n$. Može se, za svaku particiju $\lambda$, konstruisati karakter $\chi^\lambda$ koji joj odgovara, a u radu će biti govora samo o onim koji odgovaraju particijama broja $n$ na dva dijela.

Neka je $G = S_n$ i $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Za svaki cijeli broj $k \leq n/2$, definišimo $I_k$ da je skup koji sadrži sve podskupove od $I$ veličine $k$. Možemo definisati akciju grupe $G$ na $I_k$ na sljedeći način. Za bilo koji podskup $A = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in I_k$ i bilo koje $g \in G$, neka je

$$Ag = \{i_1 g, i_2 g, \dots, i_k g\}.$$

Neka je $\pi_k$ permutacioni karakter grupe $G$ u njenoj akciji na $I_k$. Tada je

$$\pi_k(1) = |I_k| = \binom{n}{k}.$$

**Teorema 5.27** *Ako je $l \leq k \leq n/2$, tada je $\langle \pi_k, \pi_l \rangle = l+1$.*

*Dokaz.* Po teoremi 5.24 je $\langle \pi_k, \pi_l \rangle = orb(G, I_k \times I_l)$. Orbite od $G = S_n$ na $I_k \times I_l$ su $J_0, J_1, \ldots J_l$, gdje je za $0 \leq s \leq l$,

$$J_s = \{(A,B) \in I_k \times I_l : |A \cap B| = s\},$$

pa je $orb(G, I_k \times I_l) = l+1$, iz čega slijedi tvrdnja.

■

**Teorema 5.28** *Neka je $m = n/2$, ako je $n$ parno i $m = (n-1)/2$, ako je $n$ neparno. Tada $S_n$ ima različite ireducibilne karaktere $\chi^{(n)} = 1_G$, $\chi^{(n-1,1)}$, $\chi^{(n-2,2)}$, $\ldots$,$\chi^{(n-m,m)}$, takve da, za svako $k \leq m$ vrijedi*

$$\pi_k = \chi^{(n)} + \chi^{(n-1,1)} + \cdots + \chi^{(n-k,k)}.$$

*Specijalno, $\chi^{(n-k,k)} = \pi_k - \pi_{k-1}$.*

*Dokaz.* Dokazujemo indukcijom po $k$. Tvrdnja vrijedi za $k = 1$ na osnovu teoreme 5.26. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve vrijednosti manje od $k$. Tada postoje ireducibilni karakteri

$$\chi^{(n)}, \chi^{(n-1,1)}, \chi^{(n-2,2)}, \ldots, \chi^{(n-k+1,k-1)},$$

takvi da je

$$\pi_i = \chi^{(n)} + \chi^{(n-1,1)} + \cdots + \chi^{(n-i,i)},$$

za sve $i < k$. Dalje, na osnovu teoreme 5.27 je

$$\langle \pi_k, 1_G \rangle = 1,\ \langle \pi_k, \pi_1 \rangle = 2,\ \ldots,\ \langle \pi_k, \pi_{k-1} \rangle = k,\ \langle \pi_k, \pi_k \rangle = k+1.$$

Slijedi $\pi_k = \pi_{k-1} + \chi$ za neki ireducibilan karakter $\chi$. Ako napišemo $\chi = \chi^{(n-k,k)}$, dokaz je završen.

■

# 6 Tabela karaktera simetrične grupe $S_7$

U ovom poglavlju, biće prikazan jedan od načina kako možemo doći do tabele karaktera grupe $S_7$, a naravno, to je moguće uraditi i na druge načine.

Da bismo odredili tabelu karaktera grupe $S_7$, prvo ćemo odrediti koliko ireducibilnih karaktera ona ima, tj. koliko ima klasa konjugacije. Različite klase konjugacije su one, čiji predstavnici su sljedeći elementi, odnosno permutacije:

$$g_1 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) = 1,\ g_2 = (12)(3)(4)(5)(6)(7),$$
$$g_3 = (12)(34)(5)(6)(7),\ g_4 = (12)(34)(56)(7),\ g_5 = (123)(4)(5)(6)(7),$$
$$g_6 = (123)(45)(6)(7),\ g_7 = (123)(45)(67),\ g_8 = (123)(456)(7),$$
$$g_9 = (1234)(5)(6)(7),\ g_{10} = (1234)(56)(7),\ g_{11} = (1234)(567),$$
$$g_{12} = (12345)(6)(7),\ g_{13} = (12345)(67),\ g_{14} = (123456)(7),\ g_{15} = (1234567).$$

Radi lakšeg zapisa, klasu konjugacije čiji je predstavnik $g_1$, u daljem tekstu ćemo označavati sa $(1)$, a sve ostale ćemo zapisivati tako, da će u zagradi biti navedene dužine ciklusa koji nisu ciklusi dužine 1. Npr. za klasu čiji predstavnik je permutacija $g_5 = (123)(4)(5)(6)(7)$ pisaćemo $(3)$, a onu čiji je predstavnik permutacija $g_{11} = (1234)(567)$ označićemo sa $(4,3)$. Sve različite klase konjugacije grupe $S_7$ su prikazane u narednoj tabeli.

Tabela 1: Klase konjugacije

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Kao što vidimo, postoji 15 različitih klasa konjugacije, pa samim tim ima i 15 ireducibilnih karaktera grupe $S_7$, na osnovu teoreme 5.7.

