



УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Душан Бајовић

Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Бања Лука, 2025. године



UNIVERSITY OF BANJA LUKA
FACULTY OF NATURAL SCIENCES
AND MATHEMATICS



Dušan Bajović

Iterative sequences and fixed points in generalized metric spaces

DOCTORAL DISSERTATION

Banja Luka, 2025.

Информације о ментору и дисертацији

Ментор:

Др Зоран Митровић, редовни професор
Универзитет у Бањој Луци, Електротехнички факултет

Наслов докторске дисертације:

Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима

Резиме:

У овој дисертацији истражујемо услове за које постоји јединствена фиксна тачка разних врста контракција у метричким просторима и генерализацијама метричких простора. Текст дисертације подијељен је у пет поглавља. У првој и другој глави дат је преглед основних појмова и тврђена везаних за метричке просторе. Детаљно су изложени кључни резултати теорије фиксне тачке, бројне модификације и нови резултати добијени за уопштене Харди-Роџерс контракције у метричким просторима. У наставку износимо преглед разноврсних генерализација метричког простора и представљамо новије резултате добијене у оквиру теорије фиксне тачке. Посебан осврт је дат на b -метричке просторе јер је већина резултата у дисертацији добијена у истраживању наведене генерализације.

У трећој глави дајемо процјену растојања $d(x_n, x^*)$ за низ $\{x_n\}$ у b -метричком простору који испуњава контрактивни услов $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$, за свако $n \in \mathbb{N}$, гдје је $\lambda \in (0, 1)$.

У четвртој глави уводимо слабе контракције и слабе φ -контракције. Успостављамо везу са осталим врстама контракција и испитујемо услове под којим постоји јединствена фиксна тачка. У другом дијелу дефинишемо слабе полиномске контракције као проширење слабих контракција и доказујемо теореме Јунговог типа у b -метричким просторима.

У петој глави је детаљно уведен појам F контракција и дата су резултати за F контракције у метричком простору у оквиру интерполативних проширених контракција Геретија, Харди-Роџерса, Руса и Тирића. Даље су уведене (s, q, ϕ, F) контракције и $(s, q, \phi, F) - g$ слабе контракције у slabим b -метричким просторима, при чему је доказано да за таква пресликавања постоји јединствена фиксна тачка.

Кључне ријечи: итеративни низови, генерализовани метрички простори, фиксна тачка, полиномске контракције, F -контракције.

Научна област: Математика

Научно поље: Математичка анализа и примјене

Класификациона ознака: P001

Тип одабране лиценце Креативне заједнице: CC BY-NC-ND

Information about mentor and dissertation

Mentor:

Dr Zoran Mitrović, full professor

University of Banja Luka, Faculty of Electrical Engineering

Title of doctoral dissertation:

Iterative sequences and fixed points in generalized metric spaces

Abstract:

In this dissertation, we investigate the conditions under which there exists a unique fixed point of various types of contractions in metric spaces and their generalizations. The text of the dissertation is divided into five chapters. In the first and second chapters, we provide an overview of the fundamental concepts and statements related to metric spaces. The key results of fixed point theory are presented in detail, together with numerous modifications and new results obtained for generalized Hardy–Rogers contractions in metric spaces. Furthermore, we present a survey of different generalizations of metric spaces and introduce recent results obtained within the framework of fixed point theory. Special attention is given to b -metric spaces, since the majority of the results in the dissertation were derived in the investigation of this generalization.

In the third chapter, we provide estimates of the distance $d(x_n, x^*)$ for a sequence $\{x_n\}$ in a b -metric space satisfying the contractive condition $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$, for all $n \in \mathbb{N}$, where $\lambda \in (0, 1)$.

In the fourth chapter, we introduce weak contractions and weak φ -contractions. We establish their connections with other types of contractions and examine the conditions under which a unique fixed point exists. In the second part, we define weak polynomial contractions as an extension of weak contractions and prove Jungck-type theorems in b -metric spaces.

In the fifth chapter, the notion of F -contractions is introduced in detail, and results for F -contractions in metric spaces are presented within the framework of interpolative extended contractions of Geraghty, Hardy-Rogers, Rus, and Ćirić. Furthermore, we introduce (s, q, ϕ, F) -contractions and (s, q, ϕ, F) - g weak contractions in b -metric-like spaces, and it is shown that such mappings admit a unique fixed point.

Keywords: iterative sequences, generalized metric spaces, fixed point, polynomial contraction, F -contraction.

Scientific area: Mathematics

Scientific field: Mathematical analysis and applications

Classification code: P001

Creative Commons license type: CC BY-NC-ND

Захвалница

Прије свега захваљујем се свом ментору, проф. др Зорану Митровићу, на несебичној подршци и стрпљењу. Његове стручне сугестије и усмјерења били су од непроцјењивог значаја у обликовању мог истраживања и академског развоја.

Захваљујем члановима комисије проф. др Мирославу Пранићу, проф. др Милошу Арсеновићу и др Борису Петковићу који су својим савјетима и примједбама допринијели квалитету дисертације. Захвалност дугујем пријатељима и колегама на разумијевању и потпори коју су ми пружали током истраживања.

Најдубљу захвалност упућујем својој породици, која је својим бескрајним стрпљењем, љубављу и охрабрењем била мој највећи ослонац.

Душан Бајовић
Септембар, 2025.
Бања Лука

Без преданости, никада нећете почети.
Без досљедности, никада нећете завршити.

Садржај

Увод	1
1 Метрички простори и генерализације	3
1.1 Метрички простори	3
1.2 Генерализације метричког простора	7
1.2.1 b -метрички простори	10
1.2.2 Слаби b -метрички простори	17
2 Итеративни низови и фиксне тачке	21
2.1 Метричка теорија фиксне тачке	21
2.1.1 Проширење Харди-Роџерс контракције	34
2.1.2 Фиксна тачка у b -метричким просторима	37
3 Процјене растојања и критеријуми конвергенције	39
3.1 Процјене у b -метричким просторима	44
4 Полиномске контракције	51
4.1 Слабе контракције	51
4.2 Полиномске контракције у b -метричким просторима	60
5 F-контракције	70
5.1 Проширене F -контракције у метричким просторима	74
5.2 Проширене F -контракције у слабир b -метричким просторима	83
5.2.1 Примјена на рјешавање интегралне једначине	93

Закључак	96
Литература	97
Биографија аутора	111

Увод

Појам удаљености у математици посматрао се много прије него што је уведена апстрактна дефиниција метрике. У еуклидској геометрији удаљеност између тачака схватала се као дужина дужи која их спаја, док је неједнакост троугла посматрана као основно својство дужи у троуглу. Тек у 19. вијеку удаљеност добија систематску улогу у анализи и геометрији, најприје код Кошија (1821), који користи $|x - y|$ за формализацију границе и конвергенције на $\mathbb{R}$ [1]. Риман (1854, објављено 1868) уводи метрички тензор као средство за дефинисање удаљености интеграцијом дуж геодетских кривих, отварајући пут нееуклидским геометријама [2]. Белтрами (1868) и Клајн (1871–73) разрађују хиперболичке моделе, а Поенкаре (1882–1884) систематизује диск и полураван с хиперболичком метриком [3–5].

Примјећујемо да је идеја удаљености, иако увијек везана за конкретне структуре, била предмет интензивног истраживања много прије рада Фрешеа (1906), који је дао кључни допринос увођењем апстрактне дефиниције метрике кроз аксиоме [6]. У својој докторској дисертацији Фреше није користио термин метрички простор, већ је говорио о просторима снабђевеним функцијом удаљености, наглашавајући улогу функције растојања као основног појма. Сам назив метрички простор појавио се тек неколико година касније захваљујући Хауздорфу (1914), који је истовремено увео и општи појам тополошког простора у којем се метрички простори природно смјештају [7]. Тиме је начињен пресудан прелаз од локалних геометријских модела ка општој аксиоматској теорији, која је омогућила даљи развој појмова конвергенције, комплетности и компактности, а затим и саме теорије фиксних тачака. Темелје метричке теорије фиксне тачке поставио је Стефан Банах у свом пионирском раду из 1922. године [8], гдје је формулисао и доказао принцип контракције у комплетним метричким просторима. Овим резултатом започиње развој наведене области, јер је по први пут дат општи критеријум за постојање и јединственост рјешења, са непосредним посљедицама у теорији диференцијалних и интегралних једначина.

Међутим, убрзо се показало да класична метрика може бити превише рестриктивна. Симетрија $d(x, y) = d(y, x)$ не одговара ситуацијама у којима прелази $x \rightarrow y$ и $y \rightarrow x$ имају различите вриједности; услов $d(x, x) = 0$ није природан када објекат представља дјелимичну информацију; строга неједнакост троугла ограничава моделе у којима се грешке акумулирају, а такође искључује важне нехауздорфове просторе који се појављују у физици, хемији, биологији, медицини и рачунарству. Управо су та опажања подстакла развој читаве породице генерализација метричког концепта, с циљем да се сачува оперативност метричких метода у ширем, реалистичнијем окружењу.

Једна од највише истраживаних генерализација метрике заснива се на релаксацији неједнакости троугла гдје за неку константу $s \geq 1$ вриједи

$$d(x, z) \leq s [d(x, y) + d(y, z)],$$

што је довело до увођења појма b -метричких простора. Премда се појам b -метричког простора у савременом смислу најчешће везује за рад Червика (1993) [9], идеја ослабљених метричких структура појављује се и раније. Још у радовима Вулпеа из седамдесетих и осамдесетих година разматране су функције растојања које не задовољавају строгу неједнакост троугла, али су ипак омогућавале дефинисање појмова конвергенције и комплетности [10]. У ширем математичком контексту, у дјелу Бурбакија [11], могу се наћи конструкције које антиципирају идеју метрика са релаксираним аксиомима, при чему је акценат стављен на тополошке посљедице оваквих дефиниција. Пресудан корак начинио је Бахтин (1989) [12], који је први формално користио модификовану неједнакост троугла са константом s , док је Червик (1993) [9] дао потпуну аксиоматизацију и увео сам термин b -метрички простор. Његов резултат показао је да Банахов принцип контракције вриједи и у овом ширем окружењу, чиме је отворен пут за даља истраживања и разноврсне примјене.

Парцијалне метрике [13] даље допуштају $d(x, x) > 0$, док G -метрика [14] и ректангуларна метрика [15] проширују сам појам удаљености на вишеаргументне релације. Асиметричне и квазиметричке структуре потпуно напуштају симетрију, а вјероватносне и фази метрике уводе стохастичку или лингвистичку компоненту у мјерење удаљености [16, 17]. На најопштијем нивоу, Лавереова теорија [18] реинтерпретира метричке просторе као случај обогатених категорија.

Све ове генерализације дијеле исту амбицију: да очувају снагу теорема фиксне тачке и итеративних метода у оквирима који боље одражавају реалне податке и процесе. Питања метризабилности, комплетности и компактности остају централна тема, а истраживање граница између различитих класа простора открива колико далеко можемо пренијети методе класичне анализе. На тај начин, генерализоване метрике нису тек естетске варијанте, већ нужни модели који повезују теорију и праксу.

1. Метрички простори и генерализације

У овом поглављу дајемо преглед основних појмова везаних за метричке просторе и разне генерализације метричког простора, са посебним освртом на b -метричке просторе.

1.1 Метрички простори

Поглавље започињемо дефиницијом појмова метрике и метричког простора.

Дефиниција 1.1 ([6]) *Нека је X непразан скуп и пресликавање $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ такво да задовољава следеће услове*

(M1) *за све $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$ (позитивна дефинитност);*

(M2) *за све $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (сепарација тачака);*

(M3) *за све $x, y \in X$, вриједи $d(x, y) = d(y, x)$ (симетричност);*

(M4) *за све $x, y, z \in X$, вриједи $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (неједнакост троугла).*

Пресликавање d називамо метрика а уређени пар (X, d) метрички простор.

Свака метрика генерише топологију. За $x \in X$ и $r > 0$, отворена лопта дефинисана је са

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Скуп $U \subseteq X$ назива се отворен ако за сваку тачку $x \in U$ постоји $r > 0$ такво да отворена лопта $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ задовољава $B(x, r) \subseteq U$. Скуп $F \subseteq X$ назива се затворен ако је његов комплемент $X \setminus F$ отворен. Скуп свих отворених лопти чини базу топологије, па тако сваки метрички простор постаје и тополошки простор. Ова топологија има неколико важних особина: сваки метрички простор је T_1 и Хаусдорфов (T_2), а додатно је и регуларан (T_3) и нормалан (T_4). Дакле, у метричким просторима важе све основне одлике класичне топологије, а појмови конвергенције, комплетности, компактности и непрекидности пресликавања могу се у потпуности описати путем саме метрике. Осим тога постоји пребројива база топологије, па су тиме сепарабилни и Линделефови, а њихова топологија је секвенцијална тј. довољно је пратити конвергенцију низова за потпуну анализу простора.

Дефиниција 1.2 За низ $\{x_n\}$ у метричком простору (X, d) кажемо да конвергира ка $x \in X$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 такав да

$$n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Еквивалентно, услов за конвергенцију се може исказати

$$d(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty.$$

Дефиниција 1.3 Нека је (X, d) метрички простор. Низ $\{x_n\}$ је Кошијев ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број n_0 такав да

$$m, n \geq n_0 \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

или

$$d(x_m, x_n) \rightarrow 0, m, n \rightarrow +\infty.$$

Комплетност и компактност су двије основне особине које омогућавају примјену метричких метода у анализи и које стоје у основи многих резултата о постојању и јединствености рјешења у различитим математичким контекстима.

Дефиниција 1.4 Метрички простор (X, d) називамо комплетним ако је сваки Кошијев низ конвергентан.

Дефиниција 1.5 Нека је (X, d) метрички простор и $S \subseteq X$.

- Фамилија отворених скупова $\{U_i\}_{i \in I}$ у X назива се отворени покривач скупа S ако вриједи

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i,$$

тј. свака тачка $x \in S$ припада бар једном отвореном скупу U_i .

- Ако за исти скуп S постоји коначан подскуп индекса $i_1, \dots, i_m \in I$ такав да

$$S \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_m},$$

онда се $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_m}\}$ назива коначан подпокривач отвореног покривача $\{U_i\}_{i \in I}$.

Дефиниција 1.6 Нека је (X, d) метрички простор. Подскуп $S \subseteq X$ назива се компактан ако свака отворен покривач $\{U_i\}_{i \in I}$ скупа S садржи коначан подпокривач.

Напомена 1.1 У метричким просторима постоји неколико еквивалентних карактеризација компактности:

- S је компактан ако и само ако сваки низ у S има подниз који конвергира у S (секвенцијална компактност).
- Скуп S је компактан ако и само ако је комплетан и тотално ограничен.

У наставку доносимо неколико стандардних примјера метрика. Код сваког примјера кратко истичемо неке тополошке посљедице.

Примјер 1.1 На произвољном непразном скупу X можемо увијек дефинисати метрику на следећи начин

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Дискретна метрика генерише дискретну топологију: свака тачка је изолована, а сваки подскуп је и отворен и затворен. Сваки низ конвергира једино ако је од неког индекса стално једнак својој граници. Сваки дискретни простор је комплетан, али је компактан само ако је коначан.

Примјер 1.2 За $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ дефинишемо

$$d_2(x,y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Ово је стандардна метрика добијена из еуклидске норме. Алтернативно, често користимо и

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|, \quad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Све ове метрике индукују исту (стандардну) топологију на $\mathbb{R}^n$ (еквивалентне су у смислу норми). Простор $(\mathbb{R}^n, d_2)$ је комплетан и није компактан. Низ конвергира у d_2 норми ако и само ако конвергира координатно.

Примјер 1.3 Нека је (X,d) метрички простор и $CL(X)$ скуп свих непразних затворених и ограничених подскупова од X . За $A, B \in CL(X)$ дефинишемо усмјерене удаљености

$$\delta(A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a,b), \quad \delta(B,A) = \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(b,a),$$

на Хауздорфову удаљеност

$$H(A,B) = \max\{\delta(A,B), \delta(B,A)\}.$$

Тада је $(CL(X), H)$ метрички простор (ако је X комплетан, тада је и $(CL(X), H)$ комплетан). У пракси се често ради са $\mathcal{K}(X)$, скупом компактних непразних подскупова, јер је $H(A,B) < +\infty$. Хауздорфова метрика мјери колико се два скупа налазе један унутар увећаног сусједства другог. Формално, $H(A,B) \leq r$ ако и само ако $A \subseteq B_r$ и $B \subseteq A_r$, гдје је $B_r = \{x \in X : d(x,B) \leq r\}$.

Дефиниција 1.7 Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори. Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ је непрекидно у тачки $x_0 \in X$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за све $x \in X$ из услова

$$d_X(x, x_0) < \delta$$

слиједи

$$d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Напомена 1.2 Непрекидност се може изразити и секвенцијално: f је непрекидна у x_0 ако за сваки низ $\{x_n\}$ у X који конвергира ка x_0 вриједи

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

У метричким просторима ове двије формулације су еквивалентне.

Иако могу бити веома различити по питању алгебарске структуре као нпр. $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ као метрички простори између њих нема примјетне разлике. Технички сличност метричких простора се исказује изометријама.

Дефиниција 1.8 Нека су (X, d_X) и (Y, d_Y) метрички простори. Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ назива се изометрија ако за све $x, y \in X$ вриједи

$$d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y).$$

Примјер 1.4 У метричком простору $(C[0,1], d)$ гдје је $d(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

За фиксирану константу $c \in \mathbb{R}$ дефинишемо пресликавање $T : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $(Tf)(x) = f(x) + c$. Лако се показује да је T изометрија у униформној метрици d .

Напомена 1.3 Изометрија чува све међусобне удаљености између тачака и самим тим аутоматски очува све особине које зависе од метрике: конвергенцију низова, Кошијеве низове, комплетност, компактност, затвореност и отвореност скупова итд. Изометрија је увијек инјективна и непрекидна а ако је изометрија бијективна, она је хомеоморфизам, па простори повезани таквим пресликавањем имају потпуно исту тополошку и метричку структуру. За разлику од изометрија, опште бијекције, па чак и диференцијабилна пресликавања, не морају очувати ове особине: могу задржати глаткоћу трансформације, али не и метричку структуру. Због тога се изометрија у теорији метричких простора посматра као строжији појам од саме бијекције, јер обезбјеђује да се све суштинске метричке и тополошке карактеристике преносе у потпуности.

Дефиниција 1.9 Тополошки простор (X, τ) назива се метризубилан ако постоји метрика d на X таква да топологија индукована метриком d поклапа топологију τ . Другим ријечима, скупови отворени у тополошком смислу су тачно они који се добијају као уније отворених лопти у метрици d .

Примјер 1.5 На простору $\mathbb{R}^2$ посматрајмо двије метрике:

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2),$$

што је стандардна еуклидска метрика, и

$$d_2(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$

што је тзв. таксиметарска или Менхетн метрика. Ове двије метрике d_1 и d_2 генеришу исту топологију на $\mathbb{R}^2$, тј. стандардну топологију.

1.2 Генерализације метричког простора

Полазећи од класичне дефиниције метричког простора, уведене у радовима Фрешеа [6] и Хауздорфа [7], у савременој теорији развијен је читав низ генерализованих структура које омогућавају проучавање ситуација гдје стандардне метричке претпоставке нису довољне.

Ради лакше систематизације генерализација посматрајмо сљедеће услове:

$$(d1) \quad d(x, x) = 0;$$

$$(d1_a) \quad d(x, y) = 0 \implies x = y, \text{ али није обавезно } d(x, x) = 0;$$

$$(d1_b) \quad d(x, x) = 0, \text{ али } d(x, y) = 0 \text{ не повлачи } x = y;$$

$$(d2) \quad d(x, y) = d(y, x) = 0 \implies x = y;$$

$$(d3) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(d4) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);$$

$$(d4_a) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) - d(z, z);$$

$$(d4_b) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, w) + d(w, z) \text{ за различите } y, w;$$

$$(d4_c) \quad d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)] \text{ за неко } s \geq 1;$$

$$(d4_e) \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\};$$

$$(d4_m) \quad d(x, z) \leq \lambda [d(x, y) + d(y, z)] \text{ за неку константу } \lambda \in (0, 1];$$

$$(d5) \quad d(x, x) \leq d(x, y);$$

Сљедећа табела представља неке од познатих проширења метричких простора.

Табела 1.1: Проширења метричких простора [19]

Простор	Аксиоме
Метрички простор [6, 7]	$(d1), (d2), (d3), (d4)$
Псеудометрички простор [6]	$(d2), (d3), (d4)$
Квазиметрички простор [20]	$(d1), (d2), (d4)$
Семиметрички простор [21]	$(d1), (d2), (d3)$
Хемиметрички простор [22, 23]	$(d1), (d4)$
Парцијални метрички простор [13]	$(d1), (d3), (d4_a), (d5)$
b -метрички простор [9, 12]	$(d1), (d2), (d3), (d4_c)$
Ултраметрички простор [24]	$(d1), (d2), (d3), (d4_e)$
Дислоцирани метрички простор [25]	$(d1), (d3), (d4_a)$
Слаби метрички простор [26]	$(d1_a), (d3), (d4)$
Ректангуларни простори [15]	$(d1), (d2), (d3), (d4_b)$
Парцијални b -метрички простор [27]	$(d1), (d3), (d4_c), (d5)$
Модификовани метрички простор [28, 29]	$(d1), (d2), (d3), (d4_m)$

Вриједи напоменути да постоје и бројна друга проширења појма метрике, као што су модуларни метрички простори, конусни метрички простори, C^* -алгебарски метрички простори, вјероватносни метрички простори, фази метрички простори, G -метрички простори и многи други [14, 17, 30–33]. У овој дисертацији ограничићемо се на резултате добијене у оквиру b -метричких простора, док ћемо за остале генерализације изнијети само неке од најважнијих резултата.

Псеудометрике се користе у функционалној анализи, на просторима мјерљивих функција гдје је норма дефинисана до скоро свуда једнакости, па различите функције могу имати удаљеност нула.

Примјер 1.6 (Псеудометрика) *Нека је X непразан скуп. Уведимо $d(x,y) \equiv 0$ за све $x,y \in X$. Уочимо да је d псеудометрика: вриједи услов $d(x,x) = 0$, симетричност и неједнакост троугла су тривијални, али из $d(x,y) = 0$ не слиједи $x = y$. Топологија је индискретна само $\emptyset$ и X су отворени, па ако је $|X| > 1$ простор није Хауздорфов; различите тачке се не могу раздвојити дисјунктним отвореним околима.*

Примјер 1.7 (Псеудометрика у функционалној анализи) *Нека је $(X, \mathcal{A}, \mu)$ мјерљив простор и нека је*

$$\mathcal{L}^p(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ мјерљива, } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}, \quad p \geq 1.$$

На $\mathcal{L}^p(X)$ дефинишемо функцију

$$d(f,g) = \left(\int_X |f(x) - g(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Тада d задовољава ненегативност, симетрију и неједнакост троугла, али вриједи

$$d(f,g) = 0 \iff f = g \text{ } \mu\text{-скоро свуда.}$$

Дакле, d је псеудометрика, а не метрика, јер различите функције које се разликују само на скупу мјере нула имају растојање нула. Увођењем релације еквиваленције $f \sim g \iff f = g \text{ } \mu\text{-скоро свуда}$ добијамо факторски простор

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\sim,$$

који уз ову функцију постаје прави Банахов простор.

Квазиметрике налазе примјену у теорији алгоритама и теорији графова, гдје је удаљеност у правцу од x до y различита од удаљености назад.

Примјер 1.8 (Зоргенфрејева права) *На скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ дефинишимо квазиметрику*

$$d(a,b) = \begin{cases} |a - b|, & a \leq b, \\ 1, & a > b. \end{cases}$$

Тада је $(\mathbb{R}, d)$ квазиметрички простор. Индукована топологија није стандардна то-

положија на $\mathbb{R}$. База топологије су интервали облика $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. Топологија Зоргенфрејеве праве није метризабилна.

Примјер 1.9 (Квазиметрика) Уведимо функцију растојања са $d(x, y) = \max\{0, y - x\}$ на $\mathbb{R}$. Директном провјером добијамо да је $(\mathbb{R}, d)$ квазиметрички простор. Отворене лопте дефинишемо као

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) < r\} = \{y : y < x + r\} = (-\infty, x + r).$$

За $x \neq y$ не постоје дисјунктне отворене околине; свака околина x је интервал типа $(-\infty, x + r)$, а свака околина y је $(-\infty, y + s)$; њихов пресјек је увијек $(-\infty, \min\{x + r, y + s\}) \neq \emptyset$. Према томе простор није Хаусдорфов (чак није ни T_1).

Ултраметрике се природно јављају у p -адским бројевима $\mathbb{Q}_p$ и у анализи хијерархијских структура.

Примјер 1.10 (p -адска ултраметрика) Нека је p прост број. За сваки $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ пишемо $n = p^k t$, гдје t није дјелив са p (и $k \in \mathbb{N}$ је p -адни експонент). Дефинишемо p -адску валуацију

$$v_p(n) = k, \quad v_p(0) = +\infty.$$

На скупу рационалних бројева $\mathbb{Q}$ уводимо норму

$$|x|_p = p^{-v_p(x)}, \quad x \in \mathbb{Q}, \quad x \neq 0,$$

и $|0|_p = 0$. За $x, y \in \mathbb{Q}$ дефинишемо

$$d_p(x, y) = |x - y|_p.$$

Ова функција d_p је ултраметрика, јер задовољава

$$d_p(x, z) \leq \max\{d_p(x, y), d_p(y, z)\}, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{Q}.$$

Лопте у ултраметричком простору $(\mathbb{Q}, d_p)$ имају особину да су истовремено отворене и затворене, а свака тачка лопте је њен центар. Таква топологија је потпуно различита од стандардне еуклидске: на примјер, скуп свих p -адских цијелих бројева

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

је компактан, иако је бесконачан. Ако допустимо да се у овај простор додају све границе Кошијевих низова у ултраметрици d_p , добијамо p -адско поље $\mathbb{Q}_p$, које представља канонско проширење $\mathbb{Q}$ у смислу p -адске топологије и има фундаменталну улогу у теорији бројева.

Парцијалне метрике уводи Метјуз [13] са циљем да моделује парцијалне информације у рачунарству, посебно у теорији денотационих семантика програмских језика.

Примјер 1.11 (Парцијална метрика) На $X = \{0, 1\}$ посматрајмо парцијалну метрику p дату са $p(x, y) = \max\{x, y\}$. Очигледно $p(x, x) \leq p(x, y)$, вриједи симетри-

чност и специјална неједнакост троугла $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$. Базе околине су $B_p(x,\varepsilon) = \{y : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$. За $x = 1$ и свако $\varepsilon > 0$ имамо $p(1,0) = 1 < 1 + \varepsilon$, па свака околина тачке 1 садржи и 0. Закључујемо да парцијални метрички простор није Хаусдорфов (нити T_1).

Дислоциране метрике дају даља проширења у теорији фиксних тачака, гдје растојање тачке од саме себе зависи од њене позиције и користи се у апроксимационим методама. Ректангуларне метрике појављују се у истраживањима стабилности и генерализација фиксних тачака, гдје се класична троугаона неједнакост замјењује правоугаоном формом. Фази и вјероватносне метрике користе се за моделовање ситуација са неизвјесношћу, нпр. у теорији одлучивања и у теорији мјерења у неизвјесним окружењима. Конусне и C^* -алгебарске метрике појављују се у функционалној анализи и теорији оператора, гдје метрика поприма вриједности у конусима или C^* -алгебрама, што омогућава прецизније проучавање линеарних оператора и спектралних својстава. Поред ових, развијене су и модуларне и вјероватносне метрике које налазе примјену у геометријској теорији функција и у анализи простора са додатном структуром.

1.2.1 b -метрички простори

Идеја релаксације троугаоне неједнакости јавља се у оквиру квазинорми и квазиметрика. Хајерс [34] и Бургин [35] уводе квазинорме, а природно се показало да оне индукују квазиметрике. Први рад у којем се квазиметрика користи у модерном смислу јесте рад Коифмана и де Гузмана (1970) [36], гдје се уводи тзв. функција растојања у хармонијској анализи и проучавању простора хомогеног типа. Овај приступ проширују Масијас и Сеговија (1979) [37], који систематизују рад са квазиметрикама у теорији функционалних простора.

У раду Коифмана и Вајса [38] указује се како се може конструисати квазиметрички простор на тополошком простору на коме је дефинисана Борелова мјера (и самим тим како се може конструисати простор хомогеног типа). Класа квазиметричких простора обухвата породицу свих квази-Банахових простора, који укључују мноштво функционалних простора од фундаменталног значаја у анализи: Лебегове просторе, слабе Лебегове просторе, Лоренцове просторе, Хардијеве просторе, слабе Хардијеве просторе итд. [39]. Од посебне важности је рад Вулпеа [10], у којем се детаљно анализира тополошка структура квазиметричких простора и постојање фиксне тачке контракције. У историјском прегледу Бериндеа и Пачурара [40] истиче се да Вулпеови резултати представљају претечу онога што данас називамо теоријом фиксне тачке у b -метричким просторима и да их треба сматрати пионирским доприносом у овој области.

Увођење квазиметрике у теорију фиксних тачака наново почиње радом Бахтина (1989) [12], док кључни искорак прави Червик (1993) [9] који уводи сам назив b -метрички простор и показује да Банахов принцип контракције, као и друге класичне теореме, остају валидне. Област се показала као врло активна што је довело до значајног броја резултата у погледу развоја теорије фиксне тачке и систематизације контрактивних услова.

У даљем дијелу дисертације користићемо назив b -метрички простори с обзиром да у савременој литератури квазиметрички простор означава другу генерализацију.

Дефиниција 1.10 (Червик [9]) *Нека је X непразан скуп и $s \geq 1$ реалан број. Функција $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ је b -метрика на X ако су испуњени услови:*

- (i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$, за свако $x,y \in X$;
- (ii) $d(x,y) = d(y,x)$, за све $x,y \in X$;
- (iii) $d(x,z) \leq s (d(x,y) + d(y,z))$, за све $x,y,z \in X$.

Пар (X,d) назива се b -метрички простор са константом $s \geq 1$.

Напомена 1.4 Умјесто пара (X,d) у литератури се често користи уређена тројка (X,d,s) , гдје $s \geq 1$ означава константу релаксације неједнакости троугла. Уочимо да за $s = 1$ добијамо стандардну неједнакост троугла односно да је метрика уствари специјални случај b -метрике.

Примјер 1.12 Нека је $X = X_1 \cup X_2$ дисјунктна унија, гдје $X_1 = \{a,b\}$ има два елемента, а $X_2 = \{c\}$ један елемент. Дефинишимо

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y; \\ 4, & x,y \in X_1, x \neq y; \\ 1, & \text{ако } x \in X_1, y \in X_2 \text{ (или обротно)}. \end{cases}$$

Лако се провјерава да $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = d(y,x)$ и $d(x,x) = 0$. Такође, (iii) је испуњена за $s = 2$ провјером коначног броја случајева. На примјер, за $x,y \in X_1$ и $z \in X_2$ добијамо $d(x,y) = 4$ и $d(x,z) + d(y,z) = 1 + 1 = 2$, па $d(x,y) = 4 = 2 \cdot 2 = 2[d(x,z) + d(y,z)]$. Ипак, d очигледно није метрика јер неједнакост троугла не вриједи $4 \not\leq 1+1$. Овај примјер показује да b -метрика није еквивалентна метрици у општем случају.

Примјер 1.13 ([19]) На скупу реалних бројева дефинишемо

$$d(x,y) = |x - y|^p, \quad x,y \in \mathbb{R},$$

за фиксни $p \in (0,1)$. Функција d није метрика јер не задовољава стандардну неједнакост троугла, али је b -метрика са константом $s = 2^{1/p-1}$.

Примјер 1.14 ([39]) Нека је $(X, \|\cdot\|)$ квазинормирани простор, тј. функција $\|\cdot\|$ задовољава $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ за неку константу $K \geq 1$. Дефинишимо

$$d(x,y) = \|x - y\|.$$

Тада (X, d, s) представља b -метрички простор са истом константом $s = K$. Овај примјер повезује b -метрике са анализом у квазинормираним просторима. Нека је $(X, \mathcal{A}, \mu)$ мјерљив простор и $0 < p < 1$. Дефинишимо

$$L^p(X, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}.$$

За $f \in L^p(X, \mu)$ уводимо квазинорму

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Функција $\|\cdot\|_p$ није норма јер за $p < 1$ не вриједи неједнакост троугла. Ипак, за све $f, g \in L^p(X, \mu)$ вриједи

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p,$$

што показује да $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ чини квазинормирани линеарни простор. Ако дефинишемо

$$d(f, g) = \|f - g\|_p, \quad f, g \in L^p(X, \mu),$$

онда $(L^p(X, \mu), d)$ представља b -метрички простор са константом $s = 2^{\frac{1}{p}-1}$.

У b -метричком простору уводе се појмови конвергенције и Кошијевих низова слично као у метричким просторима.

Дефиниција 1.11 ([9]) Нека је (X, d, s) b -метрички простор. Низ $\{x_n\} \subset X$ је конвергентан ако постоји $x \in X$ такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $N \in \mathbb{N}$ са

$$d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

тј. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Низ $\{x_n\} \subset X$ је Кошијев ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $N \in \mathbb{N}$ са

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

тј. $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Дефиниција 1.12 ([9]) Нека су (X, d_X, s_X) и (Y, d_Y, s_Y) b -метрички простори. Пресликавање $f : X \rightarrow Y$ непрекидно у тачки $x_0 \in X$ ако за сваки низ $\{x_n\} \subseteq X$ који конвергира ка x_0 у (X, d_X) вриједи

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad \text{у} \quad (Y, d_Y).$$

Свака b -метрика d индукује топологију τ_d на X преко базних лопти $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ [41]. Међутим, та топологија може имати неинтуитивне особине: на примјер, могуће је да скуп $B(x, r)$ није отворен у тој топологији.

Примјер 1.15 ([42]) Дефинишимо на X функцију

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ако } x = y, \\ 2 & \text{ако } x \neq y. \end{cases}$$

Тада је (X, d) b -метрички простор за $s = 2$. Лопта $B(x, 1) = \{x\}$ није отворена у топологији коју генерише d , јер свака околина тачке x садржи или само x или цијели скуп X .

Функција d (као пресликавање са $X \times X$ у $\mathbb{R}$) не мора бити непрекидна по својим аргументима (за разлику од сваке метрике) [19].

Примјер 1.16 ([43]) Нека је $X = \mathbb{R}^2$ и нека је $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ дефинисано са

$$d(x,y) = \begin{cases} |x_1 - x_2|, & y_1 = y_2, \\ 2(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|), & y_1 \neq y_2, \end{cases}$$

за $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$.

Тада је (X, d) b -метрички простор са константом $s = 2$. Ако узмемо

$$x_n = \left(1, \frac{1}{n}\right), \quad x = (1, 0), \quad y_n = (0, 0), \quad y = (0, 0),$$

добивамо да $x_n \rightarrow x$ и $y_n \rightarrow y$ док $d(x_n, y_n) = 2 + \frac{2}{n} \rightarrow 2 \neq 1 = d(x, y)$. Дакле, d није непрекидна.

За разлику од претходно поменутих генерализација у b -метричким просторима T_2 аксиома и даље вриједи, односно сваки b -метрички простор (X, d, s) је Хауздорфов.

Посљедица 1.1 Нека је (X, d, s) b -метрички простор. Тада вриједи:

(i) Сваки конвергентан низ има јединствену границу.

(ii) Сваки конвергентан низ је Кошијев.

Примјер 1.17 ([9]) Обрат тврђења (ii) у Посљедици 1.1 у општем случају не вриједи. Скуп $\mathbb{Q}$ са b -метриком $d(x, y) = |x - y|^2$ није комплетан: постоји Кошијев низ рационалних бројева који конвергира ка $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, па не конвергира у $\mathbb{Q}$.

Дефиниција 1.13 b -метрички простор (X, d, s) комплетан ако је сваки Кошијев низ у X конвергентан.

Подскуп $D \subseteq X$ назива се секвенцијално отворен ако за сваки конвергентан низ $\{x_n\} \rightarrow x \in D$ постоји N тако да $x_n \in D$ за све $n \geq N$. Подскуп $F \subseteq X$ назива се секвенцијално затворен ако ниједан низ из F не конвергира ка тачки ван F . Простор X је секвенцијалан ако сваки секвенцијално отворен скуп јесте отворен. Секвенцијална топологија на b -метричком простору (X, d) означава се са τ . Ипак као у претходном случају наведена топологија има исте недостатке као и τ_d . Да би се избјегле овакве потешкоће, уведена је топологија τ^d , која представља најфинију топологију компатибилну са d и у којој лопте функционишу као базе околине.

Дефиниција 1.14 ([44]) Нека је (X, d) b -метрички простор са константом $s \geq 1$. Топологија τ^d на скупу X дефинише се на следећи начин: $U \subseteq X$ припада τ^d ако и само ако за сваку тачку $x \in U$ постоји реалан број $r > 0$ такав да

$$B_d\left(x, \frac{r}{s}\right) \subseteq U.$$

Другим ријечима, база топологије τ^d чине скупови добијени као пресеци лопти облика $B_d(x, \frac{r}{s})$.

Теорема 1.1 ([44]) *За сваки b -метрички простор (X, d, s) вриједи:*

- (i) $\tau = \tau_d$ (секвенцијална и стандардна топологија се поклапају);
- (ii) $\tau_d \subseteq \tau^d$ (топологија τ^d проширује стандардну).

Напомена 1.5 Топологија τ^d има кључну улогу јер враћа очекивано понашање познато из метричких простора: лопте су базе околине, функција $d(\cdot, \cdot)$ је непрекидна у сопственој топологији, а простор (X, d) постаје метризабилан (тј. постоји права метрика која генерише исту топологију). На тај начин τ^d омогућава да се класични резултати анализе (конвергенција, комплетност, непрекидност пресликавања) примјењене и у b -метричком окружењу.

Примјер 1.18 ([44]) *У општем случају инклузија $\tau_d \subseteq \tau^d$ је строга. Нека је*

$$X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\},$$

а $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ дефинисано са

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \ x, y \in \{0, 1\}, \\ |x - y|, & x \neq y, \ x, y \in \{0\} \cup \{\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}, \\ 4, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тада вриједи:

- (i) d је b метрика на X са $s = 8$;
- (ii) d није метрика на X ;
- (iii) d није непрекидна по свакој промјенљивој;
- (iv) лопта $B(1, 2)$ није отворена у τ , али јесте у τ^d .

Особине комплетности b -метрике аналогне су метричком случају. Свака затворени подскуп комплетног b -метричког простора је комплетан [45]. Обрнуто, сваки комплетан подскуп $Y \subseteq X$ мора бити затворен у X [45]. Позната је карактеризација у метричким просторима да је подскуп компактан (секвенцијално компактан) ако и само ако је комплетан и тотално ограничен. Сличан критеријум важи и у b -метричким просторима: компактност, секвенцијална компактност и комбинација комплетности и тоталне ограничености и даље су еквивалентни појмови [45]. Прецизније, сваки секвенцијално компактан подскуп b -метричког простора је компактан и обратно (јер је простор који испуњава прву аксиому пребројивости по бази лопти) [45]. Такође, сваки компактан скуп K у b -метричком простору је тотално ограничен (и ограничен) и затворен. Обрнуто, ако је A тотално ограничен подскуп комплетног простора X ,

тада је A компактан: сваки низ у A има Кошијев подниз (због тоталне ограничености), који због комплетности простора конвергира у X , а гранична вриједност мора остати у A (јер је A затворен).

Друга линија приступа, развијена са циљем да се избјегну поменуте потешкоће у тополошкој структури b -метричких простора, јесте увођење појма строгог b -метричког простора, који су предложили Кирк и Шазад [46].

Дефиниција 1.15 ([46]) *Нека је X непразан скуп и $s \geq 1$. Пресликавање $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ је строга b -метрика ако за све $x, y, z \in X$ вриједи:*

$$(i) \quad d(x, y) = 0 \iff x = y,$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

(iii) *строга b -неједнакост троугла:*

$$d(x, z) \leq d(x, y) + s d(y, z).$$

Тополошке особине строгих b -метричких простора су знатно уређеније од општих b -метричких простора:

- свака лопта $B(x, r)$ је отворена и скуп лопти чини базу топологије;
- топологија индукована строгим b -метриком је метризабилна, тј. постоји права метрика која генерише исту топологију;
- појмови Кошијевих низова у потпуности понашају се идентично као у метричким просторима;
- функција $d(\cdot, \cdot)$ је непрекидна у сопственој топологији.

Примјер 1.19 ([46]) *На скупу $\mathbb{R}$ дефинишимо*

$$d(x, y) = |x - y| + |x - y|^2.$$

Тада d задовољава услов

$$d(x, z) \leq d(x, y) + 2 d(y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

на је $(\mathbb{R}, d)$ строги b -метрички простор са $s = 2$. Индукована топологија се поклапа са стандардном еуклидском топологијом.

Питање метризабилности b -метричких простора (квазиметричких) има дугу историју и заузима значајно мјесто у теорији генерализованих метрика. Посебна пажња је посвећена простору (X, d) када је релаксирана неједнакост троугла задовољена са константом $s = 2$, јер овај случај представља граничну ситуацију између метричких и општијих b -метричких структура. Управо за овај случај добијени су класични

результати метризабилности. Фринк уводи ланчану метрику

$$\rho(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) : n \in \mathbb{N}, x = x_0, \dots, x_n = y \right\},$$

која испуњава услов неједнакости троугла. Резултат показује да сви b -метрички простори за $s = 2$ су метризабилни.

Теорема 1.2 (Фринк [47]) *Нека је (X, d) b -метрички простор који задовољава*

$$d(x, z) \leq 2[d(x, y) + d(y, z)], \quad \forall x, y, z \in X.$$

Тада постоји метрика ρ на X еквивалентна са d таква да

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq 4\rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Густавсон поједностављује Фринкову методу и даје директнији конструктивни доказ метризабилности b -метричких простора, чиме повезује ране резултате Читендена [21] и Вилсона [20].

Теорема 1.3 (Густавсон [48]) *За сваки b -метрички простор (X, d, s) може се конструисати метрика ρ еквивалентна са d модификацијом Фринкове конструкције.*

Коришћењем рафинираних ланчаних процјена Шредер генерализује Фринков резултат и показује да се метризабилност простире на све b -метричке просторе са $s \leq 2$.

Теорема 1.4 (Шредер [49]) *Ако је (X, d) b -метрички простор са константом $s \leq 2$, тада постоји метрика ρ на X еквивалентна са d која задовољава*

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq 2s \rho(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

За b -метричке просторе (X, d) , Ан и Дунг су показали да је топологија индукована конвергенцијом низова (секвенцијална топологија) једнака стандардној d -топологији те да је простор симетризабилан; уз благу претпоставку непрекидности d по једној промјенљивој, а ако је простор регуларан и посједује σ дискретну базу, тада је по Нагата–Смирнов теореме метризабилан [50–53]. У том случају можемо изабрати метрику која тачно генерише топологију τ^d .

Сом [54, 55] је показао да сваки b -метрички простор (X, d, s) је метризабилан и без претпоставки о непрекидности функције d . Сом примјењује генерализоване метризационе теореме типа Читендена и Вилсона и уклања техничке рестрикције из резултата Ана и Дунга чиме показује да метризабилност није осјетљива на додатне услове.

Први приступ гдје се користи степеновање b -метрике умјесто контрукције ланчаних сума је приказан у раду Масијаса и Сеговије [37].

Теорема 1.5 (Масијас-Сеговија [37]) *За сваку b -метрику d постоји еквивалентна метрика ρ и експонент $\alpha \in (0,1]$ те константа $C \geq 1$ тако да вриједи*

$$C^{-1} \rho(x,y)^\alpha \leq d(x,y) \leq C \rho(x,y)^\alpha,$$

и може се изабрати еквивалентна b -метрика у којој су све лопте отворене.

Рад Ајмара, Јафеиа и Нитија [56] проширује и систематизује Масијас-Сеговија конструкцију и даје услове под којима метрика ρ^α даје еквивалентну структуру уз примјене у анализи простора хомогеног типа.

Нова метода са p -ланцима уводи се у раду Палушинског и Штемпака [57]. Посматрањем h^p контролише се акумулација константе s у ланчаним процјенама а формула $(2s)^p = 2$ одређује оптималан експонент p . Тиме се показује да за сваки $s \geq 1$ постоји одговарајући p који даје еквивалентну метрику. Резултат је нарочито важан јер нуди квантитативни критеријум метризабилности: d_p и h^p су еквивалентни, а процјена $\frac{1}{4}h^p \leq d_p \leq h^p$ дају тачну контролу.

Теорема 1.6 (Палушински-Штемпак [57]) *Нека је (X,h) b -метрички простор са константом $s \geq 1$. Ако $p \in (0,1]$ задовољава $(2s)^p = 2$, тада је пресликавање*

$$d_p(x,y) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^n h(x_{j-1}, x_j)^p : n \in \mathbb{N}, x = x_0, \dots, x_n = y \right\}$$

метрика на X и вриједи

$$\frac{1}{4}h(x,y)^p \leq d_p(x,y) \leq h(x,y)^p, \quad \forall x,y \in X.$$

Фундаментални искорак доноси рад Дунга и Ханга [58] јер показује да b -метрички простори, поред метризабилности, увијек посједују и комплетирање аналогно метричким просторима.

Теорема 1.7 (Дунг-Ханг [58]) *За сваки b -метрички простор (X,d,s) постоји b -метричко комплетирање $(X^*, d^*, 4s^3)$ које је јединствено до изометрије и у које се (X,d,s) уграђа као густ подпростор.*

Кобзаш и Червик у [59] користе еквиваленцију Кошијевих низова у b -метричком контексту, генерализујући стандардно метричко комплетирање. Овај приступ показује да различите технике доводе до истог закључка: b -метрички простори имају добро дефинисана комплетирања и да се на њима могу развијати резултати фиксне тачке.

1.2.2 Слаби b -метрички простори

У овом поглављу истакнућемо нека од проширења b -метричког простора. Уз наведене дефиниције издвајамо неколико технички значајних лема у оквиру слабих b -метричких простора, јер управо у том окружењу добијамо нове резултате који ће бити детаљно размотрени у наставку дисертације.

Прво проширење b -метричких простора представљају b -квазиметрички простори, које су увели Хусаин и Шах [60]. Након тога, Хусаин, Хамзи и Латиф [61] уводе дислоциране b -метричке просторе, док Шукла [27] дефинише парцијалне b -метричке просторе, инспирисане Метјузовим парцијалним метрикама. Надаље, Мустафа, Симс, Ајди и Карапинар [62] формулишу ректангуларне b -метричке просторе док Алхамди, Хусаин и Салими [63] уводе појам слабих b -метричких простора (енг. b -metric-like spaces), који представљају природно проширење b -метрике релаксацијом услова на дијагонали.

Табела 1.2: Проширења b -метричких простора

Простор	Аксиоме
b -метрички простор [9, 12]	$(d1), (d2), (d3), (d4_c)$
Парцијални b -метрички простор [27]	$(d1), (d3), (d4_c), (d5)$
Дислоцирани b -метрички простор [61]	$(d1), (d3), (d4_c)$
Ректангуларни b -метрички простор [62]	$(d1), (d2), (d3), (d4_b)$
Слаби b -метрички простор (b -metric-like) [63]	$(d1_a), (d2), (d3), (d4_c)$
b -псеудометрички простор	$(d1_b), (d3), (d4_c)$
b -ултраметрички простор	$(d1), (d2), (d3), (d4_e)$
Модификовани b -метрички простор [28, 29]	$(d1), (d2), (d3), (d4_m)$

У другом правцу Хуанг и Шу [64] разматрају конусне b -метричке просторе, док Карапинар, Нашине и Самет [65] проучавају вјероватносне b -метричке просторе. Фази варијанта уводи се код Самета, Ветра и Ветра [66], док Ма, Јианг и Ју [67] развијају теорију C^* -алгебарских b -метричких простора.

У оквиру савремених истраживања генерализација b -метрике посебно место заузимају слаби b -метрички простори, а који представљају проширење b -метричких простора релаксацијом услова на дијагонали и пружају нови оквир за истраживање првенствено у области теорије фиксне тачке.

Примјер 1.20 Нека је $X = \mathbb{R}_+$, $p > 1$ константа и $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ дефинисана са

$$d(x, y) = (x + y)^p.$$

Тада је (X, d) слаби b -метрички простор са коефицијентом $s = 2^{p-1}$ али није b -метрички простор јер је за $x > y$, $d(x, x) > d(x, y)$.

У слабом b -метричком простору (X, d) , ако су $x, y \in X$ и $d(x, y) = 0$, онда је $x = y$. Међутим, обрнуто не мора бити тачно и $d(x, x)$ може бити позитивно за $x \in X$.

Дефиниција 1.16 ([68]) Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$, $\{x_n\}$ низ у X и $x \in X$. Тада важи следећа твђења:

(a) Низ $\{x_n\}$ конвергира ка x ако $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = d(x, x)$;

(b) Низ $\{x_n\}$ је Кошијев низ у (X, d) ако $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m)$ постоји и коначан је;

(с) (X, d, s) се назива комплетан слаби b -метрички простор ако за сваки Кошијев низ $\{x_n\} \subset X$, постоји $x \in X$ тако да $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = d(x, x)$.

Дефиниција 1.17 ([68]) Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и f пресликавање у себе скупа X . Функција f је непрекидна ако и само ако $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(fx_n, fx) = d(fx, fx)$, за сваки низ $\{x_n\} \subset X$, који задовољава $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = d(x, x)$.

Посљедица 1.2 Ако у слабом b -метричком простору са параметром $s \geq 1$ вриједи $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0$ онда је граница низа $\{x_n\}$ јединствена ако постоји.

Лема 1.1 ([69, 70]) Нека је (X, d) комплетан слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $\{x_n\}$ низ такав да $d(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda d(x_{n-1}, x_n)$, за све $n \in \mathbb{N}$, гдје је $\lambda \in [0, 1)$. Тада је $\{x_n\}$ b -Кошијев низ такав да $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0$.

Лема 1.2 ([71]) Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и претпоставимо да $\{x_n\}$ конвергира ка x и $d(x, x) = 0$. Тада

$$s^{-1}d(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y) \leq sd(x, y),$$

за све $y \in X$.

Напомена 1.6 База топологије слабих b -метричких дефинише се помоћу отворених лопти. На основу ове базе дефинише се топологија τ_d , у којој конвергенција низа $\{x_n\}$ ка тачки $x \in X$ задовољава услов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = d(x, x).$$

Битно је истаћи да ова топологија, за разлику од стандардне b -метричке, није нужно Хаусдорфова, јер центар лопте не мора припадати лопти, па граница низа ако постоји не мора бити јединствена. Ипак, према Посљедици 1.2 са додатним условима може се обезбиједити јединственост и теореме фиксне тачке се могу постићи секвенцијалним приступом.

Лема 1.3 ([71]) Нека је (X, d) , слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$. Тада вриједи следећа тврђења:

(а) Ако је $d(x, y) = 0$, онда $d(x, x) = d(y, y) = 0$;

(б) Ако је $\{x_n\}$ низ такав да $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, онда имамо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{n+1}, x_{n+1}) = 0;$$

(с) Ако $x \neq y$, онда $d(x, y) > 0$.

Лема 1.4 ([72]) Нека је (X, d) комплетан слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$. Нека је $\{x_n\} \subset X$ низ такав да $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Ако за низ $\{x_n\}$ вриједи $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) \neq 0$, тада постоје $\varepsilon > 0$ и низови $\{m_k\}_{k=1}^{+\infty}$ и $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ природних бројева са $n_k > m_k > k$, тако да

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}, x_{n_k}) &\geq \varepsilon, & d(x_{m_k}, x_{n_k-1}) &< \varepsilon, \\ \frac{\varepsilon}{s^2} &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \leq \varepsilon s, \\ \frac{\varepsilon}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n_k-1}, x_{m_k}) \leq \varepsilon s^2, \\ \frac{\varepsilon}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) \leq \varepsilon s^2. \end{aligned}$$

2. Итеративни низови и фиксне тачке

У овом поглављу дајемо темељан преглед резултата из теорије фиксне тачке у метричким просторима и њиховим разним генерализацијама. Први дио посвећен је класичним теоремима, попут Банаховог принципа контракције и његових раних проширења, док се у наставку разматрају значајне модификације и нове класе контраktivних пресликавања које су уведене ради обухватања ширег спектра простора. На крају дајемо преглед савремених резултата у b -метричким просторима са циљем да се истакну њихове особености и допринос савременом развоју теорије.

Почетке метричке теорије фиксне тачке можемо пронаћи још у радовима Лиувилла [73] о методама сукцесивних апроксимација за рјешавање одређених диференцијалних једначина. Наведени метод је развио и Пикар [74] знатно касније, али индиректно обје методе су користиле фиксну тачку. Многи други аутори су посматрали разне проблеме који су имали одређена поимања фиксне тачке попут Кошија [1], Пеана [75] и Липшица [76]. Формално, за почетак метричке теорије фиксне тачке узима се истакнути Банахов резултат из 1922. године. Резултат је објављен у Банаховој дисертацији двије године раније али није постао нашироко познат док није објављен часопису *Fundamenta mathematica*. Савременију верзију Банаховог принципа контракције дао је Качиополи 1930. године па се у литератури некада наводи као Банах-Качиополи теорема [77].

2.1 Метричка теорија фиксне тачке

У овом поглављу истакнућемо неке од најзначајнијих класичних и савремених резултата у метричкој теорији фиксне тачке који се заснивају на различитим облицима контраktivних услова. Ови резултати представљају темељ даљег развоја теорије и основу за многе касније генерализације. За свеобухватнији преглед односа између различитих контраktivних услова и њихове међусобне еквивалентности или нееквивалентности, читаоца упућујемо на опширни рад Били Ј. Роудса [78], који представља једно од најопсежнијих систематизованих истраживања у овој области.

Пикарова теорема о сукцесивним апроксимацијама сматра се првом која је имала форму стандардне теореме о фиксној тачки. Она је касније послужила као непосредна претеча Банаховом принципу контракције, који је у потпуности обликовао метричку теорију фиксне тачке.

Теорема 2.1 (Пикар [74]) *Нека је $T : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна функција и $T : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилна. Ако постоји $L < 1$ такав да*

$$|T'(x)| \leq L$$

за све $x \in (a,b)$, тада низ $\{x_n\}$ у (a,b) дефинисан са

$$x_{n+1} = Tx_n$$

конвергира ка рјешењу једначине $Tx = x$.

Напомена 2.1 Итеративни низ x_n дефинисан са $x_{n+1} = Tx_n$ назива се Пикаров итеративни низ. Због своје једноставности и опште примјенљивости, Пикарова итерација остаје централна техника и у свим савременим варијантама и генерализацијама теорема фиксне тачке.

У метричкој теорији фиксне тачке, централну улогу заузима класа контрактивних пресликавања у комплетним просторима.

Дефиниција 2.1 *Нека је (X,d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ назива се контракција ако постоји константа $\lambda \in [0,1)$ таква да*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Као што смо већ нагласили у уводном дијелу полазни резултат је Банахов принцип контракције.

Теорема 2.2 (Банах [8]) *Нека је (X,d) комплетан метрички простор и $T : X \mapsto X$ контракција тј. постоји $\lambda \in [0, 1)$ такво да*

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$$

за све $x, y \in X$. Тада вриједи:

- (i) *T има јединствену фиксну тачку $x^* \in X$;*
- (ii) *Даље, за свако $x_0 \in X$, итеративни низ $\{x_n\}$ дефинисан са $x_{n+1} = T(x_n)$ конвергира ка фиксној тачки x^* од T односно $Tx^* = x^*$.*

Напомена 2.2 *Услов $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ за све $x \neq y$ није довољан да осигура постојање фиксне тачке. Примијетимо да функција $T : [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, $T(x) = x + \frac{1}{x}$ нема фиксну тачку али испуњава наведени услов. Међутим, у компактном метричком простору овај услов имплицира постојање и јединственост фиксне тачке.*

Примјер 2.1 *На $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ посматрајмо $T(x) = ax + b$ са $|a| < 1$. Тада за свако $x, y \in \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= |ax + b - (ay + b)| \\ &= |a| \cdot |x - y| \leq \lambda |x - y| \quad (\lambda := |a| < 1), \end{aligned}$$

на је T контракција. Фиксна тачка је јединствена и добија се из $x^* = ax^* + b$, тј.

$$x^* = \frac{b}{1-a}.$$

За Пикарову итерацију $x_{n+1} = T(x_n)$ вриједи

$$x_n = a^n x_0 + (1 - a^n) x^*,$$

на из тога слиједи и процјена конвергенције

$$|x_n - x^*| = |a|^n |x_0 - x^*| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Примјер 2.2 На Банаховом простору $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ (са $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$) дефинишемо

$$(Tf)(t) = g(t) + \alpha \int_0^1 f(s) ds, \quad |\alpha| < 1, \quad g \in C[0,1].$$

За $f, h \in C[0,1]$ и сваки $t \in [0,1]$ вриједи

$$\begin{aligned} |(Tf)(t) - (Th)(t)| &= |\alpha| \left| \int_0^1 (f - h)(s) ds \right| \\ &\leq |\alpha| \int_0^1 |f - h|(s) ds \leq |\alpha| \|f - h\|_\infty, \end{aligned}$$

на $\|Tf - Th\|_\infty \leq |\alpha| \|f - h\|_\infty$; дакле T је контракција са константом $\lambda = |\alpha|$. Како је $C[0,1]$ комплетан, Банахов принцип даје јединствену фиксну тачку $f^* \in C[0,1]$ и процјену конвергенције $\|T^n f - f^*\|_\infty \leq |\alpha|^n \|f - f^*\|_\infty$.