Koristeći teoremu 4.2 možemo izračunati koliko elemenata ima svaka klasa konjugacije. Npr. za klasu $(3,2)$ čiji je predstavnik $g_7 = (123)(45)(6)(7)$, imamo da je $type(g_7) = (2,1,1,0,0,0,0)$. Ako uvrstimo, dobićemo

$$\frac{7!}{1^2 \cdot 2! \cdot 2 \cdot 1! \cdot 3 \cdot 1! \cdot 4^0 \cdot 0! \cdot 5^0 \cdot 0! \cdot 6^0 \cdot 0! \cdot 7^0 \cdot 0!} = \frac{5040}{2 \cdot 2 \cdot 3} = 420,$$

što znači da ova klasa ima 420 elemenata. Analogno možemo uraditi i za preostale klase konjugacije. Rezultati su prikazani u tabeli 2, u čijoj prvoj vrsti su klase konjugacije, a u drugoj broj elemenata u svakoj od njih.

Tabela 2: Broj elemenata u svakoj klasi konjugacije

| $Klase$ | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Br.el.$ | 1 | 21 | 105 | 105 | 70 | 420 | 210 | 560 | 210 | 630 | 420 | 504 | 504 | 840 | 720 |

Kako imamo brojeve elemenata u svakoj klasi konjugacije, sada možemo koristeći teoremu 4.3 naći i broj elemenata u centralizatoru. Npr. biće $|C_{S_7}(g_7)| = \frac{7!}{420} = 12$, a preostale vrijednosti su prikazane u tabeli 3.

Tabela 3: Vrijednosti centralizatora

| $Klase$ | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Br.el.$ | 1 | 21 | 105 | 105 | 70 | 420 | 210 | 560 | 210 | 630 | 420 | 504 | 504 | 840 | 720 |
| $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |

Na osnovu onoga što je zaključeno u poglavlju o linearnim karakterima simetrične grupe 5.4, postoje samo dva linearna karaktera, a to su trivijalni karakter koji ima vrijednost 1 na svakoj klasi konjugacije, koji ćemo označiti sa $\chi_1$ i alternirajući karakter koji uzima vrijednost 1 ako su permutacije u datoj klasi konjugacije parne, a vrijednost $-1$ ako su neparne. Njega ćemo označiti sa $\chi_2$. Njihove vrijednosti na određenim klasama konjugacije date su u tabeli 4.

Tabela 4: Linearni karakteri

| $Klase$ | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |

Za izračunavanje permutacionog karaktera možemo koristiti jednakost (1), koja glasi: $\pi(g) = |fix(g)|$, $g \in S_n$. U teoremi 5.2 vidjeli smo da je i $\mathcal{V}$ još jedan karakter simetrične grupe, a njegove vrijednosti možemo izračunati na osnovu $\mathcal{V}(g) = |fix(g)| - 1$, $g \in S_n$. Vrijednosti ova dva karaktera biće prikazane u tabeli 5, gdje će karakter $\mathcal{V}$ biti označen sa $\chi_3$.

Tabela 5: Permutacioni karakter

| $Klase$ | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | 7 | 5 | 3 | 1 | 4 | 2 | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $\chi_3$ | 6 | 4 | 2 | 0 | 3 | 1 | -1 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 |

Na osnovu teoreme 5.3 pod 2, možemo izračunati skalarni proizvod dva karaktera. Imamo da je

$$\langle\chi_3,\chi_3\rangle = \frac{6\cdot 6}{5040}+\frac{4\cdot 4}{240}+\frac{2\cdot 2}{48}+\frac{0\cdot 0}{48}+\frac{3\cdot 3}{72}+\frac{1\cdot 1}{12}+\frac{(-1)\cdot(-1)}{24}+\frac{0\cdot 0}{9}+$$
$$\frac{2\cdot 2}{24}+\frac{0\cdot 0}{8}+\frac{(-1)\cdot(-1)}{12}+\frac{1\cdot 1}{10}+\frac{(-1)\cdot(-1)}{10}+\frac{0\cdot 0}{6}+\frac{(-1)\cdot(-1)}{7}=$$
$$\frac{1}{140}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{7}=1.$$

Kako je $\langle\chi_3,\chi_3\rangle = 1$, to je na osnovu teoreme 5.6 karakter $\chi_3$ ireducibilan, što ne važi za karakter $\pi$.

Pomnožimo sada karakter $\chi_3$ sa linearnim karakterom $\chi_2$. Na osnovu teoreme 5.16 znamo da je njihov proizvod karakter, a da je ireducibilan možemo provjeriti skalarno množeći taj proizvod sa samim sobom. Drugi način da zaključimo da je ovaj proizvod ireducibilan karakter je pozivajući se direktno na teoremu 5.11. Karakter $\chi_3\chi_2$ ćemo označiti sa $\chi_4$.

Izračunajmo dalje karaktere $\chi_S$ i $\chi_A$ iz teoreme 5.20. Podsjetimo se da za $g\in S_7$ vrijedi

$$\chi_A(g)=\frac{1}{2}(\chi^2(g)-\chi(g^2)),\text{ i}$$
$$\chi_S(g)=\frac{1}{2}(\chi^2(g)+\chi(g^2)).$$

Neka je u našem slučaju $\chi=\chi_3$.