Додатно, означимо $m := \int_0^1 f^*(s) ds$, тада из $f^*(t) = g(t) + \alpha m$ интеграцијом по t добијамо

$$m = \int_0^1 g(t) dt + \alpha m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\int_0^1 g(t) dt}{1 - \alpha}.$$

Према томе

$$f^*(t) = g(t) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^1 g(s) ds.$$

Примјер 2.3 На некомплетном метричком простору $X = (0,1)$ (са стандардном метриком) оператор $T(x) = \frac{x}{2}$ је контракција јер

$$|T(x) - T(y)| = \frac{1}{2} |x - y| \quad (\lambda = \frac{1}{2}).$$

Међутим, једина фиксна тачка у $\mathbb{R}$ је 0, а $0 \notin X$, па T нема фиксну тачку у X . За свако $x_0 \in (0,1)$ Пикарова итерација $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$ конвергира ка 0 изван X . Ово показује да у Банаховој теорему комплетност (или бар комплетност затвореног T -инваријантног подскупа) није техничка претпоставка, већ суштински услов.

Примјер 2.4 Посматрајмо на $[0,1]$ пресликавање $T(x) = x^2$. Фиксне тачке су рјешења једначине $x = x^2$, тј. $x \in \{0,1\}$. Ипак, T није контракција на $[0,1]$:

$$\sup_{x \neq y} \frac{|x^2 - y^2|}{|x - y|} = \sup_{x,y \in [0,1]} |x + y| = 2,$$

а такође $\sup_{x \in [0,1]} |T'(x)| = \sup_{x \in [0,1]} 2x = 2 > 1$. Дакле, постојање (па чак ни вишеструкост) фиксних тачака не имплицира контрактивност. Банахов услов је довољан за јединственост и глобалну конвергенцију, али није потребан за само постојање фиксне тачке. На мањим интервалима $[0,c]$ са $c < \frac{1}{2}$, T постаје контракција јер је Липшиц константа $0 \leq 2c < 1$, па је тада једина фиксна тачка 0 и Пикарова итерација конвергира према 0.

Иако контрактивност непосредно повлачи непрекидност и обезбјеђује постојање јединствене фиксне тачке, овај услов се показао прејаким, па је било природно трагати за слабијим претпоставкама које и даље гарантују сличне резултате. Први резултат који није захтијевао непрекидност дао је Качиополи. У наредним деценијама појавили су се резултати Канана, Рајха, Харди-Роџерса, Чатерџе и Замфирескуа. Кананова и Чатерџина теорема представљају два класична примјера неконвенционалних контракција, јер у својим условима не користе само удаљеност $d(x,y)$ већ и комбинације удаљености од тачака до њихових слика. Ове двије неједнакости имају сличну структуру и често се посматрају као симетричне варијанте једна друге. Рајхова теорема затим уводи интерполацију између Банаховог и Канановог принципа, допуштајући комбинацију услова која укључује и удаљеност $d(x,y)$ и изразе $d(x,Tx), d(y,Ty)$. На тај начин она обухвата ширу класу пресликавања од претходних резултата. Коначно, Харди-Роџерсова теорема пружа даљу генерализацију, јер узима у обзир свих пет типичних међусобних удаљености ($d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty)$ и $d(y,Tx)$) са одговарајућим тежинским коефицијентима. Тиме се добија јединствен оквир који укључује Банахов, Кананов, Чатерџин и Рајхов резултат као посебне случајеве.

Теорема 2.3 (Качиополи [77]) Нека је (X,d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање. Претпоставимо да постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је итерација T^m контрактивно пресликавање, тј.

$$d(T^m x, T^m y) \leq \alpha d(x,y), \quad \text{за све } x,y \in X,$$

за неку константу $\alpha \in (0,1)$. Тада T посједује јединствену фиксну тачку $x^* \in X$.

Примјер 2.5 На простору $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ посматрајмо пресликавање

$$T(x) = e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пресликавање T није контракција јер Липшиц константа износи $\max_{x \in \mathbb{R}} |T'(x)| = 1$.

Међутим, за другу итерацију добијамо

$$T^2(x) = e^{-e^{-x}}, \quad (T^2)'(x) = e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x}.$$

Како вриједи $0 < (T^2)'(x) \leq \frac{1}{e} < 1$ за све $x \in \mathbb{R}$, закључујемо да је T^2 контракција.

Према Качиополијевој теорему, T има јединствену фиксну тачку $x^* \in \mathbb{R}$, одређену рјешењем $x^* = e^{-x^*}$.

Примјер 2.6 Нека је $(X, \|\cdot\|) = (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ Банахов простор непрекидних функција на $[0,1]$ са супремум нормом. Дефинишимо оператор

$$(Tu)(t) = \int_0^t u(s) ds, \quad t \in [0,1].$$

Оператор T није контракција јер је $\|T\| = 1$. Међутим, за $m \in \mathbb{N}$ вриједи

$$\|T^m\| \leq \frac{1}{m!}.$$

Стога је T^m контракција за свако $m \geq 2$. Према Качиополијевој теорему, T посједује јединствену фиксну тачку, а то је тривијално $u^*(t) = 0$ за све $t \in [0,1]$.

Примјер 2.7 Нека је $(X, d) = ([0,1], |\cdot|)$ комплетан метрички простор. Пресликавање

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & x \in [0,1), \end{cases}$$

је прекидно и није контракција али T^2 је строга контракција (константа). За сваки $x \in [0,1]$ имамо:

$$T^2(x) = T(T(x)) = \begin{cases} T(\frac{1}{2}) = 0, & x = 1, \\ T(0) = 0, & x \in [0,1). \end{cases}$$

Дакле $T^2 \equiv 0$ је константно пресликавање; за све x, y вриједи $|T^2x - T^2y| = 0 \leq 0 \cdot |x - y|$, па је контракција с коефицијентом $\lambda = 0$. По Теорему 2.3, T има јединствену фиксну тачку $x^* = 0$.

Канан је 1968. године увео нову класу контрактивних пресликавања која повезује удаљености тачака са њиховим сликама.

Теорема 2.4 (Канан [79]) Нека је (X, d) комплетан метрички простор $T : X \rightarrow X$ пресликавање тако да постоји $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ и вриједи

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(Tx, x) + d(Ty, y)]$$

за све $x, y \in X$. Тада T има јединствену фиксну тачку у X .

Примјер 2.8 ([80]) Нека је $X = \mathbb{R}$ и d уобичајена метрика. За пресликавање $T : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 2], \\ \frac{1}{2}, & x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Очигледно T није непрекидно на $\mathbb{R}$, али јесте Кананова контракција са параметром $\alpha = \frac{1}{5}$.

Примјер 2.9 На сегменту $[0,1]$ дефинишимо пресликавање

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Ово пресликавање је прекидно у тачки $x = 1$, али и даље вриједи Кананова контрактивна неједнакост. За $\alpha = \frac{1}{3}$ разликујемо случајеве:

- $x, y \in [0,1)$, тада $T(x) = T(y) = \frac{1}{3}$, па је $d(Tx, Ty) = 0$, што тривијално задовољава услов.
- $x = 1$ и $y \in [0,1)$, тада $T(1) = 0$, $T(y) = \frac{1}{3}$, па је $d(Tx, Ty) = |0 - \frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$. За десну страну Кананове неједнакости добијамо

$$d(x, Tx) + d(y, Ty) = |1 - 0| + |y - \frac{1}{3}| \geq 1.$$

Према томе,

$$\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \cdot (1 + |y - \frac{1}{3}|),$$

па је услов испуњен.

Дакле, T је Кананово пресликавање са константом $\alpha = \frac{1}{3}$. Међутим, T није Банахова контракција. На крају, лако се уочава да $x^* = \frac{1}{3}$ задовољава $T(x^*) = x^*$, па је то једина фиксна тачка.

Примјер 2.10 ([79]) На $\mathbb{R}$ дефинишемо $T(x) = \frac{1}{2}x$. За свако $x, y \in \mathbb{R}$ вриједи

$$|T(x) - T(y)| = \frac{1}{2}|x - y|,$$

па је T Банахова контракција са константом $\alpha = \frac{1}{2}$. Покажимо сада да T није Кананово пресликавање. Претпоставимо супротно и за $y = -x$ ($x \neq 0$) вриједи

$$|T(x) - T(y)| = |\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(-x)| = |x|.$$

С друге стране, у Канановој неједнакости имамо

$$|x| \leq \alpha(|x - Tx| + |y - Ty|) = \alpha(|x - \frac{1}{2}x| + |-x - \frac{1}{2}(-x)|) = \alpha(|\frac{1}{2}x| + |\frac{1}{2}x|) = \alpha|x|.$$

То би значило да $\alpha \geq 1$, што је немогуће јер се тражи $\alpha < 1$. Дакле, ово пресликавање није Кананово, иако је Банахова контракција. Према томе Кананова и Банхова контракција нису еквивалентне.

Теорема 2.5 (Чатерџа [81]) Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање за које постоји $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ тако да

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Ty) + d(y, Tx)], \quad \forall x, y \in X.$$

Тада T има јединствену фиксну тачку у X .

Примјер 2.11 Нека је $X = [0,1]$ са стандардном метриком $d(x,y) = |x - y|$. Пресликавање

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

је T Чатеруина контракција са константом $\alpha = \frac{1}{3} \in (0, \frac{1}{2})$, али T није Банахова контракција на $[0,1]$.

Теорема 2.6 (Рајх [82]) Нека је (X,d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање. Ако постоји $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1)$ тако да

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x,y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)$$

за све $x, y \in X$, гдје $\alpha + \beta + \gamma < 1$, тада T има јединствену фиксну тачку у X .

Теорема 2.7 (Харди-Роџерс [83]) Нека је (X,d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање за које постоје ненегативни бројеви $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ са

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 < 1,$$

тако да за све $x, y \in X$ вриједи

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha_1 d(x,y) + \alpha_2 d(x, Tx) + \alpha_3 d(y, Ty) + \alpha_4 d(x, Ty) + \alpha_5 d(y, Tx).$$

Тада T има јединствену фиксну тачку у X .

Примјер 2.12 Нека је d стандардна метрика на $\mathbb{R}$. Посматрајмо функцију

$$T : [0,1] \rightarrow [0,1], \quad T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

Очигледно T је прекидна функција, па не можемо примијенити Банахов принцип контракције. Даље уочимо

$$d(T\frac{1}{2}, T1) = d(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2},$$

односно

$$d(T\frac{1}{2}, T1) = \frac{1}{2} \left(d(\frac{1}{2}, T\frac{1}{2}) + d(1, T1) \right) = \frac{1}{2} \left(d(\frac{1}{2}, 0) + d(1, \frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{2},$$

па није испуњен услов за Кананову контракцију.

Слично

$$d(T\frac{1}{2}, T1) = \frac{1}{2} \left(d(\frac{1}{2}, T1) + d(1, T\frac{1}{2}) \right) = \frac{1}{2} \left(d(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + d(1, 0) \right) = \frac{1}{2}.$$

па T не испуњава услове за контаркцију Чатеруе. Слиједи да је T је Харди-Роџерс контракција са параметрима $\alpha_1 = \frac{1}{10}$, $\alpha_2 = \frac{1}{9}$, $\alpha_3 = \frac{1}{8}$, $\alpha_4 = \frac{1}{7}$, $\alpha_5 = \frac{1}{2}$.

Замфиреску је објединио више контрактивних неједнакости у један резултат.

Теорема 2.8 (Замфиреску [84]) *Ако је (X, d) комплетан и постоји $a \in (0, 1)$ такво да за све $x, y \in X$ вриједи бар једна од:*

$$\begin{aligned} (Z1) \quad & d(Tx, Ty) \leq a d(x, y), \\ (Z2) \quad & d(Tx, Ty) \leq a [d(x, Tx) + d(y, Ty)], \\ (Z3) \quad & d(Tx, Ty) \leq a [d(x, Ty) + d(y, Tx)], \end{aligned}$$

онда T има јединствену фиксну тачку.

Примјер 2.13 ([84]) *Пресликавање*

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & |x| \geq 1, \\ \frac{1}{4}x, & |x| < 1, \end{cases}$$

је дио по дио контракција и испуњава услове Замфиреског али не и Банаха.

Ћирић је дао општи оквир који максимумом удаљености укључује претходне типове као посебне случајеве. У литератури наведена класа функција је позната као квазиконтракције.

Дефиниција 2.2 (Ћирић [85]) *Пресликавање $T : X \rightarrow X$ назива се квазиконтракција ако постоји $q \in (0, 1)$ такав да*

$$d(Tx, Ty) \leq q \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty)\}, \quad \forall x, y \in X.$$

Теорема 2.9 (Ћирић [85]) *Ако је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ квазиконтракција, онда T има јединствену фиксну тачку и итерација $T^n x_0$ конвергира према тој тачки.*

Теорема 2.10 (Ћирић [85]) *Нека је (X, d) комплетан. Ако за неке $a, b \geq 0$ гдје $a + b < 1$ вриједи*

$$d(Tx, Ty) \leq a d(x, y) + b \max \{d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\},$$

онда T има јединствену фиксну тачку.

Дефиниција 2.3 (Ћирић [85]) *Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је Ћирићева контракција ако постоји константа $q \in (0, 1)$ таква да за све $x, y \in X$ вриједи*

$$d(Tx, Ty) \leq q \max \left\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2} \right\}.$$

Теорема 2.11 (Ћирић [85]) *Ако је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ Ћирићева контракција, тада T има јединствену фиксну тачку $x^* \in X$, а низ $\{T^n x_0\}$ конвергира према x^* за свако почетно $x_0 \in X$.*

Претходне класичне контракције су имале за заједничку идеју промјену услова са десне стране неједнакости; односно посматрале су се различите комбинације удаљености тачке и слике. У многим проблемима из примијењене математике и операторне теорије, природно се јављају пресликавања која нису линеарно контрактивна, али ипак посједују слична својства конвергенције. Да би се обухватили такви случајеви, уведене су различите нелинеарне контракције, које опуштају услов контракције и замјењују га сложенијим, али флексибилнијим неједнакостима. У наредном дијелу посматрамо разне верзије нелинеарних контракција.

Дефиниција 2.4 (Ррудс [86, 87]) *Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је слаба контракција уколико постоји константа $\alpha \in (0, 1)$ и функција*

$$\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

која је непрекидна и таква да вриједи $\varphi(t) = 0 \iff t = 0$, при чему је за свако $x, y \in X$ испуњен услов

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \varphi(d(x, y)).$$

Теорема 2.12 (Ррудс [87]) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека је $T : X \rightarrow X$ слаба контракција. Претпоставимо додатно да постоји константа $\eta \in [0, 1 - \alpha)$ таква да*

$$\varphi(t) \leq \eta t \quad \text{за свако } t \geq 0.$$

Тада вриједи:

1. *T има јединствену фиксну тачку $x^* \in X$;*
2. *за свако почетно $x_0 \in X$ низ дефинисан Пикаровом итерацијом $x_{n+1} = Tx_n$ конвергира према x^* ;*
3. *уз $q := \alpha + \eta \in (0, 1)$ вриједи априорна процјена*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x_1, x_0) \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Дефиниција 2.5 (Ррудс [86, 87]) *Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је φ -слаба контракција ако постоји функција*

$$\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

која је ненегативна, непрекидна и таква да вриједи $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t) > 0$ за свако $t > 0$, при чему за свако $x, y \in X$ вриједи

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y)).$$

Теорема 2.13 (Ррудс [87]) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ φ -слаба контракција у смислу претходне дефиниције. Тада:*

1. T има јединствену фиксну тачку $x^* \in X$;
2. за свако почетно $x_0 \in X$ Пикаров низ $x_{n+1} = Tx_n$ конвергира ка x^* ;
3. ако означимо $s_n := d(x_n, x_{n+1})$, вриједи

$$s_{n+1} \leq s_n - \varphi(s_n), \quad s_n \downarrow 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(s_n) < \infty;$$

4. (апостериорна процјена) за сваки $n \in \mathbb{N}$ вриједи

$$d(x_n, x^*) \leq \sum_{k=n}^{\infty} s_k.$$

Напомена 2.3 За $\alpha \in (0,1)$ и $\varphi(t) \geq (1 - \alpha)t$, из $d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \varphi(d(x, y))$ слиједи Банахова контракција $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$.

Дефиниција 2.6 За пресликавање $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) кажемо да је одозго полунепрекидно у тачки $c \in A$ са десна ако важи да је $\limsup_{t \rightarrow c^+} \psi(t) \leq \psi(c)$.

Дефиниција 2.7 ([78]) Нека су $\varphi, \psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ такве да је φ одозго полунепрекидна и неоппадајућа, а ψ одоздо полунепрекидна и нерастућа. Пресликавање T је $(\varphi - \psi)$ -слаба контракција ако

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) - \psi(d(x, y)), \quad \forall x, y \in X,$$

при чему вриједи:

$$(i) \quad \varphi(0) - \psi(0) = 0 \text{ и } \varphi(t), \psi(t) > 0 \text{ за све } t > 0;$$

$$(ii) \quad \varphi(t) - \psi(t) < t \text{ за све } t > 0.$$

Напомена 2.4 Банахова контракција је посебан случај: уз $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$

$$d(Tx, Ty) \leq (1 + \lambda)d(x, y) - (1 - \lambda)d(x, y) = 2\lambda d(x, y),$$

што одговара избору $\varphi(t) = (1 + \lambda)t$, $\psi(t) = (1 - \lambda)t$.

Дефиниција 2.8 (Меир-Килер [88]) T је Меир-Килер контракција ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да

$$\varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(Tx, Ty) < \varepsilon.$$

Теорема 2.14 (Меир-Килер [88]) Нека је (X, d) комплетан и T је Меир-Килер пресликавање. Тада T има јединствену фиксну тачку.

Примјер 2.14 Нека је (X, d) метрички простор и T Банахова контракција са параметром λ . Узмемо произвољно $\varepsilon > 0$ и дефинишимо $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) > 0$.

Ако је $\varepsilon \leq d(x,y) < \varepsilon + \delta(\varepsilon)$, тада вриједи $d(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y) < \lambda(\varepsilon + \delta(\varepsilon))$.

Избором $\delta(\varepsilon)$ добијамо

$$\lambda(\varepsilon + \delta(\varepsilon)) = \lambda\varepsilon + \lambda \cdot \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) = \frac{1}{2}(\lambda + 1)\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda\varepsilon = \varepsilon.$$

Дакле, $d(Tx,Ty) < \varepsilon$, односно T је Меир-Киелер контракција.

Дефиниција 2.9 (Бојд-Вонг [89]) Нека је $\varphi : (0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$ одозго полунепрекидна с десна и $\varphi(t) < t$ за $t > 0$. Пресликавање T задовољава услов φ -контракције ако

$$d(Tx,Ty) \leq \varphi(d(x,y)), \quad \forall x,y \in X.$$

Теорема 2.15 (Бојд-Вонг [89]) Ако је (X,d) комплетан и T је φ -контракција, тада T има јединствену фиксну тачку.

Примјер 2.15 Нека је $X = [0,1]$ са стандардном метриком $d(x,y) = |x - y|$. Дефинишимо $T(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. Очигледно, T није Банахова контракција. Наиме, за x,y близу нуле вриједи

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{|x - y|} = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \rightarrow +\infty \quad \text{кад } x,y \rightarrow 0^+.$$

Дакле, Липшиц константа не постоји и T није Банахова контракција.

Међутим, за $x,y \in [0,1]$ добијамо

$$d(Tx,Ty) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 \leq |x - y| \leq \varphi(d(x,y)), \quad \text{гдје је } \varphi(t) = \sqrt{t}, \quad t \geq 0.$$

Примијетимо да је φ десно полунепрекидна и да вриједи $\varphi(t) < t$ за свако $t \in (0,1)$. Дакле, T је Бојд-Вонг контракција.

Дефиниција 2.10 (Јунг [90]) За $f,g : X \rightarrow X$ кажемо да чине Јунгов контракциони пар ако

$$d(fx,fy) \leq \alpha d(gx,gy) \quad (\forall x,y \in X)$$

за неки $\alpha \in [0,1)$.

Теорема 2.16 (Јунг [90]) Нека је (X,d) комплетан. Ако $f,g : X \rightarrow X$ комутирају, $f(X) \subseteq g(X)$ и (f,g) је Јунгов контракциони пар, тада f и g имају јединствену заједничку фиксну тачку x^* .

Примјер 2.16 Узмимо $X = [0,\infty)$, $g(x) = 2x$, $f(x) = \frac{3}{2}x$. Тада $f(X) \subseteq g(X)$ и $fg = gf$. За све x,y вриједи

$$d(fx,fy) = \frac{3}{2}|x - y| \leq 0.8 \cdot 2|x - y| = \alpha d(gx,gy) \quad (\alpha = 0.8 < 1).$$

По Јунговој теореме, постоји јединствена заједничка фиксна тачка $x^* = 0$.

Дефиниција 2.11 (Герети [91]) Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је Геретијева контракција ако постоји $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ са својством:

$$\beta(t_n) \rightarrow 1 \Rightarrow t_n \rightarrow 0,$$

таква да за све $x, y \in X$ вриједи

$$d(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)) d(x, y).$$

Теорема 2.17 (Герети [91]) Геретијева контракција има јединствену фиксну тачку на комплетном метричком простору.

Примјер 2.17 (Герети [91]) Нека је $X = [0, \infty)$ и $T(x) = \frac{x}{1+x}$. За $t = |x - y|$ вриједи

$$|T(x) - T(y)| = \frac{|x - y|}{(1+x)(1+y)} \leq \frac{t}{1+t} = \beta(t)t, \quad \beta(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Јасно је $\beta : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ и ако $\beta(t_n) \rightarrow 1$ онда $t_n \rightarrow 0$. Дакле, T је Геретијева контракција и јединствена фиксна тачка је 0.

Дефиниција 2.12 (Интерполативна Кананова контракција [92]) Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ интерполативна Кананова контракција ако постоје константе $\lambda \in [0, 1)$ и $\alpha \in (0, 1)$ такве да

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Tx)]^\alpha \cdot [d(y, Ty)]^{1-\alpha}, \quad \forall x, y \in X.$$

Теорема 2.18 (Карапинар [92]) Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ интерполативна Кананова контракција, тј. постоје $\lambda \in [0, 1)$ и $\alpha \in (0, 1)$ такви да

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda [d(x, Tx)]^\alpha \cdot [d(y, Ty)]^{1-\alpha}, \quad \forall x, y \in X.$$

Тада T има јединствену фиксну тачку $x^* \in X$.

Примјер 2.18 ([92]) Узмимо скуп $X = \{x, y, z, w\}$ са метриком d датом:

$$\begin{aligned} d(x, x) &= d(y, y) = d(z, z) = d(w, w) = 0, \\ d(x, y) &= 3, d(x, z) = 4, d(y, z) = \frac{3}{2}, \\ d(x, w) &= \frac{5}{2}, d(y, w) = 2, d(z, w) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Нека је пресликавање $T : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$T(x) = w, \quad T(y) = x, \quad T(z) = y, \quad T(w) = x.$$

Тада T није Кананова контракција, али за $\alpha = \frac{1}{8}$ и $\lambda = \frac{9}{10}$ вриједи интерполативна неједнакост

$$d(Tu, Tv) \leq \lambda [d(u, Tu)]^\alpha [d(v, Tv)]^{1-\alpha}, \quad \forall u, v \in X,$$

па је T интерполативна Кананова контракција, а јединствена фиксна тачка је x .

Теорема 2.19 (Сузуки [93, 94]) *Нека је (X, d) комплетан и $T : X \rightarrow X$ такво да за свака $x, y \in X$ вриједи импликација*

$$\frac{1}{2} d(x, Tx) < d(x, y) \implies d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \quad \text{за неки } \lambda < 1.$$

Тада T има јединствену фиксну тачку и Пикарове итерације конвергирају.

Примјер 2.19 *На интервалу $[0, 1]$ дефинишимо пресликавање*

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Дакле, T није Банахова контракција. Ипак, задовољава Сузукијев услов: за $x = 1$ имамо $\frac{1}{2} d(x, Tx) < d(x, y)$ односно $\frac{1}{2} \cdot 1 < |1 - y|$, тј. $y < \frac{1}{2}$; тада

$$|T(1) - T(y)| = \frac{y}{2} \leq \frac{1}{2} |1 - y|,$$

на услов вриједи (нпр. са $\lambda = \frac{1}{2}$). За остале парове (x, y) провјера је тривијална.

Мотивација за нови резултат је дошла из два правца, први је посматрање фиксне тачке за вишезначна пресликавања а други прелазак са строго контрактивних услова на функцијске услове и варијациону логику (минимизација доње полунепрекидних функционала на комплетним просторима). Тиме се фиксне тачке повезују са принципима оптимизације и стабилности.

Теорема 2.20 (Надлер [95]) *Ако је (X, d) комплетан, а $T : X \rightarrow CB(X)$ задовољава*

$$H(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y), \quad \lambda \in [0, 1),$$

гдје је H Хауздорфова метрика, тада постоји $x^ \in X$ са $x^* \in T(x^*)$.*

Примјер 2.20 *На $[0, 1]$ посматрамо $T(x) = \{\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\}$. Тада*

$$H(Tx, Ty) = \max \left\{ \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right|, \left| \frac{x+1}{2} - \frac{y+1}{2} \right| \right\} = \frac{1}{2} |x - y|,$$

на је услов задовољен за $\lambda = \frac{1}{2}$.

Лема 2.1 (Екеланд [96]) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ доње полунепрекидна и ограничена одоздо. Тада постоји $x^* \in X$ такав да*

$$f(x^*) \leq f(y) + d(y, x^*) \quad \text{за сваки } y \in X.$$

Теорема 2.21 (Каристи [97]) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $\varphi : X \rightarrow [0, \infty)$ доње полунепрекидна. Ако пресликавање $T : X \rightarrow X$ испуњава*

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx) \quad \text{за сваки } x \in X, \quad (2.1)$$

онда T има фиксну тачку.

Напомена 2.5 Ако је T Банахова контракција са коефицијентом $\alpha \in (0,1)$, узмимо

$$\varphi(x) := \frac{1}{1-\alpha} d(x, Tx).$$

Тада је

$$\varphi(x) - \varphi(Tx) = \frac{d(x, Tx) - d(Tx, T^2x)}{1-\alpha} \geq \frac{(1-\alpha) d(x, Tx)}{1-\alpha} = d(x, Tx).$$

Дакле (2.1) вриједи, па је Банахов принцип посебан случај Каристијеве теореме.

Каристијева теорема и Екеландов варијациони принцип међусобно су еквивалентни.

Напомена 2.6 За F -контракције, које је увео Вардовски [98] и које представљају једно од најзначајнијих савремених проширења Банаховог принципа, издвајамо посебно поглавље у којем ће бити детаљно размотрене њихове особине и примјене.

2.1.1 Проширење Харди-Роџерс контракције

Горницки [80,99,100] је проширио Кананову контракцију разматрајући општије услове који укључују компактност и асимптотску регуларност пресликавања, при чему је напустио ограничење параметра из класичне дефиниције. Додатно је показао да и у овим релаксираним околностима важи постојање и јединственост фиксне тачке, уз прецизне процјене брзине конвергенције Пикарових итерација. На основу наведеног, уводимо нову дефиницију која проширује класични услов и омогућава добијање нових резултата за Харди-Роџерсове контракције у компактном метричком простору.

Дефиниција 2.13 Нека је (X, d) метрички простор и T пресликавање са X у самог себе. Пресликавање T је Харди-Роџерс типа ако постоје $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in [0, +\infty)$ такви да

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha_1 d(x, y) + \alpha_2 d(x, Tx) + \alpha_3 d(y, Ty) + \alpha_4 d(x, Ty) + \alpha_5 d(y, Tx), \quad x, y \in X.$$

Аналогно, T је строго Харди-Роџерс пресликавање ако постоје $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in [0, +\infty)$ тако да

$$d(Tx, Ty) < \alpha_1 d(x, y) + \alpha_2 d(x, Tx) + \alpha_3 d(y, Ty) + \alpha_4 d(x, Ty) + \alpha_5 d(y, Tx) \quad \text{за } x \neq y.$$

Напомена 2.7 За $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ добијамо Банахову контракцију. За $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ и $\alpha_2 + \alpha_3 < 1$ добијамо Кананову контракцију, а за $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и $\alpha_4 + \alpha_5 < 1$ добијамо Чатеруину контракцију.