Imamo npr., da za $g=g_1=1$ vrijedi

$$\chi_A(1)=\frac{1}{2}(\chi^2(1)-\chi(1^2))=\frac{1}{2}(6^2-6)=15,$$
$$\chi_S(1)=\frac{1}{2}(\chi^2(1)+\chi(1^2))=\frac{1}{2}(6^2+6)=21,$$

a za $g=g_2=(12)(3)(4)(5)(6)(7)$, kako je $g_2^2=1=g_1$, vrijedi

$$\chi_A(g_2)=\frac{1}{2}(\chi^2(g_2)-\chi(g_2^2))=\frac{1}{2}(4^2-6)=\frac{1}{2}(16-6)=5$$
$$\chi_S(g_2)=\frac{1}{2}(\chi^2(g_2)+\chi(g_2^2))=\frac{1}{2}(4^2+6)=11.$$

Analogno se računaju i ostale vrijednosti koje se mogu vidjeti u tabeli 6.

Izračunavajući skalarni proizvod $\langle\chi_A,\chi_A\rangle$ i dobijajući da je $\langle\chi_A,\chi_A\rangle=1$, vidimo da je karakter $\chi_A$

Tabela 6: Karakteri $\chi_A$ i $\chi_S$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_A$ | 15 | 5 | -1 | -3 | 3 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\chi_S$ | 21 | 11 | 5 | 3 | 6 | 2 | 2 | 0 | 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

ireducibilan. Skalarni proizvod $\langle\chi_S,\chi_S\rangle = 3$, pa ovaj karakter nije ireducibilan.

Na isti način na koji smo dobili ireducibilni karakter $\chi_4$ kao proizvod karaktera $\chi_3$ i $\chi_2$, može se pokazati da je proizvod $\chi_5\chi_2$ takođe ireducibilan karakter grupe $S_7$.

U tabeli 14 karakter $\chi_A$ biće označen sa $\chi_5$, a karakter $\chi_A\chi_2$ sa $\chi_6$. Karakter $\chi_S$ nije ireducibilan, ali nam možda može biti od koristi. Provjerimo to množenjem sa već postojećim karakterima. Vrijedi

$$\langle\chi_S,\chi_1\rangle = 1,\ \langle\chi_S,\chi_2\rangle = 0,\ \langle\chi_S,\chi_3\rangle = 1,$$

$$\langle\chi_S,\chi_4\rangle = 0,\ \langle\chi_S,\chi_5\rangle = 0,\ \langle\chi_S,\chi_6\rangle = 0.$$

Iz toga možemo zaključiti da je karakter $\chi_S$ jednak zbiru karaktera $\chi_1$, $\chi_3$ i nekog karaktera koji ćemo označiti sa $\chi_7$. Vrijednosti karaktera $\chi_7$ ćemo dobiti oduzimanjem karaktera, tj.

$$\chi_7 = \chi_S - \chi_1 - \chi_3.$$

Vrijednosti ovog karaktera se nalaze u tabeli 7, kao i narednog koji ćemo označiti sa $\chi_8$. Provjeravajući da je $\langle\chi_7,\chi_7\rangle = 1$, zaključujemo da je karakter $\chi_7$ ireducibilan. Karakter $\chi_8$ dobijamo primjenjujući teoremu 5.11 da zaključimo da je i $\chi_7\chi_2$ takođe ireducibilan karakter.

Tabela 7: Karakteri $\chi_7$ i $\chi_8$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_7$ | 14 | 6 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 |
| $\chi_8$ | 14 | -6 | 2 | -2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 |

Pogledajmo sada kako se traže karakteri koji odgovaraju permutacijama koje se sastoje od dva ciklusa, o kojima je bilo riječi u poglavlju 5.6.

Pogledajmo prvo kako se računa karakter $\chi^{4,3}$. Na osnovu teoreme 5.28 imamo da je

$$\chi^{(n-k,k)} = \pi_k - \pi_{k-1}.$$

U našem slučaju to je

$$\chi^{(4,3)}((1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$\pi_3((1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)) - \pi_2((1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$|I_3| - |I_2| = \binom{7}{3} - \binom{7}{2} = 35 - 21 = 14.$$

Pogledajmo sada šta je $\chi^{(4,3)}(g_2)$, gdje je $g_2 = (12)(3)(4)(5)(6)(7)$.

$$\chi^{(4,3)}((12)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$\pi_3((12)(3)(4)(5)(6)(7)) - \pi_2((12)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$|fix_{I_3}((12)(3)(4)(5)(6)(7))| - |fix_{I_2}((12)(3)(4)(5)(6)(7))|.$$

Skup $I_3$ je

$$I_3 = \{123, 124, 125, 126, 127, 134, 135, 136, 137, 145, 146, 147, 156, 157, 167,$$
$$234, 235, 236, 237, 245, 246, 247, 256, 257, 267, 345, 346, 347, 356, 357, 367,$$
$$456, 457, 467, 567\}.$$

Elementi skupa $I_3$ koje fiksira permutacija $(12)(3)(4)(5)(6)(7)$ su:
$123, 124, 125, 126, 127, 345, 346, 347, 356, 357, 367, 456, 457, 467, 567$. Ima ih 15, pa je

$$|fix_{I_3}((12)(3)(4)(5)(6)(7))| = 15.$$

Skup $I_2$ čine

$$I_2 = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 27, 34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67\}.$$

Elementi skupa $I_2$ koje fiksira permutacija $(12)(3)(4)(5)(6)(7)$ su:
$12, 34, 35, 36, 37, 45, 46, 47, 56, 57, 67$. Ima ih 11, pa je
$|fix_{I_2}((12)(3)(4)(5)(6)(7))| = 11$. Iz toga dobijamo da je

$$\chi^{(4,3)}((12)(3)(4)(5)(6)(7)) = 15 - 11 = 4.$$

Slično dobijamo i naredne rezultate:

$$\chi^{(4,3)}((12)(34)(5)(6)(7)) = \pi_3((12)(34)(5)(6)(7)) - \pi_2((12)(34)(5)(6)(7)) =$$
$$|fix_{I_3}((12)(34)(5)(6)(7))| - |fix_{I_2}((12)(34)(5)(6)(7))| = 7 - 5 = 2,$$
$$\chi^{(4,3)}((12)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$\pi_3((12)(3)(4)(5)(6)(7)) - \pi_2((12)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$|fix_{I_3}((12)(34)(56)(7))| - |fix_{I_2}((12)(34)(56)(7))| = 3 - 3 = 0,$$
$$\chi^{(4,3)}((123)(4)(5)(6)(7)) = \pi_3((123)(4)(5)(6)(7)) - \pi_2((123)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$|fix_{I_3}((123)(4)(5)(6)(7))| - |fix_{I_2}((123)(4)(5)(6)(7))| = 5 - 6 = -1.$$

Analogno se dobijaju i ostali elementi koje možete pogledati u tabeli 8. Kako je $\langle \chi^{(4,3)}, \chi^{(4,3)} \rangle = 1$, ovaj karakter je ireducibilan. Karakter $\chi^{(4,3)}$ ćemo označiti sa $\chi_9$, a ireducibilni karakter koji se dobije kao proizvod $\chi^{(4,3)}\chi_2$ označićemo sa $\chi_{10}$.

Tabela 8: Karakteri $\chi_9$ i $\chi_{10}$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_9$ | 14 | 4 | 2 | 0 | -1 | 1 | -1 | 2 | -2 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_{10}$ | 14 | -4 | 2 | 0 | -1 | -1 | -1 | 2 | 2 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |

Pogledajmo sada kako se računa $\chi^{(5,2)}$. Imamo da je:

$$\chi^{(5,2)}((1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$\pi_2((1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)) - \pi_1((1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$|I_2| - |I_1| = \binom{7}{2} - \binom{7}{1} = 21 - 7 = 14,$$
$$\chi^{(5,2)}((12)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$\pi_2((12)(3)(4)(5)(6)(7)) - \pi_1((12)(3)(4)(5)(6)(7)) =$$
$$|fix_{I_2}((12)(3)(4)(5)(6)(7))| - |fix_{I_1}((12)(3)(4)(5)(6)(7))| = 11 - 5 = 6,$$

$$\chi^{(5,2)}((12)(34)(5)(6)(7)) =$$
$$\pi_2((12)(34)(5)(6)(7)) - \pi_1((12)(34)(5)(6)(7)) =$$
$$|fix_{I_3}((12)(34)(5)(6)(7))| - |fix_{I_2}((12)(34)(5)(6)(7))| = 5 - 3 = 2,$$
$$\chi^{(5,2)}((12)(34)(56)(7)) =$$
$$\pi_2((12)(34)(56)(7)) - \pi_1((12)(3)(45)(67)) =$$
$$|fix_{I_3}((12)(34)(56)(7))| - |fix_{I_2}((12)(34)(56)(7))| = 3 - 1 = 2, \text{ itd.}$$

Daljim računanjem dobijemo karakter koji je jednak karakteru $\chi_7$.

Karakter $\chi^{(6,1)}$ se računa slično prethodnim, a ispostavlja se da je jednak karakteru $\chi_3$.
Preostalo nam je da pronađemo još pet karaktera. Pogledajmo kako za nalaženje novih karaktera možemo iskoristiti ono što je već nađeno.
Ako pomnožimo karakter $\chi_4$ sa $\chi_8$ dobićemo karakter prikazan u tabeli 9, koji ćemo označiti sa $\psi$.

Tabela 9: Karakter $\chi_4\chi_8$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|C_G(g_i)\|$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |
| $\psi$ | 84 | 24 | 4 | 0 | 6 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 |

Ovaj karakter nije ireducibilan, jer je $\langle\psi,\psi\rangle \neq 1$. Pogledajmo kakav je on u odnosu na druge karaktere. Vrijedi

$$\langle\psi,\chi_1\rangle = 0,\ \langle\psi,\chi_2\rangle = 0,\ \langle\psi,\chi_3\rangle = 1,\ \langle\psi,\chi_4\rangle = 0,\ \langle\psi,\chi_5\rangle = 1,\ \langle\psi,\chi_6\rangle = 0,$$

$$\langle\psi,\chi_7\rangle = 1,\ \langle\psi,\chi_8\rangle = 0,\ \langle\psi,\chi_9\rangle = 1,\ \langle\psi,\chi_{10}\rangle = 0.$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$\psi = \chi_3 + \chi_5 + \chi_7 + \chi_9 + \chi_{11},$$

gdje je $\chi_{11}$ neki karakter. Odavde je

$$\chi_{11} = \psi - \chi_3 + \chi_5 + \chi_7 + \chi_9.$$

Njegove vrijednosti mogu se pogledati u tabeli 10. Množeći skalarno ovaj karakter sa samim sobom dobijamo rezultat 1, pa je ovo ireducibilan karakter. Množeći ovaj karakter sa $\chi_2$ dobijamo

Tabela 10: Karakteri $\chi_{11}$ i $\chi_{12}$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |
| $\chi_{11}$ | 35 | 5 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\chi_{12}$ | 35 | -5 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |

ireducibilan karakter koji ćemo označiti sa $\chi_{12}$, čije se vrijednosti mogu vidjeti u tabeli 10. Pomnožimo sada $\chi_4$ sa $\chi_{10}$. Karakter koji se na taj način dobije prikazan je u tabeli 11, a označićemo ga sa $\psi_1$.