Теорема 2.22 Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање Харди-Роџерс типа гдје $\alpha_3 + \alpha_4 < 1$. Нека су a и b константе такве да $0 \leq a < 1$ и $b > 0$. Ако за произвољан $x \in X$ постоји $r \in X$ тако да

$$d(r, Tr) \leq a \cdot d(x, Tx) \quad \text{и} \quad d(r, x) \leq b \cdot d(x, Tx), \tag{2.2}$$

тада T има бар једну фиксну тачку.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Из (2.2) постоји $x_1 \in X$ тако да

$$d(x_1, Tx_1) \leq ad(x_0, Tx_0) \text{ и } d(x_1, x_0) \leq bd(x_0, Tx_0).$$

Слично, постоји x_2 тако да

$$d(x_2, Tx_2) \leq ad(x_1, Tx_1) \text{ и } d(x_2, x_1) \leq bd(x_1, Tx_1).$$

На основу претходног можемо конструисати низ $\{x_n\} \subset X$ који задовољава

$$d(x_{n+1}, Tx_{n+1}) \leq ad(x_n, Tx_n) \text{ и } d(x_{n+1}, x_n) \leq bd(x_n, Tx_n),$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Из

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq bd(x_n, Tx_n) \leq a^n bd(x_0, Tx_0)$$

лако закључујемо да је $\{x_n\}$ Кошијев низ у X па на основу комплетности X постоји $x^* \in X$ тако да

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*.$$

Даље слиједи

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx^*) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_n) + d(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_n) + \alpha_1 d(x_n, x^*) + \alpha_2 d(x_n, Tx_n) + \alpha_3 d(x^*, Tx^*) \\ &\quad + \alpha_4 d(x_n, Tx^*) + \alpha_5 d(x^*, Tx_n) \\ &\leq (1 + \alpha_1) d(x^*, x_n) + (1 + \alpha_2) d(x_n, Tx_n) + \alpha_3 d(x^*, Tx^*) \\ &\quad + \alpha_4 [d(x_n, x^*) + d(x^*, Tx^*)] + \alpha_5 [d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_n)] \\ &\leq (1 + \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5) d(x^*, x_n) + (1 + \alpha_2 + \alpha_5) d(x_n, Tx_n) + (\alpha_3 + \alpha_4) d(x^*, Tx^*), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5}{1 - \alpha_3 - \alpha_4} d(x^*, x_n) + \frac{1 + \alpha_2 + \alpha_5}{1 - \alpha_3 - \alpha_4} d(x_n, Tx_n) \\ &\leq \frac{1 + \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5}{1 - \alpha_3 - \alpha_4} d(x^*, x_n) + \frac{1 + \alpha_2 + \alpha_5}{1 - \alpha_3 - \alpha_4} a^n d(x_0, Tx_0) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

када $n \rightarrow +\infty$ и имамо $Tx^* = x^*$ тј. x^* је фиксна тачка пресликавања T . $\square$

У следећој теореме посматрамо компактни метрички простор и строго Харди-Роцера непрекидно пресликавање.

Теорема 2.23 Нека је (X, d) компактан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Ако је T строго Харди-Роцера пресликавање и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \leq 1$ тада T има фиксну тачку x^* , тј. за свако $x \in X$ итеративни низ $\{T^n x\}$ конвергира x^* .

Доказ. Функција $g : X \rightarrow [0, +\infty)$, $g(x) = d(x, Tx)$ је непрекидна и простор X је компактан па постоји $x^* \in X$ такво да $f(x^*) = \inf\{g(x) : x \in X\}$. Из претпоставке

$x^* \neq Tx^*$ слиједи

$$\begin{aligned} d(Tx^*, T^2x^*) &< \alpha_1 d(x^*, Tx^*) + \alpha_2 d(x^*, Tx^*) + \alpha_3 d(Tx^*, T^2x^*) \\ &\quad + \alpha_4 d(x^*, T^2x^*) + \alpha_5 d(Tx^*, Tx^*) \\ &< (\alpha_1 + \alpha_2) d(x^*, Tx^*) + \alpha_3 d(Tx^*, T^2x^*) + \alpha_4 (d(x^*, Tx^*) + d(Tx^*, T^2x^*)) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) d(x^*, Tx^*) + (\alpha_3 + \alpha_4) d(Tx^*, T^2x^*), \end{aligned}$$

односно

$$d(Tx^*, T^2x^*) < \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{1 - \alpha_3 - \alpha_4} d(x^*, Tx^*) \quad (2.3)$$

На основу симетрије α_2 са α_3 и α_4 са α_5 у (2.3) добијамо

$$d(Tx^*, T^2x^*) < \frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5}{1 - \alpha_2 - \alpha_5} d(x^*, Tx^*).$$

Како је

$$\min \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{1 - \alpha_3 - \alpha_4}, \frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5}{1 - \alpha_2 - \alpha_5} \right\} \leq 1$$

имамо

$$g(Tx^*) = d(Tx^*, T^2x^*) < d(x^*, Tx^*) = g(x^*).$$

Контрадикција. Према томе, x^* је јединствена фиксна тачка.

За други, дио доказа дефинишимо низ $x_n = T^n x$. С обзиром да је случај $x = x^*$ тривијалан претпоставимо да је $x \neq x^*$. Даље имамо

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x, T^n x) &< \alpha_1 d(T^n x, T^{n-1}x) + \alpha_2 d(T^n x, T^{n+1}x) + \alpha_3 d(T^{n-1}x, T^n x) \\ &\quad + \alpha_4 d(T^n x, T^n x) + \alpha_5 d(T^{n-1}x, T^{n+1}x) \\ &< (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) d(T^n x, T^{n-1}x) + (\alpha_2 + \alpha_5) d(T^n x, T^{n+1}x). \end{aligned}$$

Слиједи $d(T^{n+1}x, T^n x) < kd(T^n x, T^{n-1}x) < d(T^n x, T^{n-1}x) < \dots < d(Tx, x)$, гдје је

$$k = \min \left\{ \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4}{1 - \alpha_3 - \alpha_4}, \frac{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5}{1 - \alpha_2 - \alpha_5} \right\}.$$

Закључујемо да је низ $z_n = d(T^{n+1}x, T^n x)$ ненегативан и опадајући односно конвергентан. Претпоставимо $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z > 0$. Из компактности X , низ $\{T^n x\}$ садржи конвергентан подниз $\{T^{n_i}x\}$ тако да $T^{n_i}x \rightarrow r \in X$ за $i \rightarrow +\infty$.

Дакле $0 < z = \lim_{i \rightarrow +\infty} d(T^{n_i+1}x, T^{n_i}x) = d(Tr, r)$ тј. $r \neq x^*$. Штавише, из (2.3)

$$z = \lim_{i \rightarrow +\infty} (T^{n_i+2}x, T^{n_i+1}x) = d(T^2r, Tr) < d(Tr, r) = z,$$

што је немогуће, па слиједи $z = 0$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^{n+1}x, x^*) \leq z = 0$. Коначно, добијамо да низ $T^{n+1}x$ конвергира x^* .

□

2.1.2 Фиксна тачка у b -метричким просторима

У наставку дајемо преглед резултата из теорије фиксне тачке у b -метричким просторима. За резултате у осталим генерализацијама погледати [101–105].

Појам квазиметричког простора, који ће касније бити познат као b -метрички простор, разматран је почетком осамдесетих година. У раду Вулпеа и сарадника [10] анализирана је тополошка структура квазиметричких простора. Иако у том периоду још нису формулисани резултати о фиксним тачкама у таквим просторима, отворена су врата за даља истраживања. Први резултат о фиксној тачки у овом оквиру дао је И. А. Бахтин (1989) [12]. Он је увео термин „скоро метрички простор” и доказао верзију Банаховог принципа контракције. Његов резултат показује да и у општијем окружењу, гдје неједнакост троугла вриједи само до одређеног коефицијента $K \geq 1$ контрактивна пресликавања и даље имају јединствену фиксну тачку у комплетном простору. На овај начин Бахтин је генерализовао Банахов принцип и поставио темеље будућих истраживања.

Током деведесетих година долази до интензивног развоја. Стефан Червик (1993) [9], независно од Бахтина, уводи термин „ b -метрички простор” и даје низ резултата о фиксним тачкама у овом контексту. Његов рад представља прекретницу јер је показао да Банахов принцип контракције може бити формулисан и доказан у b -метричким просторима, укључујући и φ -контракције. У истом периоду, Василе Беринде (1993) [106] независно проширује Бахтинове резултате на шире класе контрактивних услова. Касније, 1996. године, Беринде [107] разматра итеративне низове оператора у квазиметричким просторима и њихову конвергенцију ка фиксним тачкама. Године 1997. објављује монографију [108] у којој систематизује и проширује познате резултате о уопштеним контракцијама, укључујући и оне у b -метричким просторима. Крајем деценије, Червик (1998) [28] шири оквир на вишезначна пресликавања и доказује да и у овом контексту постоје фиксне тачке.

Почетком миленијума истраживања привремено успоравају. Червик заједно са Длутеком и Сингом (2001) разматра стабилност итеративних процедура у b -метричким просторима [109]. Обнова интересовања долази средином деценије када Синг, Батнагар и Мишра (2005) доказују теорему о фиксној тачки за класу уопштених вишезначних контракција [110]. Крајем 2000-их Борицеану (2008) [111] и Олатинво (2008) [112] проширују теорију на хибридна пресликавања, што значајно шири оквир.

У наредној деценији слиједи прави процват. Пачурар (2010) [113] уклања техничко ограничење претпоставке о ограничености орбите, чиме су резултати Бахтина и Червика додатно проширени. Ајди, Бота, Карашнар и Моради (2012) [114] доказују заједничку теорему о фиксној тачки за слабе φ -контракције, а Рошан и сарадници (2013) [115] разматрају (ψ, φ) -контрактивне услове у уређеним b -метричким просторима.

У истом периоду активно доприносе и домаћи аутори: Раденовић и сарадници развијају варијанте Кананових, Рајхових и интерполативних контракција [116], док Митровић и Аранђеловић обрађују примјене у диференцијалним једначинама и нумеричким методама [117, 118]. Карапинар у сарадњи са домаћим ауторима, обја-

вљује велики број радова и систематизује $(\varphi - \psi)$ -контракције, интерполативне и F -контракције у овом оквиру.

Уласком у 2020-е, истраживања постају још разноврснија. Червик (2021) показује да Брауерова и Шаудерова теорема о фиксној тачки могу бити успјешно доказане у b -метричким просторима [119]. Ајди, Карапинар, Митровић, Раденовић и Аранђеловић доприносе развоју нових контракција (нпр. $\mathcal{F}$ -контракција, симулационе функције) и ширењу на парцијалне и проширене b -метричке просторе [120–125]. Њихови резултати показују како овај концепт има значајан потенцијал за примјене у диференцијалним и интегралним једначинама, оптимизацији и анализи фрактала. На тај начин, b -метрички простори су током последњих деценија постали природан оквир за готово све класичне и модерне варијанте теорема о фиксним тачкама.

3. Процјене растојања и критеријуми конвергенције у b -метричким просторима

У овој глави дајемо процјену растојања $d(x_n, x^*)$ за итеративни низ у b -метричком простору који испуњава контрактивни услов $d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1})$, за свако $n \in \mathbb{N}$, гдје је $\lambda \in (0, 1)$. Као посљедицу добијамо нови доказ конвергенције итеративног низа и процјену за Банахову, Рајхову и Кананову контракцију.

Једна од посљедица Банаховог става о контракцијама [8] је априорна и апостериорна оцјена Пикаровог итеративног низа. Априорна оцјена се користи на почетку за процјену броја корака неоподних за добијање дате тачности. Апостериорна процјена може се искористити у међукорацима за процјену брзине конвергенције у односу на предложену са априорном процјеном.

Посљедица 3.1 (Банах [8]) *Нека је $T : X \rightarrow X$ контракција на комплетном метричком простору X , x_0 почетна тачка Пикаровог итеративног низа $x_{n+1} = Tx_n$ и x^* фиксна тачка пресликавања T . Вриједи следеће процјене*

$$(i) \quad d(x_n, x^*) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \cdot d(x_0, x_1) \text{ (априорна);}$$

$$(ii) \quad d(x_{n+1}, x^*) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot d(x_n, x_{n+1}) \text{ (апостериорна);}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Посебна пажња у савременом истраживању посвећена је развоју разних неједнакости и контрактивних услова, као и метода за прецизне процјене грешака, чиме се обезбјеђује дубље разумијевање конвергенције Пикарових низова и стабилности итеративних процеса у b -метричким просторима [59, 72, 126–136]. Међу првим значајнијим резултатима након Червиковог рада [9] истиче се допринос Синга, Крола и Червика [126] у којем су уведене нове апроксимативне процјене у b -метричким просторима, чиме је унапријеђена анализа конвергенције итеративних процеса.

Лема 3.1 [126] *Нека је (X, d) b -метрички простор са константом $s \geq 1$ и нека је $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ низ за који постоји $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ такав да*

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \lambda d(x_n, x_{n+1}) \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Тада је низ $\{x_n\}$ Кошијев.

Како је претходна лема имала ограничења јер је зависила од константе s и није давала довољно прецизан критеријум за Кошијеве низове, Сузуки [127] је ову слабост отклонио и доказао основну неједнакост у b -метричким просторима, чиме је обезбедио јачи услов за итеративне и Кошијеве низове.

Лема 3.2 ([127]) *Нека је (X, d) b -метрички простор са константом $s \geq 1$. За сваки $n \in \mathbb{N}$ и сваку $(x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1}$ вриједи*

$$d(x_0, x_n) \leq s^{f(n)} \sum_{j=0}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}). \quad (3.1)$$

У претходној лемџ користиџо функцију

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad f(n) = -\lfloor -\log_2 n \rfloor,$$

тако да је $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = f(4) = 2$, $f(5) = \dots = f(8) = 3$, итд.

Доказ. ([127]) Тврдиџо да за свако n вриједи $2^{f(n)-1} < n \leq 2^{f(n)}$. За $n = 1$ је (3.1) очигледно. Претпоставиџо да (3.1) вриједи за свако $n \leq 2^k$ за неко $k \geq 0$ и узџиџо n гдје $2^k < n \leq 2^{k+1}$. Тада је $f(n) = k + 1$, $f(2^k) = k$ и $f(n - 2^k) \leq k$. Примјеном неједнакости троугла на разлагање кроз тачку x_{2^k} и из индуктивне претпоставке добијаџо

$$\begin{aligned} d(x_0, x_n) &\leq s d(x_0, x_{2^k}) + s d(x_{2^k}, x_n) \\ &\leq s \cdot s^{f(2^k)} \sum_{j=0}^{2^k-1} d(x_j, x_{j+1}) + s \cdot s^{f(n-2^k)} \sum_{j=2^k}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) \\ &\leq s^{k+1} \sum_{j=0}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}) = s^{f(n)} \sum_{j=0}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), \end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

Напомена 3.1 За $s = 1$ (обичан метрички простор) (3.1) се своди на тривијалну оцџну $d(x_0, x_n) \leq \sum_{j=0}^{n-1} d(x_j, x_{j+1})$. За $s > 1$ кључан је логаритамски експонент $f(n) = -\lfloor -\log_2 n \rfloor$, добијџен диадичком декомпозицијом пута $x_0 \rightarrow x_n$.

Лема 3.3 ([127]) *Нека је (X, d) b -метрички простор са константом $s \geq 1$, и нека је $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ низ за који постоји $r \in [0, 1)$ тако да*

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq r d(x_n, x_{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Тада је низ $\{x_n\}$ Кошијев.

Доказ. ([127]) Ако је $r = 0$, тврђење је очигледно, па претпоставиџо $r > 0$. Изабериџо $\ell \in \mathbb{N}$ тако да је $s r^{2^\ell} < 1$. Нека је $m > n$.

1° $m \leq n + 2^\ell$. Из (3.1) за сегмент $(x_n, \dots, x_m)$ и из (3.2) закључујемо

$$d(x_n, x_m) \leq s^{f(m-n)} \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq s^\ell \sum_{j=n}^{\infty} r^{j-1} d(x_1, x_2) = s^\ell r^n \frac{d(x_1, x_2)}{r(1-r)}.$$

2° $m > n + 2^\ell$. Уврстимо $\mu = \lfloor \frac{m-n}{2^\ell} \rfloor$ и примјенимо неједнакост троугла у блоковима дужине 2^ℓ , а затим и (3.2). Добијамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=0}^{\mu-1} s^{i+1} d(x_{n+i2^\ell}, x_{n+(i+1)2^\ell}) + s^\mu d(x_{n+\mu 2^\ell}, x_m) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\mu-1} s^{i+\ell+1} r^{n+i2^\ell} C + s^{\mu+\ell} r^{n+\mu 2^\ell} C \leq r^n C \sum_{i=0}^{\infty} s^{i+\ell+1} r^{i2^\ell} \\ &= r^n C \frac{s^{\ell+1}}{1 - s r^{2^\ell}}, \end{aligned}$$

где је $C = \frac{d(x_1, x_2)}{r(1-r)}.$

У оба случаја $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ кад $n \rightarrow \infty$, па је $\{x_n\}$ Кошијев.

□

Упоредо са Сузукијевим доприносом, рад Микулеског и Михаила [128] доноси нове процјене за итеративне низове у b -метричким просторима и представља полазну тачку за наше даље истраживање [137].

Лема 3.4 ([128]) *За сваки низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ елемената b -метричког простора (X, d, s) вриједи неједнакост*

$$d(x_0, x_k) \leq s^n \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1})$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1, 2^n\}$.

Доказ. ([128]) Тврђење ћемо доказати принципом математичке индукције. Означимо са $P(n)$ тврђење: $d(x_0, x_k) \leq s^n \sum_{i=0}^k d(x_i, x_{i+1})$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1, 2^n\}$. Тврђења $P(0)$ и $P(1)$ су очигледна, па преостаје да докажемо $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Уочимо да за свако $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2^n - 1, 2^n\}$, имамо

$$d(x_0, x_k) \stackrel{P(n)}{\leq} s^n \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq s^{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Са друге стране, за свако $k \in \{2^n + 1, 2^n + 2, \dots, 2^{n+1} - 1, 2^{n+1}\}$, вриједи

$$d(x_0, x_k) \leq s(d(x_0, x_{2^n}) + d(x_{2^n}, x_k))$$

$$\stackrel{P(n)}{\leq} s \left(s^n \sum_{i=0}^{2^n-1} d(x_i, x_{i+1}) + s^n \sum_{i=2^n}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \right) = s^{n+1} \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

па је наведена импликација тачна. $\square$

Лема 3.5 ([128]) *Сваки низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ елемената из b -метричког простора (X, d, s) , који има особину да постоји $\gamma \in [0, 1)$ тако да*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma d(x_n, x_{n-1}),$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ је Кошијев.

Доказ. ([128]) Као прво примијетимо да је

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \gamma^n d(x_1, x_0), \quad (3.3)$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Означимо са $p = \lfloor \log_2 k \rfloor$. За свако $m, k \in \mathbb{N}$ имамо

$$\begin{aligned} d(x_{m+1}, x_{m+k}) &\leq sd(x_{m+1}, x_{m+2}) + sd(x_{m+2}, x_{m+k}) \\ &\leq sd(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^2 d(x_{m+2}, x_{m+2^2}) + s^2 d(x_{m+2^2}, x_{m+k}) \\ &\leq sd(x_{m+1}, x_{m+2}) + s^2 d(x_{m+2}, x_{m+2^2}) + s^3 d(x_{m+2^2}, x_{m+2^3}) + s^3 d(x_{m+2^3}, x_{m+k}) \\ &\vdots \\ &\leq \sum_{n=1}^p s^n d(x_{m+2^{n-1}}, x_{m+2^n}) + s^{p+1} d(x_{m+2^p}, x_{m+k}) \\ &\leq \sum_{n=1}^p s^{2n} \left(\sum_{i=m}^{m+2^{n-1}-1} d(x_{2^{n-1}+i}, x_{2^{n-1}+i+1}) \right) + s^{2(p+1)} \left(\sum_{i=m}^{m+k-2^p-1} d(x_{2^p+i}, x_{2^p+i+1}) \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{p+1} s^{2n} \left(\sum_{i=m}^{m+2^{n-1}-1} d(x_{2^{n-1}+i}, x_{2^{n-1}+i+1}) \right) \stackrel{(3.3)}{\leq} d(x_0, x_1) \sum_{n=1}^{p+1} s^{2n} \left(\sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} \gamma^{m+2^{n-1}+i} \right) \\ &\leq \frac{d(x_0, x_1) \gamma^m}{1 - \gamma} \sum_{n=1}^{p+1} s^{2n} \gamma^{2^{n-1}} = \gamma^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \gamma} \sum_{n=1}^{p+1} \gamma^{2n \log_\gamma s + 2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Како је $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n \log_\gamma s + 2^{n-1} - n) = \infty$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $2n \log_\gamma s + 2^{n-1} - n \geq M$, тј. $\gamma^{2n \log_\gamma s + 2^{n-1}} \leq \gamma^M \gamma^n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, па је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma^{2n \log_\gamma s + 2^{n-1}}$ конвергентан. Ако означимо његову суму са S добијамо

$$d(x_{m+1}, x_{m+k}) \leq \gamma^m \frac{d(x_0, x_1) S}{1 - \gamma},$$

за свако $m, k \in \mathbb{N}$. Из $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = 0$ закључујемо да је низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев. $\square$

Напомена 3.2 Из Леме 3.5 добијамо да је низ $\{x_n\}$ Кошијев ако постоји $c \in [0, +\infty)$ и $\lambda \in [0, 1)$ тако да

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n \cdot c \quad (3.4)$$

за свако $n \in \mathbb{N}$.

Наредни значајан низ резултата у области b -метричких простора дат је у радовима групе аутора [72, 130, 138] у којима су разрађене додатне процјене и модификације класичних принципа контракције. У раду [138] Митровић полази се од опште претпоставке о смањењу сукцесивних удаљености:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}), \quad \lambda \in [0, 1), \quad (3.5)$$

без директног позивања на конкретан оператор T . Ова флексибилност омогућава примјену резултата и ван класичног Банаховог оквира, на низове настале нпр. дискретним методама за диференцијалне и интегралне једначине. У раду [72] Алексић, Митровић и Раденовић увели су новије априорне и апостериорне процјене за Пикарове низове у b -метричким просторима, чиме су добијени прецизнији критеријуми конвергенције и проширење резултата ранијих аутора, док у [130] Митровић даје процјене за проширене b -метричке просторе.

Лема 3.6 ([138]) Нека је (X, d, b) b -метрички простор и нека је $\{x_n\}$ низ у X . Претпоставимо да постоји $\lambda \in (0, 1)$ такво да вриједи

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}), \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Ако је $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $n_0 > -\frac{\log b}{\log \lambda}$, тада вриједи:

1. низ $\{x_{n_0}\}$ је Кошијев;
2. $d\left(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}\right) \rightarrow 0$ када $n \rightarrow \infty$.

Доказ. [[138]] Нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $n_0 > -\frac{\log b}{\log \lambda}$. Означимо са $\alpha = \lambda^{n_0} b < 1$. За свако $n \in \mathbb{N}$ имамо

$$d(x_{n+n_0}, x_n) \leq b^{n_0} (d(x_{n+1}, x_n) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+n_0}, x_{n+n_0-1})).$$

Из услова $d(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda d(x_k, x_{k-1})$ добијамо индуктивно да

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq \lambda^k d(x_1, x_0).$$

Према томе,

$$d(x_{n+n_0}, x_n) \leq b^{n_0} (\lambda^n + \lambda^{n+1} + \cdots + \lambda^{n+n_0-1}) d(x_1, x_0).$$

У загради је сума геометријског низа, па имамо

$$d(x_{n+n_0}, x_n) \leq \frac{b^{n_0} \lambda^n}{1 - \lambda} d(x_1, x_0).$$

Из дефиниције α слиједи

$$d(x_{n+n_0}, x_n) \leq C\alpha^n,$$

за неку константу $C > 0$. Дакле, подниз $\{x_{nn_0}\}$ је Кошијев.

Даље, за свако $n \in \mathbb{N}$, вриједи

$$d(x_n, x_{n_0 \lfloor n/n_0 \rfloor}) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n_0 \lfloor n/n_0 \rfloor}, x_{n_0 \lfloor n/n_0 \rfloor - 1}),$$

што заједно са претходним процјенама даје

$$d(x_n, x_{n_0 \lfloor n/n_0 \rfloor}) \rightarrow 0 \quad \text{када } n \rightarrow \infty.$$

□

Из претходних лема елегантно добијамо резултате Сузукија, Микулеског и Михаила.

Лема 3.7 ([127], [128]) *Нека је (X, d, b) b -метрички простор и нека је $\{x_n\}$ низ у X . Ако постоји $\lambda \in [0, 1)$ такво да вриједи*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}), \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N},$$

тада је $\{x_n\}$ Кошијев низ.

Доказ. Нека је $\{x_n\}$ низ у X који задовољава услов

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}), \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Ако узмемо $n_0 \in \mathbb{N}$ са $n_0 > -\frac{\log b}{\log \lambda}$, примјеном Леме 3.6 добијамо да је низ $\{x_{nn_0}\}$ Кошијев и да

$$d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) \rightarrow 0.$$

Пошто је подниз Кошијев, а разлика између x_n и одговарајућег члана подниза тежи нули, слиједи да је и цио низ $\{x_n\}$ Кошијев. □

Овим поглављем издвојили смо само дио доприноса у овој области, па читаоца упућујемо на радове [139, 140], гдје може пронаћи шири спектар генерализација и резултате који превазилазе оквир овог излагања. У сљедећем поглављу дајемо резултате које смо добили у контексту b -метричких простора а објављени су [137].

3.1 Процјене у b -метричким просторима

За процјену коју смо добили у [137] неопходно је увести помоћно тврђење за низове у b -метричким просторима.

Лема 3.8 ([137]) *Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и $\{x_n\}$ низ у X . Ако постоји $\lambda \in [0, 1)$ тако да*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}), \tag{3.6}$$

за свако $n \in \mathbb{N}$, вриједи следећа процјена за $i < j$

$$d(x_i, x_j) \leq s\lambda^i(1 + s\lambda + \dots + s^{j-i-2}\lambda^{j-i-2} + s^{j-i-2}\lambda^{j-i-1})d(x_0, x_1) \quad (3.7)$$

Доказ. [[137]] Нека је $i, j \in \mathbb{N}$ и $i < j$. Из релаксираних неједнакости троугла добијамо

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq s[d(x_i, x_{i+1}) + d(x_{i+1}, x_j)] \\ &\leq s\lambda^i d(x_0, x_1) + s^2[d(x_{i+1}, x_{i+2}) + d(x_{i+2}, x_j)] \\ &\leq \left(s\lambda^i + s^2\lambda^{i+1}\right) d(x_0, x_1) + s^3[d(x_{i+2}, x_{i+3}) + d(x_{i+3}, x_j)] \\ &\leq \left(s\lambda^i + s^2\lambda^{i+1} + s^3\lambda^{i+2}\right) d(x_0, x_1) + s^4[d(x_{i+3}, x_{i+4}) + d(x_{i+4}, x_j)] \\ &\vdots \\ &\leq s\lambda^i(1 + s\lambda + \dots + s^{j-i-2}\lambda^{j-i-2} + s^{j-i-2}\lambda^{j-i-1})d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

За $s\lambda \neq 1$, због $s > 1$ имамо процјену растојања

$$d(x_i, x_j) \leq s\lambda^i \frac{1 - (s\lambda)^{j-i}}{1 - s\lambda} d(x_0, x_1).$$

□

Сада прелазимо на главна тврђења о процјени у b -метричким просторима.