Tabela 11: Karakter $\chi_4\chi_{10}$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |
| $\psi_1$ | 84 | 16 | 4 | 0 | -3 | 1 | 1 | 0 | -4 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |

Provjeravajući da je $\langle\psi_1,\psi_1\rangle \neq 1$, zaključujemo da ovaj karakter nije ireducibilan. Pogledajmo kakav je ovaj karakter u odnosu na druge karaktere. Vrijedi

$$\langle\psi_1,\chi_1\rangle = 0,\ \langle\psi_1,\chi_2\rangle = 0,\ \langle\psi_1,\chi_3\rangle = 0,\ \langle\psi_1,\chi_4\rangle = 0,$$

$$\langle\psi_1,\chi_5\rangle = 0,\ \langle\psi_1,\chi_6\rangle = 0,\ \langle\psi_1,\chi_7\rangle = 1,\ \langle\psi_1,\chi_8\rangle = 0,$$

$$\langle\psi_1,\chi_9\rangle = 1,\ \langle\psi_1,\chi_{10}\rangle = 0,\ \langle\psi_1,\chi_{11}\rangle = 1,\ \langle\psi_1,\chi_{12}\rangle = 0.$$

Iz ovoga zaključujemo da je

$$\psi_1 = \chi_7 + \chi_9 + \chi_{11} + \chi_{13},$$

gdje je $\chi_{13}$ neki karakter. Odavde je

$$\chi_{13} = \psi_1 - \chi_7 + \chi_9 + \chi_{11}.$$

Vrijednosti ovog karaktera mogu se pogledati u tabeli 12. Kako je $\langle\chi_{13},\chi_{13}\rangle = 1$, ovo je ireducibilan karakter. Množeći ovaj karakter sa $\chi_2$ dobijamo ireducibilan karakter $\chi_2\chi_{13}$, koji ćemo označiti sa $\chi_{14}$, a njegove vrijednosti se mogu vidjeti u tabeli 12.

Preostalo nam je da pronađemo još jedan karakter. Iskoristićemo relacije ortogonalnosti za kolone. Kao prvo označimo traženi karakter sa $\chi_{15}$, a njegove vrijednosti označimo kao u tabeli 13, u kojoj

Tabela 12: Karakteri $\chi_{13}$ i $\chi_{14}$

| $Klase$ | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |
| $\chi_{13}$ | 21 | 1 | 1 | -3 | -3 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\chi_{14}$ | 21 | -1 | 1 | 3 | -3 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |

Tabela 13: Oznake nepoznatih vrijednosti karaktera $\chi_{15}$

| $Klase$ | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 6 | 4 | 2 | 0 | 3 | 1 | -1 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 |
| $\chi_4$ | 6 | -4 | 2 | 0 | 3 | -1 | -1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 |
| $\chi_5$ | 15 | 5 | -1 | -3 | 3 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\chi_6$ | 15 | -5 | -1 | 3 | 3 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\chi_7$ | 14 | 6 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 |
| $\chi_8$ | 14 | -6 | 2 | -2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| $\chi_9$ | 14 | 4 | 2 | 0 | -1 | 1 | -1 | 2 | -2 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_{10}$ | 14 | -4 | 2 | 0 | -1 | -1 | -1 | 2 | 2 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $\chi_{11}$ | 35 | 5 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\chi_{12}$ | 35 | -5 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $\chi_{13}$ | 21 | 1 | 1 | -3 | -3 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\chi_{14}$ | 21 | -1 | 1 | 3 | -3 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_{15}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $x_{15}$ |

se nalaze i ostali, već izračunati karakteri. Sve se nalazi u jednoj tabeli radi bolje preglednosti za dalje računanje.

Na osnovu teoreme 5.9 pod 2, imamo da je

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|,$$

što predstavlja relacije ortogonalnosti za kolone. Za $r = 1$ i $s = 1$ imamo da je

$$1\cdot 1+1\cdot 1+6\cdot 6+6\cdot 6+15\cdot 15+15\cdot 15+14\cdot 14+14\cdot 14+14\cdot 14+$$
$$14\cdot 14+35\cdot 35+35\cdot 35+21\cdot 21+21\cdot 21+x_1\cdot x_1 = 5040.$$

Na osnovu navedenog imamo da je $x_1^2 = 5040-4640 = 400$, pa je $x_1 = 20$.

Za $r = 1$ i $s = 2$ je

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 4 + 6 \cdot (-4) + 15 \cdot 5 + 15 \cdot (-5) + 14 \cdot 6 + 14 \cdot (-6) +$$
$$14 \cdot 4 + 14 \cdot (-4) + 35 \cdot 5 + 35 \cdot (-5) + 21 \cdot 1 + 21 \cdot (-1) + x_1 \cdot x_2 = 0.$$

Imamo da je $x_1 \cdot x_2 = 0$, a kako je $x_1 = 20$ dobijamo da je $x_2 = 0$.

Za dobijanje naredne vrijednosti možemo uzeti da je $r = 1$ i $s = 3$ ili $r = 2$ i $s = 3$ i sumu proizvoda izjednačiti sa 0, ili uzeti da je $r = 3$ i $s = 3$ i sumu proizvoda izjednačiti sa 48. U svakom slučaju, dobićemo rezultat $x_3 = -4$.

Na sličan način dobijamo i ostale vrijednosti karaktera $\chi_{15}$ koje se mogu naći u tabeli 14.

U tabeli 14 su prikazani svi ireducibilni karakteri grupe $S_7$ čime je zadatak završen.

Tabela 14: Kompletna tabela karaktera grupe $S_7$

| *Klase* | (1) | (2) | (2,2) | (2,2,2) | (3) | (3,2) | (3,2,2) | (3,3) | (4) | (4,2) | (4,3) | (5) | (5,2) | (6) | (7) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert C_G(g_i)\rvert$ | 5040 | 240 | 48 | 48 | 72 | 12 | 24 | 9 | 24 | 8 | 12 | 10 | 10 | 6 | 7 |
| $\chi_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\chi_2$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| $\chi_3$ | 6 | 4 | 2 | 0 | 3 | 1 | -1 | 0 | 2 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | -1 |
| $\chi_4$ | 6 | -4 | 2 | 0 | 3 | -1 | -1 | 0 | -2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | -1 |
| $\chi_5$ | 15 | 5 | -1 | -3 | 3 | -1 | -1 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\chi_6$ | 15 | -5 | -1 | 3 | 3 | 1 | -1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\chi_7$ | 14 | 6 | 2 | 2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 |
| $\chi_8$ | 14 | -6 | 2 | -2 | 2 | 0 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| $\chi_9$ | 14 | 4 | 2 | 0 | -1 | 1 | -1 | 2 | -2 | 0 | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_{10}$ | 14 | -4 | 2 | 0 | -1 | -1 | -1 | 2 | 2 | 0 | -1 | -1 | 1 | 0 | 0 |
| $\chi_{11}$ | 35 | 5 | -1 | 1 | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\chi_{12}$ | 35 | -5 | -1 | -1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| $\chi_{13}$ | 21 | 1 | 1 | -3 | -3 | 1 | 1 | 0 | -1 | -1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\chi_{14}$ | 21 | -1 | 1 | 3 | -3 | -1 | 1 | 0 | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| $\chi_{15}$ | 20 | 0 | -4 | 0 | 2 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 |

Napomenimo da se tabela karaktera može dobiti uz pomoć funkcije u GAP-u.

GAP je skraćenica od Groups, Algorithms and Programming. GAP je besplatni softverski paket za proračune u diskretnoj, apstraktnoj algebri. On je otvoren za izmjene i u njemu se mogu pisati sopstveni programi, koji se mogu koristiti na isti način kao oni koji čine dio sistema.

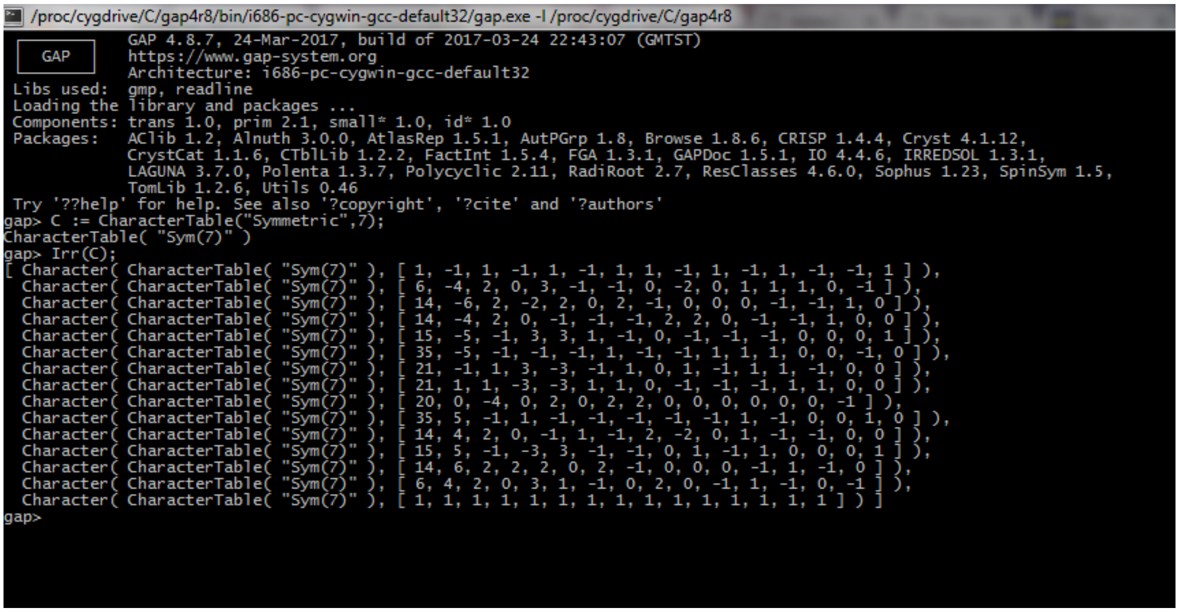
Ako u GAP-u kucamo:

$C := CharacterTable(”Symmetric”, 7);$,

a zatim:

$Irr(C);$,

dobijamo tabelu karaktera kao što je prikazano na slici 1.




Slika 1: Izgled tabele karaktera grupe $S_7$ u GAP-u

# 7 Zaključak

Postoji više načina da se izračuna tabela karaktera neke konačne grupe. Postoje još neke metode i pristupi koji se mogu koristiti za rješavanje ovog problema, a koji nisu navedeni u ovom radu. Više o tome može se naći u knjigama navedenim u literaturi.