Теорема 3.1 ([137]) *Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и нека је $\{x_n\}$ низ у X . Претпоставимо да постоји $\lambda \in [0, 1)$ такво да*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}),$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$n_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid s\lambda^j < 1\}. \quad (3.8)$$

Тада за $s\lambda \neq 1$

$$d(x_n, x^*) \leq Cs^2\lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \left(1 + \frac{s^2}{1 - s\lambda^{n_0}}\right), \quad (3.9)$$

$$\text{гдје је } x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \text{ и } C = sd(x_0, x_1) \frac{1 - (s\lambda)^{n_0}}{1 - s\lambda}.$$

Доказ. Нека су $n, p \in \mathbb{N}$. Из релаксираних неједнакости троугла добијамо

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq sd(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) + s^2[d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) + d(x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}, x_{n+p})]. \quad (3.10)$$

Из $n_0(\frac{n}{n_0} - 1) < n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor \leq n_0 \frac{n}{n_0}$ слиједи

$$0 \leq n - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor < n_0.$$

Примјеном Леме 3.8 добијамо

$$\begin{aligned}
 d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) &\leq s \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_0, x_1) \frac{1 - (s\lambda)^{n - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1 - s\lambda} \\
 &\leq s \left[d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 1}) + d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 1}, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) \right] \\
 &\leq s^2 \left[d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 2}) + d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 2}, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 1}) \right] \\
 &\quad + s d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 1}, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) \\
 &\quad \vdots \\
 &\leq s^{n_0 - 1} \lambda^{n - 1} d(x_0, x_1) + s^{n_0 - 2} \lambda^{n - 2} d(x_0, x_1) \\
 &\quad + \dots + s \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_0, x_1) \\
 &= s \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_0, x_1) \left(1 + s\lambda + \dots + s^{n - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor - 1} \lambda^{n - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor - 1} \right)
 \end{aligned}$$

Дакле,

$$d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) \leq C \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}. \quad (3.11)$$

На исти начин добијамо

$$d(x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}, x_{n+p}) \leq C \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) закључујемо да

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}, x_{n+p}) = 0. \quad (3.13)$$

Даље, имамо

$$\begin{aligned}
 d(x_{(n+1)n_0}, x_{nn_0}) &\leq s^{n_0} [d(x_{(n+1)n_0}, x_{(n+1)n_0-1}) + \dots + d(x_{nn_0+1}, x_{nn_0})] \\
 &\leq s^{n_0} \left(\lambda^{(n+1)n_0-1} + \dots + \lambda^{nn_0} \right) d(x_1, x_0) \\
 &\leq s^{n_0} \lambda^{nn_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \lambda}.
 \end{aligned}$$

Односно

$$d(x_{(n+1)n_0}, x_{nn_0}) \leq C \mu^n, \quad (3.14)$$

гдје је $\mu = \lambda^{n_0}$. На основу (3.8) добијамо да је $\mu s < 1$. Из релаксиране неједнакости троугла и (3.14) добијамо

$$\begin{aligned}
 d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) &\leq \sum_{j=n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 2} s^{j+1 - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_{n_0 j}, x_{n_0(j+1)}) \\
 &\quad + s^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 1 - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_{n_0(n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 1)}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor})
 \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 2} s^{j+1-n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} C \mu^j + C s^{n_0-1-n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} (s\mu)^{n_0(\lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 1)},$$

па имамо

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) &\leq C s^{1-n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \frac{(s\mu)^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1-s\mu} \\ &= C s \frac{\mu^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1-s\mu}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) \leq C s \frac{\lambda^{\lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1-s\lambda^{n_0}}. \quad (3.15)$$

Из (3.10), (3.11), (3.12) и (3.15) добијамо

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq C s \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \left(1 + \frac{s^2}{1-s\lambda^{n_0}} \right). \quad (3.16)$$

С друге стране,

$$d(x_n, x^*) \leq s[d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x^*)], \quad (3.17)$$

па из (3.16) и (3.17), ако $p \rightarrow +\infty$, добијамо (3.9). $\square$

Примјер 3.1 Размотримо низ $x_0 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots)$ у простору $l_{\frac{1}{2}}$ (познато да је $s = 2$). Према томе добијамо

$$d(x_{n+1}, x_n) = d\left(\frac{1}{2}x_n, x_n\right) \leq \frac{1}{2}d(x_n, x_{n-1}).$$

Дакле, имамо посебан случај гдје је $s\lambda = 1$.

Уочавамо из примјера 3.1 да Теорема 3.1 не вриједи у случају када је $s\lambda = 1$, па ћемо сада дати доказ гдје тај услов није потребан. Нови доказ превазилази претходни проблем, али долази до смањења прецизности неједнакости у поређењу са првим.

Теорема 3.2 ([137]) Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и нека је $\{x_n\}$ низ у X . Претпоставимо да постоји $\lambda \in (0, 1)$ такво да

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda d(x_n, x_{n-1}), \quad (3.18)$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$n_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid s\lambda^j < 1\}. \quad (3.19)$$

Тада

$$d(x_n, x^*) \leq C s^2 \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \left(1 + \frac{s^2}{1-s\lambda^{n_0}} \right), \quad (3.20)$$

гдје је $x^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ и $C = s^{n_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1-\lambda}$.

Доказ. ([137]) Нека су $n, p \in \mathbb{N}$. Из релаксиране неједнакости троугла добијамо

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq sd(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) + s^2 \left[d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) + d(x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}, x_{n+p}) \right]. \quad (3.21)$$

Из $n_0(\frac{n}{n_0} - 1) < n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor \leq n_0 \frac{n}{n_0}$ слиједи $0 \leq n - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor < n_0$. Дакле, имамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) &\leq s^{n_0} \left[d(x_n, x_{n-1}) + \cdots + d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor + 1}, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) \right] \\ &\leq s^{n_0} \left(\lambda^{n-1} + \cdots + \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq s^{n_0} \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$d(x_n, x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}) \leq C \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}. \quad (3.22)$$

На исти начин добијамо

$$d(x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}, x_{n+p}) \leq C \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}. \quad (3.23)$$

Из (3.23) закључујемо да

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}, x_{n+p}) = 0. \quad (3.24)$$

Даље, имамо

$$\begin{aligned} d(x_{(n+1)n_0}, x_{nn_0}) &\leq s^{n_0} \left[d(x_{(n+1)n_0}, x_{(n+1)n_0-1}) + \cdots + d(x_{nn_0+1}, x_{nn_0}) \right] \\ &\leq s^{n_0} \left(\lambda^{(n+1)n_0-1} + \cdots + \lambda^{nn_0} \right) d(x_1, x_0) \\ &\leq s^{n_0} \lambda^{nn_0} \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$d(x_{(n+1)n_0}, x_{nn_0}) \leq C \mu^n, \quad (3.25)$$

гдје је $\mu = \lambda^{n_0}$. Употребом (3.19) добијамо да је $\mu b < 1$. Из (3_b) и (3.25) добијамо

$$\begin{aligned} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) &\leq \sum_{j=n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 2} s^{j+1-n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_{n_0 j}, x_{n_0(j+1)}) \\ &\quad + s^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 1 - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} d(x_{n_0(n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 1)}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) \\ &\leq \sum_{j=n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}^{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 2} s^{j+1-n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} C \mu^j + C s^{n_0 - 1 - n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} (s \mu)^{n_0(\lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor - 1)}, \end{aligned}$$

па имамо

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) &\leq C s^{1-n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \frac{(s\mu)^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1-s\mu} \\ &= C s^{\frac{\mu^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1-s\mu}}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}, x_{n_0 \lfloor \frac{n+p}{n_0} \rfloor}) \leq C s^{\frac{\lambda^{\lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor}}{1-s\lambda^{n_0}}}. \quad (3.26)$$

Из (3.10), (3.11), (3.12) и (3.15) добијамо

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+p}) \leq C s \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \left(1 + \frac{s^2}{1-s\lambda^{n_0}} \right). \quad (3.27)$$

С друге стране,

$$d(x_n, x^*) \leq s[d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x^*)], \quad (3.28)$$

па из (3.27) и (3.28), ако $p \rightarrow +\infty$, добијамо (3.20).

□

Напомена 3.3 Из (3.16) добијамо резултате Микулескуа и Михаила [128] и Сузукија [127]. Теорема 3.1 вриједи и за квази b -метричке просторе.

Напомена 3.4 Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и нека је $T : X \rightarrow X$ пресликавање. Ако итеративни низ $\{T^n x\}$ конвергира за свако $x \in X$ ка фиксној тачки x^* , онда из (3.9) за дато $\epsilon > 0$ можемо одредити $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ тако да вриједи

$$d(x_{n_\epsilon}, x^*) \leq \epsilon. \quad (3.29)$$

Дакле, процјена (3.9) се може користити у великом броју резултата о фиксним тачкама у b -метричким просторима, гдје итеративни $\{T^n x\}$ конвергира ка фиксној тачки x^* . Можемо је применити на теореме типа Банаха, Канана, Чатеруа, Рајха, Тирић, Харди-Роџерс, итд. Такође, процјена из (3.9) може се користити за резултате о заједничким фиксним тачкама, на пример Јунг, као и за мултифункционације, на примјер Надлерови резултати.

Примјер 3.2 (Процена за контракције Банаха, Канана и Рајха) Као што је наведено у Напомени 3.4, процјена се може користити у великом броју резултата о фиксним тачкама у b -метричким просторима.

Најпре одређујемо n_ϵ за Банахову контракцију са параметром $\lambda \in (0, 1)$. Фиксирајмо $\epsilon > 0$. Тада из (3.9) добијамо

$$C s^2 \lambda^{n_0 \lfloor \frac{n}{n_0} \rfloor} \left(1 + \frac{s^2}{1-s\lambda^{n_0}} \right) < \epsilon. \quad (3.30)$$

За посљедњу неједнакост да би вриједила, неопходно је изабрати $n \geq n_\varepsilon$, гдје је

$$n_\varepsilon = \left\lceil \log_\lambda \frac{\varepsilon(1 - s\lambda^{n_0})}{Cs^2(1 + s^2 - s\lambda^{n_0})} \right\rceil. \quad (3.31)$$

За Кананову контракцију $T : X \rightarrow X$ која задовољава $d(Tx, Ty) \leq \alpha[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$, гдје је $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, n_ε добијамо замјеном λ са $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ у (3.31).

За Рајхову контракцију $T : X \rightarrow X$, која задовољава $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)$, гдје су $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ такви да $\alpha + \beta + \gamma < 1$, n_ε добијамо замјеном λ са $\frac{\alpha+\gamma}{1-\beta}$ у (3.31).

Напомена 3.5 У метричком простору (X, d) за $s = 1$ и $n_0 = 1$ из Теореме 3.2 добијамо

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \left(1 + \frac{1}{1-\lambda} \right) d(x_0, x_1), \quad (3.32)$$

а из Теореме 3.1 слиједи

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\lambda^n(2-\lambda)}{1-\lambda} d(x_0, x_1). \quad (3.33)$$

4. Полиномске контракције

У првом дијелу овог поглавља уводимо појам слабих контракција и дајемо осврт на основне особине и односе са осталим врстама контракција. Даље, успостављамо услове под којим постоји јединствена фиксна тачка слабих контракција. У другом дијелу уводимо полиномске контракције и слабе полиномске контракције у b -метричким просторима које су проширење датих резултата слабих контракција. Резултати добијени за полиномске контракције у b -метричким просторима су објављени у раду *Jungck common fixed point theorem in b-metric spaces with polynomial condition* и тренутно се налази на рецензији.

4.1 Слабе контракције

За разлику од Банаховог става о контракцијама [8] који захтијева да функција буде непрекидна Кананов резултат из 1968. године [79] проширује под одређеним условима постојање фиксне тачке и за прекидна пресликавања. У наредној деценији, бројни су аутори интензивно истраживали разноврсне контрактивне услове који, иако не захтијевају непрекидност пресликавања, гарантују егзистенцију и јединственост фиксне тачке (Канан, Чатерџа, Замфиреску, Тирић, Ракоч, итд.) [81–84, 89, 141, 142].

Беринде је у раду из 2003. [143] увео нову класу слабих контракција тако да обухвата класе пресликавања које испуњавају контрактивне услове Банаха [8], Канана [79], Чатерџе [81] и Замфирескуа [84]. С обзиром да су развијени разни нееквивалентни концепти слабих контракција [78] у овом поглављу посматраћемо искључиво слабе контракције по дефиницији Бериндеа.

Дефиниција 4.1 (Беринде [143]) *Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је слаба контракција ако постоји константа $\delta \in (0, 1)$ и неко $L \geq 0$ тако да за свако $x, y \in X$ вриједи*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + Ld(x, Ty) \quad (4.1)$$

Напомена 4.1 ([143]) *Из симетрије метрике и контрактивног услова Бериндеове контракције (4.1) имплицитно слиједи и дуални услов*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + Ld(y, Tx) \text{ за све } x, y \in X. \quad (4.2)$$

Очигледно, свака контракција задовољава (4.1) за $\delta = \lambda$ и $L = 0$ и према томе је слаба контракција.

Примјер 4.1 ([144]) Нека је $[0,1]$ јединични интервал са стандардном метриком. Узмимо за T идентичко пресликавање на сегменту $[0,1]$, тј. $Tx = x$. Вриједи следећа тврђења

1. T није Банахова контракција јер за $d(x,y) = |x - y|$ имамо

$$|x - y| > \lambda \cdot |x - y|, \quad \text{за свако } x \neq y \text{ и } 0 < \lambda < 1.$$

2. T је слаба контракција са произвољним $\delta \in (0,1)$ и $L \geq 1 - \delta$.

3. Скуп фиксних тачака је читав сегмент $[0,1]$.

Из наведеног примјера јасно уочавамо да Дефиниција 4.1 обухвата ширу класу пресликавања од строгих контракција. Следећа тврђења пружају додатне примјере.

Став 4.1 ([143]) Свака Кананова контракција је слаба контракција.

Доказ. Нека T задовољава услов Кананове контракције. Слиједи

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &\leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \leq \\ &\leq b\{[d(x, y) + d(y, Tx)] + [d(y, Tx) + d(Tx, Ty)]\} \end{aligned}$$

односно

$$(1 - b)d(Tx, Ty) \leq bd(x, y) + 2b \cdot d(y, Tx)$$

из чега добијамо

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{b}{1-b}d(x, y) + \frac{2b}{1-b}d(y, Tx), \quad \text{за свако } x, y \in X,$$

тј. за $0 < b < \frac{1}{2}$, испуњени су услови Дефиниције 4.1 гдје $\delta = \frac{b}{1-b}$ и $L = \frac{2b}{1-b}$. Из симетрије Канановог услова слиједи (4.2). $\square$

Став 4.2 ([143]) Свака Чатерцина контракција је слаба контракција.

Доказ. Из услова Чатерцине контракције имамо

$$d(x, Ty) \leq d(x, y) + d(y, Tx) + d(Tx, Ty)$$

односно

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{c}{1-c}d(x, y) + \frac{2c}{1-c}d(y, Tx).$$

Према томе, T је слаба контракција гдје $\delta = \frac{c}{1-c} < 1$ (због $c < \frac{1}{2}$) и $L = \frac{2c}{1-c} \geq 0$. Из симетрије Чатерциног услова слиједи (4.2). $\square$

Следеће тврђење је директна посљедица Става 4.1 и Става 4.2.

Посљедица 4.1 ([143]) Свака контракција Замфирескуа је слаба контракција.

Став 4.3 ([143]) *Свака Тирићева квази-контракција је за $0 < h < \frac{1}{2}$ слаба контракција.*

Доказ. ([143]) Нека је $T : X \rightarrow X$ Тирићева квази-контракција, тј. оператор за који постоји $0 \leq h < 1$ тако да

$$d(Tx, Ty) \leq h \cdot M(x, y), \quad \text{за свако } x, y \in X$$

гдје

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(y, Tx), d(Tx, Ty)\}.$$

Нека су $x, y \in X$ произвољни. Разматрамо пет различитих случајева.

Случај 1. $M(x, y) = d(x, y)$ па су услови (4.1) и (4.2) очигледно испуњени за $\delta = h$ и $L = 0$.

Примијетимо да је $M(x, y) = M(y, x)$ па у наредним случајевима ће бити довољно да покажемо испуњеност само једног од услова (4.1) или (4.2).

Случај 2. $M(x, y) = d(x, Tx)$ па на основу неједнакости троугла имамо

$$d(Tx, Ty) \leq hd(x, Tx) \leq h[d(x, y) + d(y, Tx)],$$

односно (4.1) вриједи гдје $\delta = h$ и $L = h$. Како је $d(x, Tx) \leq d(x, y) + d(y, Tx)$, добијамо

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{h}{1-h}d(x, y) + \frac{h}{1-h}d(y, Ty),$$

за све $\delta \in (0, 1)$, па и (4.2) такође важи.

Случај 3. $M(x, y) = d(y, Ty)$. Из симетрије $M(x, y)$ слиједи на основу претходног случаја.

Случај 4. $M(x, y) = d(y, Tx)$. Очигледно (4.2) је испуњено али (4.1) је испуњено само за $h < \frac{1}{2}$. Заиста, из дефиниције $M(x, y)$ имамо $d(Tx, Ty) \leq h \cdot d(y, Tx)$ и

$$d(y, Tx) \leq d(y, Ty) + d(Ty, Tx) + d(Tx, x),$$

па слиједи

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{h}{1-h}d(x, y) + \frac{h}{1-h}d(y, Tx),$$

чиме смо добили (4.1) гдје $\delta = \frac{h}{1-h} < 1$ (због $h < \frac{1}{2}$) и $L = \frac{h}{1-h} > 0$.

Случај 5. $M(x, y) = d(y, Tx)$ се своди на претходни случај. □

Из наредних примјера можемо примјетити однос квази контракција и слабих контракција.

Примјер 4.2 ([143]) *Нека је $[0, 1]$ јединични интервал са стандардном метриком. Узмимо за T идентичко пресликавање на сегменту $[0, 1]$, тј. $Tx = x$. Вриједи следећа твђења*

1. T није Тирићева контракција јер за $M(x, y) = |x - y|$ имамо

$$|x - y| > h \cdot |x - y|, \quad \text{за свако } x \neq y \text{ и } 0 < h < 1.$$

2. T је слаба контракција са произвољним $\delta \in (0, 1)$ и $L \geq 1 - \delta$.

Примјер 4.3 ([143]) Нека је $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ дато са $Tx = \frac{2}{3}$, за $x \in [0, 1]$ и $T1 = 0$. Вриједје следећа тврђења:

1. T је Тирићева контракција за $h \in [\frac{2}{3}, 1)$;
2. T је слаба контракција за $\delta \geq \frac{2}{3}$ и $L \geq \delta$;

Примјер 4.4 ([143]) Нека је $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ дато са $Tx = \frac{1}{2}$, за $x \in [0, 1]$ и $T1 = 1$. Вриједје следећа тврђења :

1. T није Тирићева контракција нити контракција Замфиреског.
2. T има двије фиксне тачке $Fix(T) = \{\frac{1}{2}, 1\}$.
3. T није слаба контракција, иако свака Пикарова итерација конвергира фиксној тачки.

Из Става 4.3 добијамо да су квази контракције са $0 \leq h < \frac{1}{2}$ такође слабе контракције. Ипак, постоје квази контракције са $q \geq \frac{1}{2}$, које су такође слабе контракције (Примјер 4.3). Према томе $h < \frac{1}{2}$, није потребан услов да би квази контракција била слаба контракција. Уопштено Тирићеве квази контракције и Бериндеове слабе контракције су независне класе пресликавања јер ни једна од њих не обухвата у потпуности другу класу [144]. Иако представљају моћне генерализације Банаховог принципа контракције, оне то чине у различитим правцима. Постоје и други примјери контрактивних услова из којих произилазе слабе контракције, за детаље погледати [144, 145].

Централни резултат слабих контракција у комплетним метричким просторима је дат следећом теоремом.

Теорема 4.1 ([143]) Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ слаба контракција. Вриједје следећа тврђења

1. $Fix(T) \neq \emptyset$;
2. За произвољан $x_0 \in X$, Пикаров итеративни низ $\{x_n\}$ конвергира ка $x^* \in Fix(T)$;
3. Априорна и апостериорна процјена је дата са

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta}{1 - \delta} d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Доказ. ([143]) Доказаћемо да T има бар једну фиксну тачку у X . Одаберимо $x_0 \in X$ произвољно и дефинишимо $x_{n+1} = Tx_n$. Из (4.1) имамо

$$d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \delta \cdot d(x_{n-1}, x_n),$$

односно

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta \cdot d(x_{n-1}, x_n). \quad (4.5)$$

Користећи принцип математичке индукције из (4.5) слиједи

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \delta^n d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

односно

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq \delta^n d(x_0, x_1) + \delta^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + \delta^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= \delta^n (1 + \delta + \dots + \delta^{p-1}) d(x_0, x_1) \\ &= \frac{\delta^n (1 - \delta^p)}{1 - \delta} d(x_0, x_1), \quad n, p \in \mathbb{N}, p \neq 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Како је $0 \leq \delta < 1$, из (4.6) слиједи да је низ $\{x_n\}$ Кошијев па је конвергентан. Означимо $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. На основу неједнакости троугла

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \\ &= d(x^*, Tx_n) + d(Tx_n, Tx^*) \\ &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) + d(Tx_n, Tx^*) \end{aligned}$$

па из (4.1) слиједи

$$d(Tx_n, Tx^*) \leq \delta d(x_n, x^*) + Ld(x^*, Tx_n)$$

односно

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) + \delta d(x_n, x^*) + Ld(x^*, Tx_n) \\ &\leq (1 + L)d(x^*, x_{n+1}) + \delta d(x_n, x^*) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Пуштајући да $n \rightarrow \infty$ у (4.7) добијамо

$$d(x^*, Tx^*) = 0,$$

тј. x^* је фиксна тачка од T .

Процјену (4.3) добијемо из (4.6) када $p \rightarrow \infty$. Слично доказујемо и процјену (4.4). $\square$

Напомена 4.2 Претходна теорема је значајно проширење класичних резултата Банаха, Чатеруе, Канана и Замфиреског. Могуће је увијек конструисати Пикаров итеративни низ и наћи апроксимације за критеријум заустављања итеративног процеса слабе контракције. Класа слабих контракција према томе припада класи слабих Пикарових оператора, а такође задовољава Банахов орбитални услов. Мањкавост у односу на класичне концепте је нејединственост фиксне тачке. Наравно,

додавањем контрактивног услова на слабе контракције могуће је постићи јединственост.

Теорема 4.2 ([144]) Нека је (X, d) комплетан метрички простор, $T : X \rightarrow X$ слаба контракција и параметри $a \in (0, 1)$ и $L_1 \geq 0$ такви да

$$d(Tx, Ty) \leq a \cdot d(x, y) + L_1 \cdot d(x, Tx) \text{ за све } x, y \in X. \quad (4.8)$$

Тада вриједје следећа тврђења

1. $\text{Fix}(T) = \{x^*\}$ тј. фиксна тачка је јединствена;
2. За произвољан $x_0 \in X$, Пикаров итеративни низ $\{x_n\}$ конвергира ка x^* ;
3. Априорна и апостериорна процјена је дата са

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\delta}{1 - \delta} d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

4. Брзина конвергенције Пикарове итерације је дата са

$$d(x_n, x^*) \leq a d(x_{n-1}, x^*), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Доказ. Претпоставимо да T има двије различите фиксне тачке $x^*, y^* \in X$. Из (4.8) имамо

$$d(x^*, y^*) \leq a \cdot d(x^*, y^*) \Leftrightarrow (1 - a)d(x^*, y^*) \leq 0.$$

Слиједи $d(x^*, y^*) \leq 0$ што је у супротности са претпоставком. Даљи дио доказа је идентичан као у Теорему 4.1. $\square$

Даље истраживање слабих контракција одвијало се у смјеру додавања са десне стране контрактивног услова компаративне функције φ .

Дефиниција 4.2 ([144]) Пресликавање $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ назива се компаративна функција ако задовољава следеће услове

1. φ је монотono растућа
2. Низ итерација $\varphi^n(t)_{n=0}^\infty$ конвергира ка нули за све $t \in \mathbb{R}^+$.

Ако φ испуњава први услов и ред $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^k(t)$ конвергира за свако $t \in \mathbb{R}^+$ тада за φ кажемо да је s -компаративна функција.

Напомена 4.3 Очигледно свака s -компаративна функција је компаративна функција. Такође компаративне функције не морају бити ни линеарне ни непрекидне али свака компаративна функција је непрекидна у нули.

Примјер 4.5 ([144]) *Један од најједноставнијих примјера компаративне функције је*

$$\varphi_1(t) = at, t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq a < 1.$$

За $\varphi_2(t) = \frac{t}{t+1}, t \in \mathbb{R}^+$ имамо да је компаративна функција нелинеарна и није s -компаративна функција, док за

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} \frac{t}{2}, & 0 \leq t < 1 \\ t - \frac{1}{3}, & t \geq 1, \end{cases}$$

имамо прекидну s -компаративну функцију.

Сљедећом дефиницијом уводимо слабе φ -контракције.

Дефиниција 4.3 ([144]) *Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ се назива слаба φ -контракција ако постоје компаративна функција φ и неко $L \geq 0$ такви да важи сљедећа неједнакост:*

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) + Ld(y, Tx), \quad \text{за све } x, y \in X.$$

Напомена 4.4 *Све слабе контракције контракције су слабе φ -контракције, гдје $\varphi(t) = \delta t, t \in \mathbb{R}^+, \delta \in (0, 1)$, али све слабе φ -контракције нису слабе контракције нпр. φ_2 из Примјера 4.5.*

Наредне двије теореме нам дају услове под којим постоји фиксна тачка слабе φ -контракције.

Теорема 4.3 ([144]) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ слаба φ -контракција гдје φ s -компаративна функција. Тада:*

1. $Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$;
2. За било које $x_0 \in X$, Пикарова итерација $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ дефинисана са $x_0 \in X$ и $x_{n+1} = Tx_n, n = 0, 1, 2, \dots$ конвергира ка фиксној тачки x^* оператора T ;
3. Важи сљедећа проијена:

$$d(x_n, x^*) \leq s(d(x_n, x_{n+1})), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

гдје је $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^k(t), t \in \mathbb{R}^+$.

Доказ. Доказаћемо да T има бар једну фиксну тачку у X . У том циљу, нека је $x_0 \in X$ произвољан и нека је $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Пикарова итерација.

Пошто је T слаба φ -контракција, постоје s -компаративна функција φ и неки $L \geq 0$, такви да

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) + L \cdot d(y, Tx), \quad \text{за све } x, y \in X. \quad (4.13)$$

Узмимо $x := x_{n-1}$, $y := x_n$ у (4.13). Добијамо

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi(d(x_{n-1}, x_n)), \quad \text{за све } n = 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

Пошто φ није опадајућа, из (4.14) имамо

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \varphi(d(x_n, x_{n+1}))$$

што индуктивно даје

$$d(x_{n+k}, x_{n+k+1}) \leq \varphi^k(d(x_n, x_{n+1})), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Према неједнакости троугла имамо

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq r + \varphi(r) + \dots + \varphi^{n+p-1}(r), \end{aligned} \quad (4.16)$$

гдје смо означили са $r = d(x_n, x_{n+1})$. Поново из (4.14) налазимо да

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \varphi^n(d(x_0, x_1)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

што према својству компаративне функције, имплицира

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0. \quad (4.18)$$

Како је φ позитивна, очигледно је да

$$r + \varphi(r) + \dots + \varphi^{n+p-1}(r) < s(r), \quad (4.19)$$

гдје је $s(t)$ сума реда $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(r)$. Затим, из (3.6) и (3.9) добијамо

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq s(d(x_n, x_{n+1})), \quad n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}. \quad (4.20)$$

Будући да је s непрекидна у нули, (4.16) и (4.19) указују да је $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Кошијев низ. Како је X комплетан, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ је конвергентан. Нека је $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Доказаћемо да је x^* фиксна тачка оператора T . Заиста

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx^*) &\leq d(x^*, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, Tx^*) \\ &= d(x_{n+1}, x^*) + d(Tx_n, Tx^*). \end{aligned}$$

Из (4.14) имамо

$$d(Tx_n, Tx^*) \leq \varphi(d(x_n, x^*)) + Ld(x^*, Tx_n)$$

и према томе

$$d(x^*, Tx^*) \leq (1 + L)d(x_{n+1}, x^*) + \varphi(d(x_n, x^*)), \quad (4.21)$$

што вриједи за све $n \geq 0$. Сада, пуштајући $n \rightarrow +\infty$ у (4.21) и користећи непрекидност функције φ у нули, следи

$$d(x^*, Tx^*) = 0,$$

тј. x^* је фиксна тачка оператора T . Процена (4.12) се добија из (4.16) пуштајући $p \rightarrow +\infty$. $\square$

Као и у случају слабих контракција додавањем услова се може постићи јединственост фиксне тачке.