Kada pokušavamo naći tabelu karaktera neke konačne grupe, prvo upotrebimo teoreme i formule koje nam direktno uvrštavajući određene vrijednosti daju karaktere. Naravno linearni karakteri su ireducibilni, a za ostale možemo vrlo lako provjeriti da li su ireducibilni, tražeći skalarni proizvod karaktera sa samim sobom. Ako je vrijednost skalarnog proizvoda 1, karakter je ireducibilan i možemo ga dodati kao još jednu vrstu u tabeli karaktera, a ako nije, onda možemo pokušati da iz njega dobijemo neki ireducibilni karakter, oduzimajući od njega neke od već poznatih karaktera. Da bi znali koje karaktere oduzimamo i koliko puta, koristimo ponovo skalarni proizvod karaktera, a broj koji dobijemo kao rezultat skalarnog množenja, daje nam odgovor na ovo pitanje.

Što je tabela popunjenija i što nam je poznato više ireducibilnih karaktera, lakše nam je naći preostale. Koristimo tenzorski proizvod karaktera da dobijemo nove od već postojećih karaktera, zatim ispitujemo njihovu ireducibilnost i u slučaju da dobijeni karakter nije ireducibilan, tada kao u prethodnom slučaju od njega oduzimamo neke već poznate karaktere na osnovu podataka koje nam daje skalarni proizvod novodobijenog karaktera i već postojećih. Tim procesom, uz malo sreće, možemo dobiti karakter koji je ireducibilan. Može se desiti da je taj dobijeni ireducibilni karakter, jednak nekom već poznatom, pa u tom slučaju proces ponavljamo za neke druge karaktere i njihov tenzorski proizvod u potrazi za novim karakterom, različitim od već izračunatih.

Kada kompletiramo tabelu karaktera, možemo je koristiti za dobijanje mnogih svojstava grupe čija je ona tabela karaktera.

# Literatura


[1] David S. Dummit, Richard M. Foote: *Abstract Algebra*. University of Vermont, John Wiley and Sons, Inc. New York, Third Edition, 2004.

[2] William Fulton, Joe Harris: *Representation Theory: A First Course (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1991.

[3] Thomas W. Hugerford: *(Graduate Texts in Mathematics) Algebra*. Springer-Verlag New York, Inc., 1974.

[4] Gordon James, Adalbert Kerber: *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[5] Gordon James, Martin Liebeck: *Representations and Characters of Grups*. Cambrige University Press, 2003.

[6] Milan Janjić: *Linearna algebra*. Prirodno-matematički fakultet u Banjoj Luci, 2003.

[7] Milan Janjić, Duško Bogdanić: *Uvod u algebru*. Prirodno-matematički fakultet u Banjoj Luci, 2012.

[8] Duško Jojić: *Elementi enumerativne kombinatorike*. Naša knjiga, 2011.

[9] John S. Rose: *A Course on Group Theory*. Courier Corporation, 2013.

[10] The GAP Group: *GAP - Reference Manual*, https://www.gap-system.org/

**Biografija**

Jovanka Đukanović rođena je 19.04.1986. u Bijeljini. Godine 2005. završila je gimnaziju "Filip Višnjić" u Bijeljini. Iste godine upisala je Prirodno-matematički fakultet u Banjoj Luci, odsjek Matematika i informatika, nastavni smjer. Četverogodišnje osnovne studije je završila u oktobru 2010. godine sa prosječnom ocjenom 8,56 i stekla zvanje profesor matematike i informatike. Master studije je upisala 2013. godine, smjer Algebra i geometrija. Na master studiju položila je ispite sa prosječnom ocjenom 9,2.

Od 2010. godine bila je zaposlena u Građevinskoj školi u Banjoj Luci kao profesor matematike, a od 2012. godine u Elektrotehničkoj školi "Nikola Tesla" u Banjoj Luci, gdje i trenutno radi.

**Прилог 3.**

**Изјава 1**

**ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ**

**Изјављујем да је**
**мастер/магистарски рад**

Наслов рада Карактери коначних група

Наслов рада на енглеском језику Characters of finite Groups

- □ резултат сопственог истраживачког рада,
- □ да мастер/магистарски рад, у цјелини или у дијеловима, није био предложен за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- □ да су резултати коректно наведени и
- □ да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Бањој Луци 2. 4. 2018. год.

Потпис кандидата

[signature]

Изјава 2

**Изјава којом се овлашћује ПМФ факултет/ Академија умјетности Универзитета у Бањој Луци да мастер/магистарски рад учини јавно доступним**

Овлашћујем ПМФ факултет/ Академију умјетности Универзитета у Бањој Луци да мој мастер/магистарски рад, под насловом

Карактери Монатних Група

који је моје ауторско дјело, учини јавно доступним.

Мастер/магистарски рад са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Мој мастер/магистарски рад, похрањен у дигитални репозиториј ум Универзитета у Бањој Луци, могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице *(Creative Commons)*, за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство - некомерцијално - без прераде
4. Ауторство - некомерцијално - дијелити под истим условима
5. Ауторство - без прераде
6. Ауторство - дијелити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Бањој Луци 2.4.2018. год.

Потпис кандидата

ЈЈовановић

**Изјава 3**

**Изјава о идентичности штампане и електронске верзије мастер/магистарског рада**

Име и презиме аутора Јованка Зубановић

Наслов рада Карактери коначних група

Ментор проф. др Душко Богдановић

Изјављујем да је штампана верзија мог мастер/магистарског рада идентична електронској верзији коју сам предао/ла за дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци.

У Бањој Луци 2. 4. 2018. год.

Потпис кандидата

6.

**Комисија за преглед, оцјену и одбрану мастер рада на II циклусу студија**

Др Душко Јојић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Бањој Луци, предсједник
Др Душко Богданић, ванредни професор ПМФ-а Универзитета у Бањој Луци, ментор
Др Милан Јањић, редовни професор ПМФ-а Универзитета у Бањој Луци, члан

Одлуком Наставно-научног вијећа Природно-математичког факултета у Бањој Луци број-- ***19/3.2472/17*** од ***13.09.2017.*** године именовани смо у Комисију за преглед, оцјену и одбрану мастер рада кандидата Јованке Ђукановић под насловом "Карактери коначних група". Након прегледа достављеног мастер рада подносимо

**ВИЈЕЋУ СТУДИЈСКОГ ПРОГРАМА
МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

**НАСТАВНО-НАУЧНОМ ВИЈЕЋУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА
УНИВЕРЗИТЕТА У БАЊОЈ ЛУЦИ**

# ИЗВЈЕШТАЈ

о оцјени урађеног мастер рада "Карактери коначних група" кандидаткиње Јованке Ђукановић.

Мастер рад кандидаткиње Јованке Ђукановић је урађен у оквиру II циклуса студија на студијском програму Математика и информатика, смјер Алгебра и геометрија. Рад је написан на 42 странице А4 формата штампаних једнострано и укоричених у тврди повез.

## Анализа мастер рада по поглављима

У "Уводу", првој глави рада, кандидаткиња на двије странице говори о значају репрезентација и карактера коначних група и о њиховим примјенама у математици и физици.

Друга глава "Репрезентације" има двије странице. У том поглављу кандидаткиња описује основне појмове из теорије репрезентација (репрезентције, еквивалентне репрезентације, тривијалне репрезентације, вјеродостојне репрезентације) који се користе у овом раду. Дати су и примјери који илуструју уведене појмове.

У трећој гглави "FG-модули", на три странице је уведен појам модула над групном алгебром FG, гдје је G коначна група, а F произвољно поље, и дате су његове основне особине. Објашњена је веза између појмова репрезентације и модула. Разматрани су и појмови хомоморфизма модула, иредуцибилних модула, вјеродостојних и тривијалних модула.

У четвртој глави "Помоћна тврђења и дефиниције", на двије странице су изложене дефиниције и тврђења из елементарне алгебре, односно теорије група и линеарне алгебре, која су потребна при дефинисању и рачунању карактера коначних група. Дефинисан је тип пермутације, централизатор елемента, а дата је и теорема о орбити и централизатору елемента у коначној групи.

"Карактери" је назив пете главе која има седамнаест страница. У овој глави се наводе бројни резултати који нам служе за конструисање иредуцибилних карактера за симетричне групе. Дефинисани су пермутациони карактери за произвољну симетричну групу. Уведен је скаларни производ на простору класних функција, и специјално, на скупу карактера. Потом су уведене релације ортогоналности које су један од основних алата за попуњавање табеле карактера, односно за комплетирање колона или редова табеле карактера. Оне нам дају везу између различитих врста и колона табеле карактера. Затим су описани линеарни карактери симетричних група, између осталог, тривијални и алтернирајући карактер. На крају поглавља је конструисан тензорски производ карактера и објашњен је значај ове конструкције, те су конструисани неки иредуцибилни карактери за симетричне групе произвољног реда.

"Табела карактера симетричне групе $S_7$" је назив посљедње главе која има једанаест страница. У овој глави су примијењени сви методи за рачунање карактера презентовани у претходним поглављима. У потпуности је израчуната табела карактера симетричне групе над 7 слова. Ова табела је формата 15 пута 15, па је укупно израчунато 15 простих карактера на 15 класа конјугације.

На крају рада се налази "Закључак" са кратким прегледом цијелог рада, и "Литература" са 10 референци.

**Оцјена научне вриједности рада**

Комисија констатује да је мастер рад испунио све циљеве постављене приликом пријављивања теме. Кандидаткиња је показала способност да разумије и усвоји савремене и софистициране идеје у теорији репрезентација коначних група. Користећи најновију литературу кандидат може да прати како се нове идеје могу искористити у рјешавању тешких и познатих проблема. Кандидат Јованка Ђукановић је успјешно урадила мастер рад са насловом "Карактери коначних група".

**Закључак и приједлог**

Комисија предлаже Наставно-научном вијећу Природно-математичког факултета у Бањој Луци да усвоји овај извјештај и позитивну оцјену мастер рада, и да по предвиђеној процедури закаже јавну одбрану јер су се за то стекли сви потребни научни и законски услови.

У Бањој Луци,
16.3.2018. године

КОМИСИЈА

Др Душко Јојић, ванредни професор ПМФ-а
Универзитета у Бањој Луци, предсједник
ужа научна област: Алгебра и Геометрија

Др Душко Богданић, ванредни професор ПМФ-а
Универзитета у Бањој Луци, ментор
ужа научна област: Алгебра и Геометрија

Др Милан Јањић, редовни професор ПМФ-а
Универзитета у Бањој Луци, члан
ужа научна област: Алгебра и Геометрија