Теорема 4.4 ([144]) *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ слаба φ -контракција са φ s -компаративном функцијом. Претпоставимо да T такође задовољава следећи услов: постоји компаративна функција ψ и неки $L_1 \geq 0$ такви да*

$$d(Tx, Ty) \leq \psi(d(x, y)) + L_1 d(x, Tx), \quad (4.22)$$

вриједи за све $x, y \in X$. Тада:

1. T има јединствену фиксну тачку, тј. $Fix(T) = \{x^*\}$.
2. Важи следећа процијена:

$$d(x_n, x^*) \leq s(d(x_n, x_{n+1})), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.23)$$

гдје је $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^k(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

3. Брзина конвергенције Пикарове итерације је дата са

$$d(x_n, x^*) \leq \varphi(d(x_{n-1}, x^*)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Доказ. ([144]) Претпоставимо да постоје две различите фиксне тачке $x^*, y^* \in X$. Тада из (4.22) са $x := x^*$ и $y := y^*$ следи

$$d(x^*, y^*) \leq \psi(d(x^*, y^*))$$

што индуктивно даје

$$d(x^*, y^*) \leq \psi^n(d(x^*, y^*)), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.25)$$

Пуштајући $n \rightarrow +\infty$ у (4.25) добијамо

$$d(x^*, y^*) = 0,$$

тј. $x^* = y^*$, што је контрадикција. Дакле, T има јединствену фиксну тачку. За доказ (4.24), уврстимо $x := x^*$, $y := x_n$ у (4.22) $\square$

У раду [146] Џлели, Пачулар и Самет су увели полиномске контракције у метричким просторима и успоставили двије теореме од постојању фиксне тачке прво за непрекидно пресликавање а потом за специјалну класу прекидних пресликавања. У другом дијелу увођењем класе слабо полиномских контракција добијена је генерализација слабих контракција (Беринде [143, 144]). Мотивисани резултатима Бериндеа [143, 144] и Џлелија, Пачулар и Самета [146] проширили смо наведене резултате на класу b -метричких простора и показали тврђења Јунговог типа о заједничкој фиксној тачки.

4.2 Полиномске контракције у b -метричким просторима

У овом поглављу уводимо класу полиномских контракција на b -метричким просторима и испитујемо услове за егзистенцију и јединственост заједничке фиксне тачке комутативних пресликавања.

Дефиниција 4.4 Нека је (X, d, s) b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање. За пресликавање T кажемо да је полиномска контракција, ако постоји $\lambda \in [0, 1)$, природан број $k \geq 1$ и фамилија пресликавања $a_i : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, $i = 0, 1, \dots, k$ таква да

$$\sum_{i=0}^k a_i(Tx, Ty) d^i(Tx, Ty) \leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(x, y) d^i(x, y) \quad (4.26)$$

за свако $x, y \in X$.

Напомена 4.5 Наведена дефиниција укључује већу класу функција од строгих контракција јер за $k = 1$, $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$ добијамо Банахову контракцију у b -метричком простору.

Посматрамо теорему Јунговог типа о фиксној тачки за полиномске контракције:

Теорема 4.5 Нека су T и I комутативна пресликавања комплетног b -метричког простора (X, d, s) у самог себе која задовољавају неједнакост

$$\sum_{i=0}^k a_i(Tx, Ty) d^i(Tx, Ty) \leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(Ix, Iy) d^i(Ix, Iy) \quad (4.27)$$

за све $x, y \in X$, гдје $0 < \lambda < 1$. Претпоставимо да вриједи следећи услови:

- (i) T је непрекидна полиномска контракција;
- (ii) постоји $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $A_j > 0$ тако да

$$a_j(x, y) \geq A_j \text{ за све } x, y \in X;$$

- (iii) слика пресликавања I садржи слику од T и I је непрекидно;

Тада T и I имају јединствену заједничку фиксну тачку.

Доказ. Нека је x_0 произвољно. Очигледно Tx_0 и Ix_0 су добро дефинисани. Из (iii) $Tx_0 \in I(X)$, па узмимо да је $x_1 \in X$ такво да

$$Ix_1 = Tx_0.$$

Уопштено за x_n бирамо x_{n+1} такав да

$$Ix_{n+1} = Tx_n.$$

Показаћемо да је $\{Ix_n\}$ Кошијев низ. Из (4.27) имамо

$$\begin{aligned}
 d(Ix_n, Ix_{n+1}) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) = \sum_{i=0}^k a_i(Tx_{n-1}, Tx_n) d^i(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
 &\leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(Ix_{n-1}, Ix_n) d^i(Ix_{n-1}, Ix_n) \\
 &= \lambda \sum_{i=0}^k a_i(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) d^i(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) \\
 &\leq \lambda^2 \sum_{i=0}^k a_i(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) d^i(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) \\
 &\vdots \\
 &\leq \lambda^n \sum_{i=0}^k a_i(Ix_0, Ix_1) d^i(Ix_0, Ix_1) = \lambda^n \mathcal{M}_{0,1}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

гдје

$$\mathcal{M}_{0,1} = \sum_{i=0}^k a_i(Ix_0, Ix_1) d^i(Ix_0, Ix_1).$$

Како је

$$a_j(Tx_{n-1}, Tx_n) d^j(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda^n \mathcal{M}_{0,1},$$

из (ii) добијамо

$$A_j d^j(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda^n \mathcal{M}_{0,1},$$

па на основу (4.28) слиједи

$$d(Ix_n, Ix_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda_j^n \mathcal{M}_{0,1}^{\frac{1}{j}} \tag{4.29}$$

Лако уочавамо да $\lambda_j \in [0,1)$ па из Леме 3.5 закључујемо да је $\{Ix_n\}$ Кошијев.

Из комплетности $I(X)$ постоји $u \in X$ за које

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ix_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_{n-1} = u.$$

Непрекидност пресликавања I , (i) и комутативност пресликавања T и I дају

$$Iu = I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ITx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} TITx_n = T \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Ix_n \right) = Tu$$

Нека је сада $w = Tu = Iu$, тј.

$$Tw = TITu = ITu = Iw.$$

Ако $Tu \neq Tw$ из (4.27) добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i(Tu, Tw) d^i(Tu, Tw) &\leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(Iu, Iw) d^i(Iu, Iw) \\ &< \sum_{i=0}^k a_i(Tu, Tw) d^i(Tu, Tw) \end{aligned}$$

Према томе $Tu = Tv$ и $Tv = Iv = v$ па је w јединствена фиксна тачка за пресликавања T и I . $\square$

Напомена 4.6 Ако уврстимо да је I идентичко пресликавање добијамо да је T непрекидна полиномска контракција која према Теорему 4.5 има јединствену фиксну тачку у комплетном b -метричком простору.

Став 4.4 Нека је (X, d, s) b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ полиномска контракција. Претпоставимо да вриједе следећа тврђења:

(i) $a_0(x, y) = 0$ за свако $x, y \in X$;

(ii) за свако $i \in \{1, \dots, k\}$ постоји B_i тако да

$$a_i(x, y) \leq B_i \quad \text{за свако } x, y \in X;$$

(iii) постоји $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $A_j > 0$ тако да

$$a_j(x, y) \geq A_j \quad \text{за свако } x, y \in X.$$

Тада пресликавање T је непрекидно.

Доказ. Нека за низ $\{x_n\} \subset X$ вриједи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, w) = 0, \quad (4.30)$$

за неко $w \in X$. Из (4.26) добијамо

$$\sum_{i=0}^k a_i(Tx_n, Tw) d^i(Tx_n, Tw) \leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(x_n, w) d^i(x_n, w).$$

Даље на основу (ii) и (iii) слиједи

$$A_j d^j(Tx_n, Tw) \leq \lambda \sum_{i=1}^k B_i d^i(x_n, w). \quad (4.31)$$

Преласком на лимес $n \rightarrow +\infty$ у (4.31) уз примјену (4.30) имамо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d^j(Tx_n, Tw) = 0,$$

што је еквивалентно са

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(Tx_n, Tw) = 0.$$

Према томе T је непрекидно пресликавање.

□

Из Теореме 4.5 и Става 4.4 закључујемо следећи резултат.

Посљедица 4.2 *Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ полиномска контракција. Претпоставимо да вриједи следећа твђења:*

(i) $a_0(x, y) = 0$ за свако $x, y \in X$;

(ii) за свако $i \in \{1, \dots, k\}$ постоји B_i тако да

$$a_i(x, y) \leq B_i \quad x, y \in X;$$

(iii) постоји $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $A_j > 0$ тако

$$a_j(x, y) \geq A_j \quad \text{за свако } x, y \in X.$$

Пресликавање T има јединствену фиксну тачку $w \in X$ и за свако $x_0 \in X$, Пикаров итеративни низ $\{x_n\} \subset X$ конвергира w .

Следећи резултат слиједи директно из Посљедице 4.2.

Посљедица 4.3 *Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ пресликавање у самог себе. Претпоставимо да постоје $\lambda \in [0, 1)$, природан број $k \geq 1$ и коначан низ $\{a_i\}_{i=1}^k \subset (0, +\infty)$ тако да:*

$$\sum_{i=0}^k a_i d^i(Tx, Ty) \leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i d^i(x, y) \quad (4.32)$$

за свако $x, y \in X$. Тада T има јединствену фиксну тачку $w \in X$ и за свако $x_0 \in X$, Пикаров итеративни низ $\{x_n\} \subset X$ дефинисан са $x_{n+1} = Tx_n$ за свако $n \geq 0$ конвергира w .

Напомена 4.7 *Замјеном $k = 1$ и $a_1 = 1$ у Посљедицу 4.3 добијамо Банахову теорему о фиксној тачки у b -метричким просторима.*

У следећем примјеру наводимо примјену Теореме 4.5.

Примјер 4.6 *Посматрајмо простор*

$$l^p = \left\{ x_n : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}, p \in (0, 1)$$

заједно са функцијом $d : l^p \times l^p \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d(x_n, y_n) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Наведени l^p простор је b -метрички простор са $s = 2^{\frac{1}{p}}$. Пресликавања $T, I : l^p \rightarrow l^p$ дефинисана са

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(0, \frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{2}, \dots \right)$$

$$I(x) = Id(x)$$

имају заједничку фиксну тачку $(0, 0, 0, 0, \dots)$. Такође, T и I су непрекидни и комутативни. За $x_n, y_n \in l^p$ вриједи

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Ty_n) &= \left(\frac{|x_1 - y_1|^p}{3^p} + \frac{|x_2 - y_2|^p}{2^p} + \frac{|x_3 - y_3|^p}{2^p} + \frac{|x_4 - y_4|^p}{2^p} + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{|x_1 - y_1|^p}{2^p} + \frac{|x_2 - y_2|^p}{2^p} + \frac{|x_3 - y_3|^p}{2^p} + \frac{|x_4 - y_4|^p}{2^p} + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{1}{2} d(Ix_n, Iy_n). \end{aligned}$$

Очигледно

$$d^2(Tx_n, Ty_n) \leq \frac{1}{2} d^2(Ix_n, Iy_n),$$

на за $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1$ слиједи

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Ty_n) + d^2(Tx_n, Ty_n) \\ \leq \frac{1}{2} [d(Ix_n, Iy_n) + d^2(Ix_n, Iy_n)] \end{aligned}$$

Према томе, T је полиномска контракција.

Наредни корак у истраживању је проналажење услова под којим постоји фиксна тачка полиномских контракција које нису непрекидне.

Дефиниција 4.5 Нека је (X, d, s) b -метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је Пикар-непрекидно, ако за свако $w, u \in X$ вриједи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^n w, u) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} d(T(T^n w), Tu) = 0,$$

гдје $T^0 w = w$ и $T^{n+1} w = T(T^n w)$ за свако $n \geq 0$.

Примијетимо да за непрекидно пресликавање $T : X \rightarrow X$ да је T Пикар-непрекидно, али обрат не вриједи.

Теорема 4.6 Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ полиномска контракција. Претпоставимо да вриједи следећа тврђења:

(i) T је Пикар-непрекидно;

(ii) постоји $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $A_j > 0$ тако да

$$a_j(x, y) \geq A_j \text{ за свако } x, y \in X.$$

Тада T има јединствену фиксну тачку $w \in X$. Штавише, за свако $x_0 \in X$, Пикаров итеративни низ $\{x_n\} \subset X$ конвергира w .

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно. Дефинишимо низ

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n \geq 0,$$

тј.

$$x_n = T^n x_0, \quad n \geq 0.$$

Из Теореме 4.5 закључујемо да је $\{x_n\}$ Кошијев па због комплетности X постоји $w \in X$ тако да

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x_0, w) = 0.$$

Из Пикарове непрекидности слиједи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(T^{n+1} x_0, Tw) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(T(T^n x_0), Tw) = 0.$$

Како је гранична вриједност јединствена, w је фиксна тачка од T . Даљи дио доказа је сличан доказу Теореме 4.5. $\square$

Као у случају слабих контракција слједећом дефиницијом уводимо слабе полиномске контракције.

Дефиниција 4.6 Нека је (X, d, s) b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ дато пресликавање. Кажемо да је T слаба полиномска контракција, ако постоји $\lambda \in [0, 1)$, природан број $k \geq 1$, коначан низ $\{L_i\}_{i=0}^k \in (0, +\infty)$ и фамилија пресликавања $a_i : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$, $i = 0, \dots, k$ тако да

$$\sum_{i=0}^k a_i(Tx, Ty) d^i(Tx, Ty) \leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(x, y) [d^i(x, y) + L_i d^i(y, Tx)] \quad (4.33)$$

за свако $x, y \in X$.

Напомена 4.8 Дефиниција 4.6 укључује полиномске контракције за $L_i = 0$.

Посматрамо Јунгову теорему о фиксној тачки за слабе полиномске контракције:

Теорема 4.7 Нека су T и I комутативна пресликавања b -метричког простора (X, d, s) у самог себе која испуњавају неједнакост

$$\sum_{i=0}^k a_i(Tx, Ty) d^i(Tx, Ty) \leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(Ix, Iy) [d^i(Ix, Iy) + L_i d^i(Iy, Tx)] \quad (4.34)$$

за свако $x, y \in X$, гдје је $0 < \lambda < 1$. Претпоставимо да вриједи следећа тврђења:

(i) T је непрекидна слаба полиномска контракција;

(ii) постоји $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $A_j > 0$

$$a_j(x, y) \geq A_j \text{ за свако } x, y \in X;$$

(iii) слика од I садржи слику од T и I је непрекидно;

Тада T и I имају заједничку фиксну тачку.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољан. Како $Tx_0 \in I(X)$, постоји $x_1 \in X$ тако да $Ix_1 = Tx_0$. У општем случају за x_n бирамо x_{n+1} тако да

$$Ix_{n+1} = Tx_n.$$

Покажимо да је $\{Ix_n\}$ Кошијев низ. Из (4.34) имамо

$$\begin{aligned} d(Ix_n, Ix_{n+1}) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\sum_{i=0}^k a_i(Tx_{n-1}, Tx_n) d^i(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \\ &\lambda \sum_{i=0}^k a_i(Ix_{n-1}, Ix_n) [d^i(Ix_{n-1}, Ix_n) + L_i d^i(Ix_n, Tx_{n-1})] = \\ &\lambda \sum_{i=0}^k a_i(Ix_{n-1}, Ix_n) d^i(Ix_{n-1}, Ix_n) = \\ &\lambda \sum_{i=0}^k a_i(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) d^i(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}) \leq \\ &\lambda^2 \sum_{i=0}^k a_i(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) [d^i(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) + L_i d^i(Ix_{n-1}, Tx_{n-2})] = \\ &\lambda^2 \sum_{i=0}^k a_i(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) d^i(Ix_{n-2}, Ix_{n-1}) \leq \\ &\vdots \\ &\lambda^n \sum_{i=0}^k a_i(Ix_0, Ix_1) d^i(Ix_0, Ix_1) = \lambda^n \mathcal{M}_{0,1} \end{aligned} \tag{4.35}$$

гдје

$$\mathcal{M}_{0,1} = \sum_{i=0}^k a_i(Ix_0, Ix_1) d^i(Ix_0, Ix_1).$$

Из

$$a_j(Tx_{n-1}, Tx_n) d^j(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda^n \mathcal{M}_{0,1},$$

и услова (ii) слиједи

$$A_j d^j(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda^n \mathcal{M}_{0,1},$$

па из (4.35) произилази

$$d(Ix_n, Ix_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq \lambda_j^n \mathcal{M}_{0,1}^{\frac{1}{j}} \quad (4.36)$$

Евидентно $\lambda_j \in [0,1)$ па из Леме 3.5 слиједи да је низ $\{Ix_n\}$ Кошијев. Из комплетности $I(X)$ постоји $u \in X$ тако да

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ix_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_{n-1} = u.$$

Пресликавања T и I комутирају па из непрекидности I и услова (i) добијамо

$$Iu = I\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ITx_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} TITx_n = T\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} Ix_n\right) = Tu.$$

Нека је $w = Tu = Iu$, тј.

$$Tw = TITu = ITu = Iw.$$

За $Tu \neq Tw$ из (4.34) добијамо

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k a_i(Tu, Tw) d^i(Tu, Tw) &\leq \lambda \sum_{i=0}^k a_i(Iu, Iw) [d^i(Iu, Iw) + L_i d^i(Iw, Tu)] \\ &< \sum_{i=0}^k a_i(Tu, Tw) d^i(Tu, Tw) \end{aligned}$$

Дакле $Tu = Tw$ па је $Tv = Iv = v$ и w је заједничка фиксна тачка за T и I . $\square$

У наредном примјеру ћемо приказати примјену претходне теореме.

Примјер 4.7 Посматрајмо b -метрички простор l^p , $p \in (0,1)$ са b -метриком $d : l^p \times l^p \rightarrow \mathbb{R}$

$$d(x_n, y_n) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Дефинишимо пресликавања $T, I : l^p \rightarrow l^p$ са

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{5}, \frac{x_3}{5}, \frac{x_4}{5}, \dots \right)$$

$$I(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(0, \frac{5x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{2}, \frac{x_4}{2}, \dots \right).$$

Очигледно заједничка фиксна тачка $(0,0,0,0, \dots)$. Оператори T и I су непрекидни и

комутативни. За $x_n, y_n \in l^p$ вриједи

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Ty_n) &= \left(|x_1 - y_1|^p + \frac{|x_2 - y_2|^p}{5^p} + \frac{|x_3 - y_3|^p}{5^p} + \frac{|x_4 - y_4|^p}{5^p} + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{2}{5} \left(\frac{5^p |x_1 - y_1|^p}{2^p} + \frac{|x_2 - y_2|^p}{2^p} + \frac{|x_3 - y_3|^p}{2^p} + \frac{|x_4 - y_4|^p}{2^p} + \dots \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{2}{5} d(Ix_n, Iy_n). \end{aligned}$$

Из претходне неједнакости имамо

$$d^2(Tx_n, Ty_n) \leq \frac{2}{5} d^2(Ix_n, Iy_n),$$

на за $a_0 = 0, a_1 = a_2 = 1, L_1 = L_2 = 1$ добијамо

$$\begin{aligned} d(Tx_n, Ty_n) + d^2(Tx_n, Ty_n) \\ \leq \frac{2}{5} [d(Ix_n, Iy_n) + d(Iy_n, Tx_n) + d^2(Ix_n, Iy_n) + d^2(Iy_n, Tx_n)] \end{aligned}$$

Слиједи да је T слаба полиномска контракција. Примијетимо да T није контракција. За $x_n = (3, 0, 0, 0, \dots)$ и $y = (4, 0, 0, 0, \dots)$, имамо $d(x_n, y_n) = 1$ и $d(Tx, Ty) = 1$ односно

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y) \not\Rightarrow \lambda \leq 1.$$

Дефиниција 4.7 Нека је (X, d, s) b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ дато пресликавање. За оператор T кажемо да је слаби Пикаров оператор ако

- (i) скуп фиксних тачака оператора T је непразан;
- (ii) за свако $x_0 \in X$, Пикаров низ $\{T^n x_0\}$ је конвергентан и његова гранична вриједност припада скупу фиксних тачака од T .

Теорема 4.8 Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ слаба полиномска контракција. Претпоставимо да вриједи следећа тврђења:

- (i) T је Пикар непрекидан;
- (ii) постоји $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $A_j > 0$ тако да

$$a_j(x, y) \geq A_j \text{ за све } x, y \in X.$$

Тада T је слаби Пикаров оператор.

Доказ. Доказ директно слиједи из Теореме 4.7 за $I = id$. □

Посљедица 4.4 Нека је (X, d, s) комплетан b -метрички простор и $T : X \rightarrow X$ дато пресликавање. Ако постоје $\lambda \in [0, 1)$, природан број $k \geq 1$, и два коначна низа

$\{a_i\}_{i=1}^k, \{L_i\}_{i=0}^k \in (0, +\infty)$, тако да (4.34) вриједи за свако $x, y \in X$ тада је T слаби Пикаров оператор.

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 4.8 као специјални случај. □

Напомена 4.9 Из претходних тврдњи непосредно слиједе следећи резултати

- У Посљедици 4.4 за $k = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $L_i = 0$ добијамо Банахов принцип контракције у b -метричким просторима.
- У Посљедици 4.4 за $k = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $L_1 = \frac{l}{\lambda}$, $l > 0$ добијамо Бериндеову теорему о фиксној тачки у b -метричким просторима.
- У Теорему 4.7 за $k = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $L_i = 0$ и $I(X) = X$ добијамо Јунгову теорему о фиксној тачки у b -метричком простору.
- У Теорему 4.7 за $s = 1$ и $I(X) = X$ добијамо резултат за полиномске контракције у метричким просторима [146].

5. F -контракције

У овом поглављу уводимо појам F -контракција, затим износимо основне резултате у виду кључних теорема и доприноса из ове области, а потом показујемо њихова проширења у оквиру генерализованих метричких простора са различитим контрактивним условима.

Пољски математичар Даријуш Вардовски [98] је 2012. године формулисао генерализацију Банаховог принципа контракције увођењем F -контракција у метричке просторе. Генерализација се састојала од промјене услова у стандардној дефиницији контракције новим условом везаним уз функцију F са специјалним особинама. Основни предмет посматрања је класа пресликавања коју дајемо следећом дефиницијом.

Дефиниција 5.1 (Вардовски [98]) *Нека је $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ пресликавање које испуњава следеће услове:*

(F1) F је строго растућа функција;

(F2) Позитиван низ x_n тежи нули ако и само ако $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = 0$;

(F3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^k F(x) = 0$ за неко $k \in (0,1)$.

Фамилију пресликавања $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољавају (F1), (F2) и (F3) означавамо са $\mathcal{F}$.

Дефиниција 5.2 (Вардовски [98]) *Нека је $F \in \mathcal{F}$ и T пресликавање метричког простора (X,d) у самог себе. Ако постоји $\tau > 0$ такав да вриједи*

$$(\forall x, y \in X) \quad d(Tx, Ty) > 0 \Rightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)), \quad (5.1)$$

тада пресликавање T називамо F -контракција.

Из дефиниције можемо уочити да за различита пресликавања F добијамо разне познате контракције.

Примјер 5.1 ([98]) *Нека је $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x$. Очигледно да F испуњава особине (F1) – (F3) па свако пресликавање $T : X \rightarrow X$ које задовољава (5.1) је F -контракција таква да*

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} d(x, y) \quad \text{за све } x, y \in X, \quad Tx \neq Ty.$$

Уочимо да је $e^{-\tau} \in (0,1)$ тј. T је Банахова контракција.

Примјер 5.2 ([98]) Функција $F(x) = \ln x + x$, $x > 0$ задовољава услове (F1) – (F3) и услов (5.1) који је у овом случају облика

$$\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} e^{d(Tx, Ty) - d(x, y)} \leq e^{-\tau}, \quad \forall x, y \in X, \quad Tx \neq Ty.$$

Примјер 5.3 ([98]) Посматрајмо $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$. F испуњава услове (F1) – (F3) за $k \in (\frac{1}{2}, 1)$. У овом случају, за сваку F -контракцију вриједи

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{\left(1 + \sqrt{d(x, y)}\right)^2} d(x, y) \quad \text{за све } x, y \in X, \quad Tx \neq Ty.$$

Добили смо специјални случај нелинеарних контракција Бојд-Вонга [89] и Ракоча [141].

Напомена 5.1 Примијетимо да само из особине (F1) можемо закључити да је функција F скоро свуда непрекидна. У свакој тачки постоји лијеви и десни лимес и вриједи једно од тврђења $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = r$, $r \in \mathbb{R}$ или $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\infty$. Из (F1) и (5.1) слиједи да је свака F контракција T такође контракција па је и непрекидно прсликавање.

Напомена 5.2 ([98]) Нека су F_1 и F_2 прсликавања која задовољавају (F1) – (F3). Ако је $F_1(x) \leq F_2(x)$ за свако $x > 0$ и прсликавање $G = F_2 - F_1$ непадајуће тада свака F_1 -контракција T је и F_2 -контракција. Заиста, из Напомене 5.1 имамо $G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y))$ за све $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$. Према томе, за свако $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$ имамо

$$\begin{aligned} \tau + F_2(d(Tx, Ty)) &= \tau + F_1(d(Tx, Ty)) + G(d(Tx, Ty)) \\ &\leq F_1(d(Tx, Ty)) + G(d(Tx, Ty)) = F_2(d(Tx, Ty)). \end{aligned}$$

Централни резултат Вардовског је наведен у следећој теорему.

Теорема 5.1 ([98]) Нека је (X, d) комплетан метрички простор и $T : X \rightarrow X$ F -контракција. Тада T има јединствену фиксну тачку. Штавише, Пикаров итеративни низ $\{T^n x_0\}$, за свако $x_0 \in X$, конвергира ка фиксној тачки.

Доказ. Као прво уочимо да T може имати само једну фиксну тачку. За двије различите фиксне тачке x_1^* , x_2^* имамо

$$\tau \leq F(d(x_1^*, x_2^*)) - F(d(Tx_1^*, Tx_2^*)) = 0,$$

што је контрадикција са (5.1). Дакле, фиксна тачка је јединствена.

За произвољно $x_0 \in X$ дефинишимо низ $\{x_n\} \subset X$ са $x_{n+1} = Tx_n$. Даље, означимо са $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$, $n = 0, 1, \dots$. У случају да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ за које је $x_{n_0+1} = x_{n_0}$ доказ је завршен. Претпоставимо да је $x_{n+1} \neq x_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Вриједи $\gamma_n > 0$ за свако

$n \in \mathbb{N}$ па из (5.1) слиједи:

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq \dots \leq F(\gamma_0) - n\tau. \quad (5.2)$$

Из (5.2) добијамо $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\gamma_n) = -\infty$ па (F2) даје

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = 0. \quad (5.3)$$

На основу (F3) постоји $k \in (0,1)$ такав да је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0. \quad (5.4)$$

За свако $n \in \mathbb{N}$ из (5.2) имамо

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leq \gamma_n^k (F(\gamma_0) - n\tau) - \gamma_n^k F(\gamma_0) = -\gamma_n^k n\tau \leq 0. \quad (5.5)$$

Преласком на лимес $n \rightarrow +\infty$ у (5.5), из (5.3) и (5.4) добијамо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n\gamma_n^k = 0. \quad (5.6)$$

Уочимо даље да из (5.6) постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ такво да $n\gamma_n^k \leq 1$ за свако $n \geq n_1$. Слиједи

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}} \text{ за } n \geq n_1. \quad (5.7)$$

Покажимо да је $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ и посматрајмо $m, n \in \mathbb{N}$ такве да $m > n \geq n_1$. Из (5.7) имамо

$$d(x_m, x_n) \leq \gamma_{m-1} + \gamma_{m-2} + \dots + \gamma_n \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \gamma_i \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}.$$

Ред $\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ на основу (5.7) конвергира па слиједи да је $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошијев низ. Због комплетности метричког простора X постоји $x^* \in X$ такво да $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$. Коначно, из непрекидности T добијамо

$$d(Tx^*, x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(Tx_n, x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0.$$

□

Сљедећи примјер који показује да је преходна теорема уопштење Банаховог принципа контракције.

Примјер 5.4 ([98]) Нека је скуп $X = \left\{ x_n \mid x_n = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N} \right\}$ и

$d(x, y) = |x - y|$, $x, y \in X$ стандардна метрика. Тада је (X, d) комплетан метрички простор. Дефинишимо пресликавање $T : X \rightarrow X$ са $T(x_1) = x_1$ и $T(x_n) = x_{n+1}$. На-

ведено пресликавање није Банахова контракција али јесте F -контракција и вриједи (5.1) гдје $\tau = 1$ и $F(x) = x + \ln x$ (детаљније видјети у [98]).

Резултат Вардовског отворио је читаву линију истраживања у којој су бројни аутори настојали да ослабе почетне услове и прошире класу контракција. Тако су у раду Пирија и Кумама [147] предложена даља слабљења услова на функцију F изостављањем услова $(F3)$, а у раду Попескуа и Стана [148] дате су две опште теореме о фиксним тачкама за F -контракције које покривају више различитих случајева. У раду Карапинара [149] појављује се α -тип F -контракције, при чему се као посебни случајеви добијају Банахова, Кананова и Чатерџина теорема. Ајди, Карапинар и Јазиди [150] увели су модификоване F -контракције уз α -допустивост и применили их на интегралне једначине, док је Озтурк [151] разматрао итеративна F -контрактивна пресликавања и показао да се фиксна тачка добија и када је контрактивност задовољена тек за n -ту итерацију пресликавања. Цветковић [152] је дала поређење између F -контракција и контракција Бојд-Вонга, Матковског и Меир-Килера показујући када један оквир садржи други. Сви ови резултати систематизовани су у свеобухватном прегледу Фабиана, Каделбурга, Миркова, Шешум-Чавић и Раденовића [153] који даје потпуну слику прве деценије развоја ове теорије.

У b -метричким просторима, концепт је такође добио бројне адаптације. У раду Пирија и Кумама [154] дате су F -Сузуки варијанте у b -метричком окружењу, при чему су доказане теореме егзистенције и јединствености уз Пикарову конвергенцију. Каделбург и Раденовић [155] истичу да је сувише јак скуп услова на функцију F , па показују да је често довољно претпоставити само монотоност и непрекидност. Јунис и сарадници [156] показују да је у многим теоремама довољно својство $(F1)$. Хуанг, Митровић, Зото и Раденовић [157] развијају концепт конвексних F -контракција у b -метричким просторима и показују да се јединствена фиксна тачка добија и без класичних услова непрекидности. Али и сарадници [158] уводе генерализоване вишезначне F -контракције и добијају резултате о постојању фиксних скупова. Росафи и Кари [159] анализирају (φ, F) -контракције у b -метричким просторима и добијају верзије Банахових и Кананових резултата. Синг и сарадници [160] уводе (F, ψ) -контракционе парове у парцијалним b -метричким просторима са усмјереним графовима и доказују резултате о постојању заједничке фиксне тачке.

У славим b -метричким просторима Хуанг, Зото, Митровић и Раденовић [161] дефинишу генерализоване F -контракције. Хамад и Де ла Сен [162] разматрају генерализоване Јаги F -контракције у слабом b -метричком простору и добијају резултате о егзистенцији фиксних тачака. Јоши, Синг и Петрушел [163] примењују теореме о F -контракцијама на интегралне једначине. Зото и сарадници [164] уводе генерализоване контрактивне услове преко C -класе функција и добијају јединственост фиксне тачке. Де ла Сен, Николић, Дошеновић, Павловић и Раденовић [165] анализирају (s, q) -граф F -контракције и показују њихову примену у славим b -метричким просторима. Митровић и сарадници [166] дају нове резултате за Јаги- W -контракције у истом оквиру, док Ју, Чен и Ванг [167] развијају заједничке фиксне тачке за $(T, g)_F$ -контракције. Гардашевић-Филиповић и сарадници [168] показују резултате најбоље апроксимације у ортогоналним славим b -метричким просторима за различите типове контракција. Даљи резултати се могу пронаћи у радовима [169–175].

5.1 Проширене F -контракције у метричким просторима

У овом поглављу дајемо нове резултате из теорије фиксне тачке у метричким просторима који су објављени у раду [176]. У наведеном истраживању повезујемо четири типа контракција: интерполативну Кананову контракцију, проширену интерполативну и Геретијеву контракцију, интерполативну Харди-Роџерс контракцију и F -контракцију. За више детаља о свим наведеним типовима контракција погледајте [78, 83, 92, 153, 177–191].

На самом почетку наводимо двије леме, које ћемо интензивно користити у даљем раду са F -контракцијама, а које су се показале изузетно корисне када је потребно одредити да ли је Пикаров низ Кошијев у метричком простору (X, d) .

Лема 5.1 ([85]) *Нека је (X, d) метрички простор и $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Пикаров низ. Ако за све $n \geq 1$ вриједи $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n)$, тада је $x_n \neq x_m$ за сваки $n \neq m$.*

Доказ. ([85]) Претпоставимо супротно да постоји $m > n$ гдје $x_m = x_n$. Тада

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(x_m, x_{m+1}).$$

Међутим, по претпоставци низ $\{d(x_k, x_{k+1})\}$ је строго опадајући, па $d(x_m, x_{m+1}) < d(x_{m-1}, x_m)$. Како је $x_m = x_n$, слиједи $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{m-1}, x_n)$. С друге стране,

$$d(x_{m-1}, x_n) \leq d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x_n) = d(x_{m-1}, x_m),$$

па би вриједи $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{m-1}, x_m)$, што је у супротности са $d(x_n, x_{n+1}) = d(x_m, x_{m+1})$ и строго опадајућом природом низа растојања. Дакле, сви су чланови међусобно различити. $\square$

Лема 5.2 ([78]) *Нека је у метричком простору (X, d) дат Пикаров низ $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такав да је низ растојања $d(x_n, x_{n+1})$ нерастући и $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Ако подниз $\{x_{2n}\}$ није Кошијев, онда постоје $\varepsilon > 0$ и растући поднизови природних бројева m_k, n_k са особином $n_k > m_k > k$ тако да низови*

$$d(x_{2m_k}, x_{2n_k}), \quad d(x_{2m_k}, x_{2n_k-1}), \quad d(x_{2m_k+1}, x_{2n_k}), \quad d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}), \quad d(x_{2m_k+1}, x_{2n_k+1}), \dots$$

теже ε^+ када $k \rightarrow \infty$.

Доказ. ([85]) На основу негације дефиниције Кошијевог низа постоји $\varepsilon > 0$ тако да за свако p постоје индекси $n > m \geq p$, $d(x_{2m}, x_{2n}) \geq \varepsilon$. Дефинишимо

$$\Delta_{m,n} := d(x_{2m}, x_{2n}) \quad (n > m).$$

Изаберимо $m_1 < n_1$ тако да $\Delta_{m_1, n_1} = \min\{\Delta_{m,n} : n > m \geq 1, \Delta_{m,n} \geq \varepsilon\}$. Даље, по истом принципу (са почетком од $k+1$), добијамо растуће низове $m_k < n_k$, $n_k > m_k > k$, за које је $\Delta_{m_k, n_k} \geq \varepsilon$ са минималном разликом индекса и минималним m_k .

Тврдимо да $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{m_k, n_k} = \varepsilon$ с десне стране. Наиме, због минималности, вриједи

$$d(x_{2m_k}, x_{2n_k-1}) < \varepsilon, \quad d(x_{2m_k+1}, x_{2n_k}) < \varepsilon,$$

јер би у супротном један од тих парова дао мању удаљеност од Δ_{m_k, n_k} која је још увијек већа или једнака ε , што противрјечи минималности. Слиједи

$$\varepsilon \leq \Delta_{m_k, n_k} \leq d(x_{2m_k}, x_{2n_k-1}) + d(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}) < \varepsilon + d(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}),$$

па одузимањем ε добијамо

$$0 \leq \Delta_{m_k, n_k} - \varepsilon < d(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}).$$

По претпоставци $d(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$ па десна страна тежи нули тј. $\Delta_{m_k, n_k} \rightarrow \varepsilon^+$. Потпуно аналогни аргумент (са помјерањем индекса за ± 1 и кориштењем нерастућег низа сусједних удаљености) даје

$$d(x_{2m_k}, x_{2n_k-1}), d(x_{2m_k+1}, x_{2n_k}), d(x_{2m_k-1}, x_{2n_k+1}), d(x_{2m_k+1}, x_{2n_k+1}), \dots \rightarrow \varepsilon^+.$$

□

Посљедица 5.1 *Лема 5.2 је тачна и без хипотезе да је низ $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ нерастући. Очигледно, у том случају имамо да следећи низови*

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}), d(x_{m_k}, x_{n_k-1}), d(x_{m_k+1}, x_{n_k}), d(x_{m_k-1}, x_{n_k+1}), d(x_{m_k+1}, x_{n_k+1}), \dots$$

теже ε^+ када $k \rightarrow +\infty$.

Подсјетимо се да је свака строго растућа функција F из $(0, +\infty)$ у $\mathbb{R}$ непрекидна скоро свуда, и да у свакој тачки a из $(0, +\infty)$ постоје лијеви и десни лимеси $F(a-0)$ и $F(a+0)$ респективно, и да за њих важи: $F(a-0) \leq F(a) \leq F(a+0)$. У нашој студији, претпоставићемо да је $F(0^+) = -\infty$, јер постоје примери строго растућих функција из $(0, +\infty)$ у $\mathbb{R}$ за које је $F(0^+)$ коначан.

Следећом дефиницијом а затим и теоремом која слиједи дајемо нови приступ повезивању четири типа контракција.

Дефиниција 5.3 ([176]) *Нека је (X, d) метрички простор и T пресликавање са X у самог себе. Кажемо да је T интерполативна-Харди-Роуерс-Герети типа F -контракција ако постоје бројеви a, b, c из $(0, 1)$ гдје $a + b + c < 1$, Геретијева функција $g : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ са особином: ако $g(x_n) \rightarrow 1^-$ тада $x_n \rightarrow 0$, строго растућа функција F из $(0, +\infty)$ у $\mathbb{R}$ са $F(0^+) = -\infty$ и $\tau > 0$ тако да вриједи*

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F\left(g(v(x, y, T, a, b, c)) \cdot v(x, y, T, a, b, c)\right), \quad (5.8)$$

за све $x, y \in X \setminus \text{Fix}(T)$ гдје $d(Tx, Ty) > 0$ и

$$v(x, y, T, a, b, c) = (d(x, y))^a \cdot (d(x, Tx))^b \cdot (d(y, Ty))^c \cdot \left(\frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right)^{1-a-b-c}.$$

Теорема 5.2 ([176]) *Свака интерполативна Харди-Роуерс-Герети типа F -контракција на комплетном метричком простору (X, d) има фиксну тачку.*

Доказ. Примијетимо да је Геретијева функција g ограничена а да је F строго растућа, па из (5.8) слиједи нови контрактивни услов:

$$\tau + F(d(Tx, Ty)) < F(v(x, y, T, a, b, c)). \quad (5.9)$$

Према томе, Геретијева функција g је елиминисана. Даље, како је функција F строго растућа из (5.9) добијемо нови услов:

$$d(Tx, Ty) < v(x, y, T, a, b, c), \quad (5.10)$$

за $d(Tx, Ty) > 0$. Неоподно је показати да из услова (5.10) слиједи постојање бар једне фиксне тачке пресликавања T . Наставимо у стандардном маниру, одаберимо произвољно x_0 из X . Тада за одговарајући Пикардов низ $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ имамо двије различите могућности:

1. Постоји n_0 из $\mathbb{N}$ такав да $x_{n_0+1} = x_{n_0}$.

Први случај је тривијалан, x_{n_0} је фиксна тачка пресликавања T и доказ теореме 5.2 је завршен.

2. За сваки n из $\mathbb{N}$ ако је x_{n+1} различито x_n , тј. $d(x_n, x_{n+1}) > 0$ за све n .

За други случај прво ћемо показати да је низ $\{x_n\}$ Кошијев. Тада због комплетности простора (X, d) , низ $\{x_n\}$ је конвергентан и има граничну вриједност z из X . У сврху горе наведеног, претпоставимо да за неко k из $\mathbb{N}$: $d(x_{k-1}, x_k) \leq d(x_k, x_{k+1})$. Из (5.10) добијемо

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+1}) &< (d(x_k, x_{k+1}))^{a+b} \cdot (d(x_k, x_{k+1}))^c \\ &\cdot \left(\frac{2d(x_k, x_{k+1})}{2} \right)^{1-a-b-c} = (d(x_k, x_{k+1}))^{a+b+c+1-a-b-c}, \end{aligned}$$

тј. $d(x_k, x_{k+1}) < d(x_k, x_{k+1})$. Контрадикција.

Према томе, низ $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ је строго опадајући и према Лемми 5.1, сви његови чланови су међусобно различити. Штавише, конвергира ка неком ненегативном броју $\delta \geq 0$. Докажимо да је $\delta = 0$. За доказ овог тврђења морамо се вратити у услов (5.9) гдје учествује функција F . Уврстимо $x = x_{n-1}$, $y = x_n$, па добијемо

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_n, x_{n+1})) &\leq \\ F\left((d(x_{n-1}, x_n))^{a+b} \cdot (d(x_n, x_{n+1}))^c \cdot \left(\frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2} \right)^{1-a-b-c} \right) &\leq \end{aligned}$$

$$F \left((d(x_{n-1}, x_n))^{a+b} \cdot (d(x_n, x_{n+1}))^c \cdot \left(\frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2} \right)^\omega \right),$$

гдје $\omega = 1 - a - b - c$. Преласком на лимес гдје $n \rightarrow +\infty$ и примјеном особине функције F да у свакој тачки из $(0, +\infty)$ има лијеви и десни лимес, добијамо

$$\tau + F(\delta^+) \leq F(\delta^+).$$

Очигледно смо добили контрадикцију јер је $\tau > 0$. Тиме смо доказали да низ $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ тежи 0. Преостаје да покажемо да је низ $\{x_n\}$ Кошијев уз помоћ Леме 5.2. Претпоставимо супротно, и уврстимо у (5.10) $x = x_{n_k}, y = x_{m_k}$. Добијамо сљедећу строгу неједнакост:

$$\begin{aligned} d(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}) &< (d(x_{n_k}, x_{m_k}))^a \cdot (d(x_{n_k}, x_{n_k+1}))^b \\ &\cdot (d(x_{m_k}, x_{m_k+1}))^c \cdot \left(\frac{d(x_{n_k}, x_{m_k+1}) + d(x_{n_k+1}, x_{m_k})}{2} \right)^{1-a-b-c}. \end{aligned}$$

Ако у претходној неједнакости пустимо лимес када k тежи $+\infty$, добијамо

$$\varepsilon \leq (\varepsilon)^a \cdot (0)^b \cdot (0)^c \cdot \left(\frac{\varepsilon + \varepsilon}{2} \right)^{1-a-b-c} = 0,$$

што је у супротности са $\varepsilon > 0$.

Дакле, добијамо $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ када $n, m \rightarrow +\infty$, тј. како је (X, d) комплетан метрички простор постоји неки $x \in X$ такав да $x_n \rightarrow x$ како $n \rightarrow +\infty$. Даље, уврстимо у (5.10) x_n и x , гдје x гранична вриједност низа x_n

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, Tx) &< (d(x_n, x))^a \cdot (d(x_n, x_{n+1}))^b \cdot (d(x, Tx))^c \\ &\cdot \left(\frac{d(x_n, Tx) + d(x_{n+1}, x)}{2} \right)^{1-a-b-c} \\ &\leq (d(x_n, x))^a \cdot (d(x_n, x_{n+1}))^b \cdot (d(x, Tx))^c \\ &\cdot \left(\frac{d(x_n, x) + d(x, Tx) + d(x_{n+1}, x)}{2} \right)^{1-a-b-c}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Преласком на лимес у (5.11) када $n \rightarrow +\infty$, добијамо $d(x, Tx) = 0$, тј. x је фиксна тачка пресликавања T . $\square$

Примијетимо да из претходног (5.8) имплицира (5.9) и да (5.9) имплицира општији услов (5.10). Из (5.10) и само једном из (5.8) добили смо да пресликавање T има фиксну тачку. Ако претпоставимо да су x и y две различите фиксне тачке пресликавања

T , користећи услов (5.10) добијамо:

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(Tx,Ty) < (d(x,y))^a \cdot (d(x,Tx))^b \cdot (d(y,Ty))^c \\ &\quad \cdot \left(\frac{d(x,Ty) + d(y,Tx)}{2} \right)^{1-a-b-c} \\ &= (d(x,y))^a \cdot (0)^b (0)^c \cdot \left(\frac{d(x,y) + d(y,x)}{2} \right)^{1-a-b-c} \\ &= (d(x,y))^{1-b-c} \cdot 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Добијамо да је $d(x,y) = 0$, тј. $x = y$ и доказали смо да пресликавање T , ако задовољава услове (5.10) има јединствену фиксну тачку.

Аутори су у [192] увели појам проширених интерполативних Тирић-Рајх-Рус типа F -контракција.

Дефиниција 5.4 ([192]) *Нека је (X,d) метрички простор. Пресликавање $T : X \rightarrow X$ је проширена интерполативна Тирић-Рајх-Рус типа F -контракција ако постоје $\alpha, \beta \in (0,1)$ са $\alpha + \beta < 1, \tau > 0$ и $F \in \mathcal{F}$ такви да*

$$\begin{aligned} \tau + F(d(Tx,Ty)) &\leq \alpha F(d(x,y)) + \beta F(d(x,Tx)) \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta) F(d(y,Ty)) \end{aligned} \tag{5.12}$$

за све $x, y \in X \setminus \text{Fix}(T)$ са $d(Tx,Ty) > 0$.

Такође, у [192] аутори су формулисали и доказали следећи резултат:

Теорема 5.3 ([192]) *Проширена интерполативна Тирић-Рајх-Рус типа F -контракција на комплетном метричком простору X има фиксну тачку.*

Сада користећи сличне аргументе, тј., Леме 5.1 и 5.2 као и својства $(F1)$ и $(F2)$ функције F , значајно ћемо побољшати главни резултат из ([192], Теорема 2.2). Доказ се заснива на већ уведеној Дефиницији 5.4, као и Теорему 5.3.

Доказ. За произвољну тачку $x_0 \in X$, одговарајући Пикаров низ облика $x_{n+1} = Tx_n$ има сљедеће двије различите особине. Постоји $k \in \mathbb{N}$ такав да је $x_k = x_{k-1}$ или за све чланове низа x_n вриједи да је x_{n-1} различито од x_n . Из првог случаја слиједи да је x_{n-1} фиксна тачка пресликавања T . За други случај, прво доказујемо да $d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n)$. Претпоставимо супротно, тј. постоји m из $\mathbb{N}$ такав да $d(x_{m-1}, x_m) \leq d(x_m, x_{m+1})$. Тада користећи контрактивни услов у Дефиницији 5.4, добијамо

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_m, x_{m+1})) &\leq aF(d(x_{m-1}, x_m)) + bF(d(x_{m-1}, x_m)) + (1 - a - b) F(d(x_m, x_{m+1})) \\ &\leq aF(d(x_m, x_{m+1})) + bF(d(x_m, x_{m+1})) + (1 - a - b) F(d(x_m, x_{m+1})) \\ &= (a + b + 1 - a - b) F(d(x_m, x_{m+1})) = F(d(x_m, x_{m+1})), \end{aligned}$$

што је контрадикција са $\tau > 0$. Ово доказује да је низ $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ строго опадајући и тежи неком $\delta \geq 0$. Лако се може показати да је $\delta = 0$. Сада на сцену ступају познате Леме 5.1 и 5.2. Из прве слиједи да су сви чланови низа $\{x_n\}$ међусобно различити, а из друге, стављајући $x = x_{n_k}, y = x_{m_k}$ у (5.12) што је према Леми 5.1 могуће ($d(Tx, Ty) > 0$).

Дакле имамо

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_{n_k+1}, x_{m_k+1})) &\leq aF(d(x_{n_k}, x_{m_k})) + bF(d(x_{n_k}, x_{n_k+1})) \\ &\quad + (1 - a - b)F(d(x_{m_k}, x_{m_k+1})). \end{aligned}$$

Преласком на лимес када k тежи $+\infty$ добијамо

$$\tau + F(\varepsilon^+) \leq aF(\varepsilon^+) + (1 - a)F(0^+)$$

тј.

$$\tau + (1 - a)F(\varepsilon^+) \leq (1 - a)F(0^+) = -\infty,$$

што је очигледно контрадикција. Према томе, добијамо да $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ када $n, m \rightarrow +\infty$, односно, будући да је (X, d) комплетан метрички простор постоји неки $x \in X$ такав да $x_n \rightarrow x$ када $n \rightarrow +\infty$. Сада, претпоставимо да $x \neq Tx$, тј., $d(x, Tx) > 0$. Јасно је да постоји природан број k такав да $x, Tx \neq x_n$ за све $n \geq k$. У овом случају, стављајући у (5.12) x_n и x имамо

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_{n+1}, Tx)) &\leq \alpha F(d(x_n, x)) + \beta F(d(x_n, x_{n+1})) \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta)F(d(x, Tx)). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Пуштајући $n \rightarrow +\infty$ у неједнакости (5.13), добијамо да $F(d(x_{n+1}, Tx)) \rightarrow -\infty$. Према својству (F2) пресликавања F слиједи да $x_{n+1} \rightarrow Tx$ када $n \rightarrow +\infty$. То значи да $Tx = x$, тј. x је фиксна тачка пресликавања T . $\square$

Примјер 5.5 Нека је на $X = \{1, 2, 3\}$ дефинисана метрика

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ако } x = y, \\ \frac{5}{3} & \text{ако } (x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\}, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Јасно, (X, d) је комплетан. Узмимо $T1 = T3 = 1$ и $T2 = 3$. За $x = 1$ и $y = 2$, имамо

$$F(d(T1, T2)) = F(d(1, 3)) = F(1) \text{ и } F(d(x, y)) = F(d(1, 2)) = F(1).$$

Очигледно не можемо пронаћи $\tau > 0$ такво да $\tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))$, тј. теорема о фиксној тачки F -контракције није примјенљива.

С друге стране, нека су $x, y \in X \setminus \text{Fix}(T)$ са $d(Tx, Ty) > 0$. Слиједи $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$. Без губитка општости, узмимо $(x, y) = (2, 3)$.

Изаберимо $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{8}$, $F(t) = \ln(t)$, $g(t) = \frac{9}{10}$ и $\tau = \ln\left(\frac{10}{9}\right)$. Имамо

$$\begin{aligned}\tau + F(d(Tx, Ty)) &= \tau + \ln(d(T2, T3)) = \tau + \ln(d(3, 1)) \\ &= \tau + \ln(1) = \ln\left(\frac{10}{9}\right).\end{aligned}$$

Будући да је $28 \ln 5 + 49 \ln 2 < 76 \ln 3$ након неколико трансформација добијамо

$$\ln\left(\frac{10}{9}\right) \leq \ln\left(\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{24}}\right).$$

Односно имамо

$$\begin{aligned}\tau + F(d(Tx, Ty)) &= \ln\left(\frac{10}{9}\right) \leq \ln\left(\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{6}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{24}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{9}{10} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-a-b-c}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{9}{10} \cdot d(2, 3)^a \cdot d(2, 3)^b \cdot d(3, 1)^c \cdot \left(\frac{d(2, 1)}{2}\right)^{1-a-b-c}\right) \\ &= F\left(g\left((d(x, y))^a \cdot (d(x, Tx))^b \cdot (d(y, Ty))^c \cdot \left(\frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right)^{1-a-b-c}\right) \cdot (d(x, y))^a \cdot (d(x, Tx))^b \cdot (d(y, Ty))^c \cdot \left(\frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right)^{1-a-b-c}\right)\end{aligned}$$

односно, Теорема 5.2 вриједи за све $x, y \in X \setminus \text{Fix}(T)$ са $d(Tx, Ty) > 0$. Према томе, из Теореме 5.2, T има јединствену фиксну тачку ($x = 1$).

Примјер 5.6 Ако размотримо $F(t) = \ln(t)$ за $t > 0$ у Теорему 5.2 контракција постаје

$$d(Tx, Ty) \leq e^{-\tau} \cdot g(v(x, y, T, a, b, c)) \cdot v(x, y, T, a, b, c).$$

Као што можемо примијетити, Теорема 5.2 проширује интерполативну Геретијеву контракцију.

Сада уводимо проширену интерполативну Ћирић-Рајх-Рус-Харди-Роџерс типа F -контракцију и доказаћемо одговарајући резултат.

Дефиниција 5.5 ([176]) Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање T са X у самог себе је проширена интерполативна Ћирић-Рајх-Рус-Харди-Роџерс типа F -контракције (скраћено проширена $\mathcal{CR}$ контракција) ако постоје $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$, $\tau > 0$

и $F \in \mathcal{F}$ тако да

$$\begin{aligned} \tau + F(d(Tx, Ty)) &\leq \alpha F(d(x, y)) + \beta F(d(x, Tx)) \\ &\quad + \gamma F(d(y, Ty)) + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

за свако $x, y \in X \setminus \text{Fix}(T)$ гдје $d(Tx, Ty) > 0$.

Теорема 5.4 ([176]) *Проширена $\mathcal{CR}$ контракција на комплетном метричком простору има фиксну тачку ако је испуњен бар један од следећих услова:*

1. T је непрекидна;
2. F је непрекидна.

Доказ. [176] Нека је $x_0 \in X$ произвољан. Даље, за одговарајући Пикаров низ $x_n = Tx_{n-1}, n = 1, 2, \dots$ имамо двије опције:

Имамо или $x_k = x_{k-1}$ за неко $k \in \mathbb{N}$ или $x_n \neq x_{n-1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. У првом случају очигледно је да је x_{n-1} фиксна тачка од T . Док у другом случају, доказаћемо да је низ $\{x_n\}$ Кошијев. Прво, размотримо низ $d(x_n, x_{n+1})$. За њега добијамо следеће: стављајући $x = x_{n-1}, y = x_n$ у (5.14):

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_n, x_{n+1})) &\leq (\alpha + \beta) F(d(x_{n-1}, x_n)) + \gamma F(d(x_n, x_{n+1})) \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Претпоставимо да за неко $m \in \mathbb{N}$ имамо $d(x_{m-1}, x_m) \leq d(x_m, x_{m+1})$. Тада из (5.15), слиједи

$$\begin{aligned} \tau + F(d(x_m, x_{m+1})) &\leq (\alpha + \beta + \gamma) F(d(x_m, x_{m+1})) \\ &\quad + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{d(x_m, x_{m+1}) + d(x_m, x_{m+1})}{2}\right) \\ &= ((\alpha + \beta + \gamma) + (1 - \alpha - \beta - \gamma)) F(d(x_m, x_{m+1})) \end{aligned}$$

то јест,

$$\tau + F(d(x_m, x_{m+1})) \leq F(d(x_m, x_{m+1})). \quad (5.16)$$

Из (5.16) слиједи контрадикција са $\tau > 0$.

Дакле низ $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ је строго опадајући. Према томе, постоји $\delta \geq 0$ такво да $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow \delta^+$. Ако је $\delta > 0$ добијамо према (5.16):

$$\tau + F(\delta^+) \leq F(\delta^+),$$

што је нова контрадикција са $\tau > 0$. Слиједи $d(x_{n+1}, x_n) \rightarrow 0^+$ када $n \rightarrow +\infty$.

Сада, према Леми 5.2, стављајући $x = x_{n_k}, y = x_{m_k}$ (то је могуће јер је јасно да је

$x \neq y$) добијамо

$$\begin{aligned} & \tau + F\left(d\left(x_{n_k+1}, x_{m_k+1}\right)\right) \\ & \leq \alpha F\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right) + \beta F\left(d\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right)\right) + \gamma F\left(d\left(x_{m_k}, x_{m_k+1}\right)\right) \\ & + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{d\left(x_{n_k}, x_{m_k+1}\right) + d\left(x_{m_k}, x_{n_k+1}\right)}{2}\right), \end{aligned}$$

из чега, ако $k \rightarrow +\infty$, слиједи:

$$\begin{aligned} \tau + F\left(\varepsilon^+\right) & \leq \alpha F\left(\varepsilon^+\right) + \beta F\left(0^+\right) + \gamma F\left(0^+\right) \\ & + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^+}{2}\right) \\ & = \alpha F\left(\varepsilon^+\right) + (\beta + \gamma) F\left(0^+\right) + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\varepsilon^+\right) \\ & = (1 - \beta - \gamma) F\left(\varepsilon^+\right) + (\beta + \gamma) F\left(0^+\right) \end{aligned}$$

или,

$$\tau + (\beta + \gamma) F\left(\varepsilon^+\right) \leq -\infty,$$

што је очигледно контрадикција. То значи да је низ $\{x_n\}$ Кошијев. Будући да је метрички простор (X, d) комплетан, постоји $x \in X$ такав да $x_n \rightarrow x$ када $n \rightarrow +\infty$. Доказаћемо да је $Tx = x$ ако важи или (i) или (ii). Претпоставимо да је $Tx \neq x$. У случају (i) то је немогуће. Ако услов (ii) вази онда постоји природан број n_0 такав да за $n \geq n_0$ имамо да $x, Tx \notin \{x_n : n \geq n_0\}$. Стављајући сада x_n и x у (5.15) добијамо:

$$\begin{aligned} & \tau + F\left(d\left(x_{n+1}, Tx\right)\right) \leq \alpha F\left(d\left(x_n, x\right)\right) + \beta F\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) \\ & + \gamma F\left(d\left(x, Tx\right)\right) + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{d\left(x_n, Tx\right) + d\left(x, x_{n+1}\right)}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Пуштајући лимес у (5.17) када $n \rightarrow +\infty$, будући да је F непрекидна, добијамо,

$$\begin{aligned} \tau + F\left(d\left(x, Tx\right)\right) & \leq \alpha F\left(0^+\right) + \beta F\left(0^+\right) + \gamma F\left(d\left(x, Tx\right)\right) \\ & + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(\frac{d\left(x, Tx\right)}{2}\right) \\ & \leq (\alpha + \beta) F\left(0^+\right) + \gamma F\left(d\left(x, Tx\right)\right) + (1 - \alpha - \beta - \gamma) F\left(d\left(x, Tx\right)\right) \end{aligned}$$

то јест,

$$\tau + (\alpha + \beta) F\left(d\left(x, Tx\right)\right) \leq -\infty,$$

што је контрадикција, па претпоставка да $x \neq Tx$ је немогућа. $\square$

5.2 Проширене F -контракције у слабом b -метричким просторима

У овом поглављу усмјерени смо на проучавање (s, q, ϕ, F) -контракција у слабом b -метричким просторима, које на природан начин проширују и допуњују постојеће резултате засноване на класама интерполативних и F -контракција. Ове контракције обухватају широку и флексибилну класу трансформација, дефинисаних у терминима s, q, ϕ и F , чиме се покривају и линеарни и нелинеарни случајеви, за детаље погледати [68–72, 92, 148, 186, 193–208].

Главни резултат показује да (s, q, ϕ, F) - g -слабе контракције посједују фиксну тачку у слабом b -метричким просторима уколико је функција F или само контракција непрекидна. Као илустрацију, примијенили смо добијене резултате на проблем постојања и јединствености рјешења за одређене класе нелинеарних интегралних једначина.

Посебно треба истаћи да је генерализација Банаховог принципа контракције, уведена кроз F -контракције Вардовског [98, 209] и интерполативне контракције Карапинара [92], дала снажан подстицај даљем развоју ове области. Ти приступи су касније проширени додатним релаксацијама, као што су слабљење контрактивних услова или уклањање одређених ограничења на пресликавања и саме просторе. У том контексту, контракције типа (s, ϕ, F) и (s, q, ϕ, F) , које уводимо у овом поглављу, представљају природне варијанте контракција Вардовског у окружењу слабих b -метричких простора и омогућавају обухватнију анализу фиксних тачака.

Започињемо са дефиницијом која је проширује појам контракције Вардовског (ϕ, F) -контракција у оквиру генерализованог метричког простора.

Дефиниција 5.6 ([210]) *Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и f пресликавање у себе скупа X . За пресликавање f кажемо да је (s, q, ϕ, F) -контракција ако постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:*

- (a) F је строго растућа;
- (b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;
- (c) За све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q > 0$

$$\phi(d(x, y)) + F(s^q d(fx, fy)) \leq F(d(x, y)). \quad (5.18)$$

Напомена 5.3 Из својства функције F и услова (5.18) добијамо

$$d(fx, fy) \leq s^q d(fx, fy) < d(x, y).$$

Непрекидност пресликавања f слиједи из неједнакости $d(fx, fy) < d(x, y)$.

Напомена 5.4

- Дефиниција 5.6 генерализује претходне дефиниције дате у [9, 198] и садржи смањен број услова у поређењу са претходним дефиницијама.
- Дефиниција 5.1 је непосредна последица дефиниције (s, q, F) -контракције, ако узмемо $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ да буде константна функција.
- Ако је $s = 1$ добијамо дефиницију Вардовског у [98, 209] у случају слабих метричких простора (*metric-like space*).

Сљедеће тврђење је прва теорема о фиксној тачки за пресликавање типа (s, q, ϕ, F) -контракције.

Теорема 5.5 ([210]) *Нека је (X, d) комплетан слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$. Ако је f (s, q, ϕ, F) -контракција на X , онда функција f има јединствену фиксну тачку у X .*

Доказ. ([210]) Нека је $x_0 \in X$ и Пикаров итеративни низ $\{x_n\}$ дефинисан са $x_{n+1} = f(x_n)$ за $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Доказ је јасан у случају да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, са $x_{n_0+1} = x_{n_0}$. Дакле, претпоставићемо да $x_{n+1} \neq x_n$, што даје $fx_n \neq fx_{n-1}$ и $d(fx_n, fx_{n-1}) > 0$, за све $n \in \mathbb{N}$. Користећи неједнакост (5.18), имамо

$$\begin{aligned} F(s^q d(x_n, x_{n+1})) &\leq \phi(d(x_{n-1}, x_n)) + F(s^q d(x_n, x_{n+1})) \\ &= \phi(d(x_{n-1}, x_n)) + F(s^q d(fx_{n-1}, fx_n)) \\ &\leq F(d(x_{n-1}, x_n)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Даље из неједнакости (5.19) добијамо

$$s^q d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n),$$

што имплицира

$$d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{s^q} d(x_{n-1}, x_n).$$

У погледу Леме 1.1, одговарајући Пикаров низ $\{x_n\}$ са почетном тачком x_0 је Кошијев низ такав да $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0$. Посто је (X, d) комплетан слаби b -метрички простор, закључујемо да постоји $x \in X$ такав да

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = d(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0. \quad (5.20)$$

Према (5.18) слиједи

$$F(s^q d(fx, fx_n)) \leq \phi(d(x, x_n)) + F(s^q d(fx, fx_n)) \leq F(d(x, x_n)),$$

из својства F добијамо

$$s^q d(fx, fx_n) \leq d(x, x_n). \quad (5.21)$$

Из релаксиране неједнакости троугла и (5.21), имамо

$$d(fx, fx) \leq 2sd(fx, fx_n) \leq 2s^q d(fx, fx_n) \leq 2d(x, x_n).$$

Како је f непрекидна и користећи (5.20), (5.21) добијамо

$$d(fx, fx) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(fx_n, fx) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 2d(x_n, x) = 2d(x, x) = 0. \quad (5.22)$$

Из $d(x, fx) \leq s[d(x, fx_n) + d(fx, fx_n)]$, када $n \rightarrow +\infty$ добијамо да је $d(x, fx) = 0$. Дакле $fx = x$ и тако f има фиксну тачку. Такође из (5.20) имамо $d(x, x) = 0$.

Да бисмо доказали јединственост фиксне тачке, претпоставимо да је $v \in X$ још једна различита фиксна тачка. Из $v \neq x$ слиједи $fv \neq fx$, тада

$$F(s^q d(v, x)) = F(s^q d(fv, fx)) \leq \phi(d(v, x)) + F(s^q d(fv, fx)) \leq F(d(v, x)),$$

што имплицира

$$d(v, x) < \frac{1}{s^q} d(v, x).$$

Претходна неједнакост је контрадикција, па је $d(v, x) = 0$ и фиксна тачка је јединствена. $\square$

Посљедица 5.2 ([210]) *Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и f пресликавање у себе скупа X . Ако постоје растућа функција $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ и позитивна константа τ такве да*

$$\tau + F(s^q d(fx, fy)) \leq F(d(x, y)) \quad (5.23)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q > 0$, онда f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. ([210]) Из неједнакости (5.18) добијамо (5.23) ако уврстимо $\phi(r) = \tau > 0$. $\square$

Примјер 5.7 ([210]) *Нека је $X = [0, +\infty)$ и $d(x, y) = x^2 + y^2 + |x - y|^2$, за све $x, y \in X$. Примјетимо да је d , слаба b -метрика на X , са параметром $s = 2$ и (X, d) је комплетан. Такође, d није метрика нити b -метрика на X . Посматрајмо пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано са $fx = \frac{\ln(1+x)}{5}$. За све $x, y \in X$ и константу $q = 2$, имамо*

$$\begin{aligned} s^2 d(fx, fy) &= 4 \left(f^2 x + f^2 y + |fx - fy|^2 \right) \\ &= 4 \left(\left(\frac{\ln(x+1)}{5} \right)^2 + \left(\frac{\ln(y+1)}{5} \right)^2 + \left| \frac{\ln(x+1)}{5} - \frac{\ln(y+1)}{5} \right|^2 \right) \\ &\leq 4 \left[\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \left| \frac{x}{5} - \frac{y}{5} \right|^2 \right] = \frac{4}{25} [x^2 + y^2 + |x - y|^2] \\ &\leq \frac{1}{5} d(x, y). \end{aligned}$$

Узимајући логаритме у горњој неједнакости и фиксирајући $\tau = \ln 5$ и функцију $F(t) = \ln t$ имамо да су услови Посљедице 5.2 испуњени и очигледно $x = 0$ је јединствена фиксна тачка од f .

Са циљем проширења Дефиниције 5.1 и резултата који укључује Теорему 5.5 и њене одговарајуће посљедице уводимо следеће појмове.

Нека је Γ_4 скуп свих непрекидних функција $g : [0, +\infty)^4 \rightarrow [0, +\infty)$ које задовољавају

- (a) g је неоппадајућа у односу на сваку промјенљиву,
- (b) $g(t, t, t, t) \leq t$ за $t \in [0, +\infty)$.

Дефиниција 5.7 ([210]) *Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ пресликавање у себе скупа X . Кажемо да је f генерализована (s, q, ϕ, F) - g -слаба контракција, ако постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ и $g \in \Gamma_4$ такве да:*

- (a) F је строго растућа;
- (b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;
- (c)

$$\phi(d(x, y)) + F(s^q d(fx, fy)) \leq F \left(g \left(d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{4s} \right) \right) \quad (5.24)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Посљедица 5.3 ([210])

- Горња дефиниција се своди на генерализовану (s, q, F) - g -слабу контракцију постављањем $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ да буде константна функција $\phi(r) = \tau > 0$.
- За параметар $s = 1$ добијамо дефиницију (ϕ, F) - g -слабе контракције у окружењу метричких и слабих метричких простора.
- За $s = 1$ и $\phi(r) = \tau > 0$ добијамо дефиницију (F, g) -слабе контракције у окружењу метричких и слабих метричких простора.

Теорема 5.6 ([210]) *Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и пресликавање $f : X \rightarrow X$ генерализована (s, q, ϕ, F) - g -слаба контракција. Ако је f или F непрекидна, тада f има јединствену фиксну тачку у X .*

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно и конструишимо Пикаров итеративни низ $\{x_n\}$ као $x_{n+1} = f(x_n)$ за $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Доказ је јасан у случају да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, са $x_{n_0+1} = x_{n_0}$. Према томе, претпостављамо да $x_{n+1} \neq x_n$, што значи $fx_m \neq fx_{n-1}$ или

$$d(fx_n, fx_{n-1}) > 0$$

за све $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Користећи (5.24) за $x = x_n$, $y = x_{n-1}$ имамо

$$\begin{aligned}
 \phi(d(x_n, x_{n+1})) + F(s^q d(x_n, x_{n+1})) &= \phi(d(fx_{n-1}, fx_n)) + F(s^q d(fx_{n-1}, fx_n)) \\
 &\leq F\left(g\left(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, fx_{n-1}), d(x_n, fx_n), \frac{d(x_{n-1}, fx_n) + d(x_n, fx_{n-1})}{4s}\right)\right) \\
 &= F\left(g\left(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)}{4s}\right)\right) \\
 &\leq F\left(g\left(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{sd(x_{n-1}, x_n) + sd(x_n, x_{n+1}) + 2sd(x_{n-1}, x_n)}{4s}\right)\right) \\
 &= F\left(g\left(d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_n, x_{n+1}) + 3d(x_{n-1}, x_n)}{4}\right)\right).
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Ако претпоставимо да је $d(x_{n-1}, x_n) \leq d(x_n, x_{n+1})$ тада неједнакост (5.25) даје

$$\begin{aligned}
 \phi(d(x_n, x_{n+1})) + F(s^q d(x_n, x_{n+1})) &\leq F\left(g\left(d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})\right)\right) \\
 &\leq F(d(x_n, x_{n+1})),
 \end{aligned}$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Дакле, добијамо

$$\begin{aligned}
 F(s^q d(x_n, x_{n+1})) &\leq F(d(x_n, x_{n+1})) - \phi(d(x_n, x_{n+1})) \\
 &< F(d(x_n, x_{n+1})),
 \end{aligned}$$

што је контрадикција. Према томе

$$d(x_n, x_{n+1}) < d(x_{n-1}, x_n),$$

за све $n \in \mathbb{N}$. Тако је низ $\{d(x_{n-1}, x_n)\}$ опадајући и ограничен одоздо. Сходно томе, постоји $l \geq 0$ такав да $d(x_{n-1}, x_n) \rightarrow l$ када $n \rightarrow +\infty$. Ако је $l > 0$, онда када пустимо $n \rightarrow +\infty$ у (5.25) добијамо

$$\phi(l) + F(s^q l) \leq F(l),$$

што је контрадикција. Због тога, закључујемо да је $l = 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{n-1}, x_n) = 0. \tag{5.26}$$

Даље, показујемо да $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$. Претпоставимо супротно $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) > 0$. Тада по Леми 1.4 постоје $\varepsilon > 0$ и низови $\{m_k\}$ и $\{n_k\}$ позитивних целих бројева, са $n_k > m_k > k$, тако да

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad d(x_{m_k}, x_{n_k-1}) < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{s^2} &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \leq \varepsilon s, \\ \frac{\varepsilon}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} d(x_{n_k-1}, x_{m_k}) \leq \varepsilon s^2, \\ \frac{\varepsilon}{s} &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) \leq \varepsilon s^2.\end{aligned}$$

Из услова (5.24), добијамо

$$\begin{aligned}&\phi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) + F(s^q d(x_{m_k}, x_{n_k})) \\&= \phi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) + F(s^q d(fx_{m_k-1}, fx_{n_k-1})) \\&\leq F\left(g\left(d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}), d(x_{m_k-1}, fx_{m_k-1}), d(x_{n_k-1}, fx_{n_k-1}), \right.\right. \\&\quad \left.\left.\frac{d(x_{m_k-1}, fx_{n_k-1}) + d(x_{n_k-1}, fx_{m_k-1})}{4s}\right)\right) \\&= F\left(g\left(d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}), d(x_{m_k-1}, x_{m_k}), d(x_{n_k-1}, x_{n_k}), \frac{d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k-1}, x_{m_k})}{4s}\right)\right) \\&\quad (5.27)\end{aligned}$$

Узимајући горњу границу у (5.27) када $k \rightarrow +\infty$ и користећи Лему 1.3, Лему 1.4 и (5.26), добијамо

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) + F(s^q \varepsilon) &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) + F\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} s^q d(x_{m_k}, x_{n_k})\right) \\&\leq F\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} g\left(d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}), d(x_{m_k-1}, x_{m_k}), d(x_{n_k-1}, x_{n_k}), \right.\right. \\&\quad \left.\left.\frac{d(x_{m_k-1}, x_{n_k}) + d(x_{n_k-1}, x_{m_k})}{4s}\right)\right) \\&\leq F\left(g\left(\varepsilon, 0, 0, \frac{\varepsilon}{2s}\right)\right) \\&\leq F(\varepsilon s).\end{aligned}$$

Према томе, добијена неједнакост

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(d(x_{m_k}, x_{n_k})) + F(\varepsilon s^q) < F(\varepsilon s),$$

је контрадикција пошто је $\varepsilon > 0$. Тако $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$ и низ $\{x_n\}$ је Кошијев у комплетном слабом b -метричком простору (X, d) . Дакле, постоји $x \in X$ такав да

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = d(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} d(x_n, x_m) = 0. \quad (5.28)$$

Нека је $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да $x_{n+1} \neq fx$ за све $n \geq n_0$ и $x \neq fx$. Сада користећи услов (5.24) и својство пресликавања F имамо

$$\begin{aligned} \phi(d(x_n, x)) + F(s^q d(x_{n+1}, fx)) &= \phi(d(x_n, x)) + F(s^q d(fx_n, fx)) \\ &\leq F\left(g\left(d(x_n, x), d(x_n, fx_n), d(x, fx), \frac{d(x_n, fx) + d(x, fx_n)}{4s}\right)\right) \\ &= F\left(g\left(d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(x, fx), \frac{d(x_n, fx) + d(x, x_{n+1})}{4s}\right)\right), \end{aligned}$$

из чега слиједи

$$\phi(d(x_n, fx)) + s^q d(x_{n+1}, fx) < g\left(d(x_n, x), d(x_n, x_{n+1}), d(x, fx), \frac{d(x, x_{n+1})}{2s}\right). \quad (5.29)$$

Узимајући горњу границу у (5.29), и користећи Лему 1.1 и резултат (5.26), слиједи да је

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \phi(d(x_n, fx)) + s^{q-1} d(x, fx) = s^q \cdot \frac{1}{s} d(x, f) < g(0, 0, d(x, fx), 0) \leq d(x, fx). \quad (5.30)$$

Из услова $q \geq 1$, неједнакост (5.30) даје $d(x, fx) = 0$ па је $fx = x$. Дакле, x је фиксна тачка и

$$0 = d(x, fx) = d(x, x). \quad (5.31)$$

Нека су x и v две фиксне тачке од f , гдје је $fx = x$ и $fv = v$. Из $x \neq v$ слиједи $fx \neq fv$, па на основу (5.24) имамо

$$\begin{aligned} \phi(x, v) + F(s^q d(x, v)) &= \phi(x, v) + F(s^q d(fx, fv)) \\ &\leq F\left(g\left(d(x, v), d(x, fx), d(v, fv), \frac{d(x, fv) + d(v, fx)}{4s}\right)\right) \\ &= F\left(g\left(d(x, v), d(x, x), d(v, v), \frac{d(x, v) + d(v, x)}{4s}\right)\right) \\ &= F\left(g\left(d(x, v), d(x, x), d(v, v), \frac{d(x, v)}{2s}\right)\right) \\ &= F\left(g\left(d(x, v), 0, 0, \frac{d(x, v)}{2s}\right)\right) \\ &\leq F\left(g\left(d(x, v), d(x, v), d(x, v), d(x, v)\right)\right) \\ &\leq F(d(x, v)). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Како смо дошли до контрадикције, слиједи да је $d(x, v) = 0$. Према томе $x = v$ и фиксна тачка је јединствена. $\square$

Сљедећи резултат слиједи из Теореме 5.6 замјеном $\phi(r) = \tau$.

Теорема 5.7 ([210]) Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in \Gamma_4$ и константа $\tau > 0$ такве да

(a) F је строго растућа;

(b) $\tau + F(s^q d(fx, fy)) \leq F\left(g\left(d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{4s}\right)\right)$ за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Напомена 5.5 Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:

(a) F је строго растућа;

(b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;

(c)

$$\begin{aligned} & \phi(d(x, y)) + F(s^q d(fx, fy)) \\ & \leq F\left(\max\left(d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{4s}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 5.6 узимањем $g \in \Gamma_4$ као $g(t_1, t_2, t_3, t_4) = \max\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. $\square$

Напомена 5.6 Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:

(a) F је строго растућа;

(b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;

(c) $\phi(d(x, y)) + F(s^q d(fx, fy))$

$$\leq F\left(\max\left(a_1 d(x, y) + a_2 d(x, fx) + a_3 d(y, fy) + a_4 \frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{4s}\right)\right) \quad (5.34)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 5.6. Одаберимо $g \in \Gamma_4$ као $g(t_1, t_2, t_3, t_4) = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + a_4 t_4$ са $0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 < 1$.

□

У претходној деценији као један од смјерова интензивног истраживања су нови типови контракција познати као интерполативне контракције и хибридне контракције. Читаоца упућујемо на радове [69, 92, 186, 199–201]. У наставку се бавимо овим типом контракција проширених у контексту слабих b -метричких простора, које се могу добити из следећих резултата као специјални случајеви.

Теорема 5.8 ([210]) *Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:*

(a) F је строго растућа;

(b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;

(c)

$$\begin{aligned} & \phi(d(x, y)) + F(s^q d(fx, fy)) \\ & \leq F \left(\left[a_1 (d(x, y))^p + a_2 (d(x, fx))^p + a_3 (d(y, fy))^p + a_4 \left(\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{4s} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 5.6 узимањем $g \in \Gamma_4$ као

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = [a_1 t_1^p + a_2 t_2^p + a_3 t_3^p + a_4 t_4^p]^{\frac{1}{p}}, p > 0,$$

гдје је $0 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4 < 1$.

□

Теорема 5.9 ([210]) *Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:*

(a) F је строго растућа;

(b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;

(c)

$$\begin{aligned} & \phi(d(x,y)) + F(s^q d(fx, fy)) \\ & \leq F \left(\left[\max \left\{ (d(x,y))^p, (d(x,fx))^p, (d(y,fy))^p, \left(\frac{d(x,fy) + d(y,fx)}{4s} \right)^p \right\} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 5.6 узимањем $g \in \Gamma_4$ као

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = \left[\max \{t_1^p, t_2^p, t_3^p, t_4^p\} \right]^{\frac{1}{p}}, p > 0.$$

□

Теорема 5.10 Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:

(a) F је строго растућа;

(b) $\liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0$ за све $t > 0$;

(c)

$$\begin{aligned} & \phi(d(x,y)) + F(s^q d(fx, fy)) \\ & \leq F \left((d(x,y))^{a_1} (d(x,fx))^{a_2} (d(y,fy))^{a_3} \left(\frac{d(x,fy) + d(y,fx)}{4s} \right)^{1-(a_1+a_2+a_3)} \right) \end{aligned} \quad (5.37)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 5.6 узимањем $g \in \Gamma_4$ као

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^{a_1} \cdot t_2^{a_2} \cdot t_3^{a_3} \cdot t_4^{1-(a_1+a_2+a_3)},$$

гдје су $a_1, a_2, a_3 \in (0, 1)$ и $a_1 + a_2 + a_3 < 1$.

□

Теорема 5.11 ([210]) Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ и $\lambda \in (0, 1)$ такве да:

(a) F је строго растућа;

$$(b) \liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0 \text{ за све } t > 0;$$

(c)

$$\begin{aligned} & \phi(d(x,y)) + F(s^q d(fx, fy)) \\ & \leq F \left(\left[\lambda \max \left\{ (d(x,y))^p, (d(x,fx))^p, (d(y,fy))^p, \left(\frac{d(x,fy) + d(y,fx)}{4s} \right)^p \right\} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \end{aligned} \quad (5.38)$$

за све $x, y \in X$ са $fx \neq fy$, и за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. ([210]) Доказ слиједи из Теореме 5.6 узимањем $g \in \Gamma_4$ као

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = \left[\lambda \max \{ t_1^p, t_2^p, t_3^p, t_4^p \} \right]^{\frac{1}{p}}, p > 0, \lambda \in (0, 1).$$

□

Теорема 5.12 ([210]) Нека је (X, d) слаби b -метрички простор са параметром $s \geq 1$ и $f : X \rightarrow X$ непрекидно пресликавање. Претпоставимо да постоје функције $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такве да:

(a) F је строго растућа;

$$(b) \liminf_{r \rightarrow t^+} \phi(r) > 0 \text{ за све } t > 0;$$

(c)

$$\phi(d(x,y)) + F(s^q d(fx, fy)) \leq F((d(x,fx))^{a_1} (d(y,fy))^{1-a_1}) \quad (5.39)$$

за све $x, y \in X \setminus F(\text{Fix}(f))$ са $fx \neq fy$, за неко $q \geq 1$.

Тада f има јединствену фиксну тачку у X .

Доказ. Доказ слиједи из Теореме 5.6 узимањем $g \in \Gamma_4$ као

$$g(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_2^a \cdot t_3^{1-a}, a \in (0, 1).$$

□

5.2.1 Примјена на рјешавање интегралне једначине

Студија егзистенције и јединствености рјешења диференцијалних и интегралних једначина игра фундаменталну улогу у истраживањима нелинеарне анализе и примјене математике. Један од главних алата у овој области је примјена теорема фиксне тачке.

Испитаћемо постојање рјешења нелинеарне интегралне једначине

$$v(t) = \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) H_1(\rho, v(\rho)) d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) H_2(\rho, v(\rho)) d\rho; \quad t, k \in [0, 1], \quad (5.40)$$

гдје су λ_i позитивне константе и функције $G_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $H_i : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за $i = 1, 2$ су дате.

Нека је $X = C([0, 1])$ скуп свих реалних непрекидних функција на $[0, 1]$ са слабом b -метриком

$$d(v, u) = \sup_{\rho \in [0, 1]} |v(\rho) + u(\rho)|^m \quad \text{за све } v, u \in X, m \in \mathbb{N}. \quad (5.41)$$

Очигледно (X, d) је комплетан слаби b -метрички простор са параметром $s = 2^{m-1}$.

Посматрајмо пресликавање $f : X \rightarrow X$ дефинисано са

$$fv(t) = \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) H_1(\rho, v(\rho)) d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) H_2(\rho, v(\rho)) d\rho;$$

за свако $v \in X$ и $t, k \in [0, 1]$.

Теорема 5.13 ([210]) *Нека за интегралну једначину (5.40) вриједје следећи услови :*

(i) *Пресликавање $f : X \rightarrow X$ је непрекидно;*

(ii) *$H_i : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ су непрекидне и постоји константа A_i која задовољава*

$$H_i(\rho, v(\rho)) + H_i(\rho, u(\rho)) \leq A_i |v(\rho) + u(\rho)|$$

за $i = 1, 2$ и $t, \rho, k \in [0, 1]$;

(iii) *Константе λ_i, A_i и функције G_i , за $i = 1, 2$ задовољавају услов*

$$0 < \lambda_1 A_1 \int_0^t G_1(t, \rho) d\rho + \lambda_2 A_2 \int_0^k G_2(t, \rho) d\rho < \frac{1}{\sqrt[m]{s^{q+1}}}$$

за $t, k \in (0, 1)$ и $q \geq 1$.

Тада интегрална једначина (5.40) има јединствено рјешење $v(t) \in X$.

Доказ. За свако $t \in [0, 1]$ и $v, u \in X$ имамо

$$\begin{aligned} s^q \sigma_d(fv(t), fu(t)) &= s^q |fv(t) + fu(t)|^m \\ &= s^q \left| \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) H_1(\rho, v(\rho)) d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) H_2(\rho, v(\rho)) d\rho \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) H_1(\rho, u(\rho)) d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) H_2(\rho, u(\rho)) d\rho \right|^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= s^q \left| \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) (H_1(\rho, v(\rho)) + H_1(\rho, u(\rho))) d\rho \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) (H_2(\rho, v(\rho)) + H_2(\rho, u(\rho))) d\rho \right|^m \\
 &\leq s^q \left| \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) A_1 (|v(\rho) + u(\rho)|) d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) A_2 (|v(\rho) + u(\rho)|) d\rho \right|^m \\
 &= s^q \left| \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) A_1 (|v(\rho) + u(\rho)|^m)^{\frac{1}{m}} d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) A_2 (|v(\rho) + u(\rho)|^m)^{\frac{1}{m}} d\rho \right|^m \\
 &\leq s^q \left| \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) A_1 (d(v, u))^{\frac{1}{m}} d\rho + \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) A_2 (d(v, u))^{\frac{1}{m}} d\rho \right|^m \\
 &= s^q \left| \lambda_1 (d(v, u))^{\frac{1}{m}} \int_0^t A_1 G_1(t, \rho) d\rho + \lambda_2 (d(v, u))^{\frac{1}{m}} \int_0^k A_2 G_2(t, \rho) d\rho \right|^m \\
 &= s^q \left| (d(v, u))^{\frac{1}{m}} \left(A_1 \lambda_1 \int_0^t G_1(t, \rho) d\rho + A_2 \lambda_2 \int_0^k G_2(t, \rho) d\rho \right) \right|^m \\
 &\leq s^q \left| \frac{1}{\sqrt[m]{s^{q+1}}} (d(v, u))^{\frac{1}{m}} \right|^m \\
 &= \frac{d(v, u)}{s}.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Ако применијемо логаритам у задњој неједнакости (5.42) имамо

$$\ln s + \ln(s^q d(fv, fu)) \leq \ln(d(v, u)).$$

Односно, ако уврстимо $F(\zeta) = \ln(\zeta)$, $\tau = \ln s$ и примјенимо $g \in \Gamma_4$ таква $g(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1$ слиједи

$$\tau + F(s^q d(fv, fu)) \leq F\left(g\left(d(v, u), d(v, fv), d(x, fu), \frac{d(v, fu) + d(x, fv)}{2s}\right)\right).$$

Према томе f је (s, q, ϕ, F) - g -контракција на X и сви услови Теореме 5.7 су испуњени. Уочимо да је $v(t)$ јединствена фиксна тачка од f , тј. рјешење интегралне једначине (5.40). $\square$

Закључак

У овом истраживању добијени су резултати који доприносе даљем развоју теорије фиксне тачке у метричким и генерализованим метричким просторима. Доказано је постојање јединствене фиксне тачке за проширене Харди–Роџерсове контракције у класичним метричким просторима. Уведене су полиномске и слабе полиномске контракције у b -метричким просторима, а затим је доказана и теорема заједничке фиксне тачке Јунговог типа за те класе пресликавања. Осим тога, извршена је прецизна анализа грешке итеративних низова у b -метричким, као и у квази b -метричким просторима.

Додатни значај представља увођење (s, q, φ, F) -контракција и њихових слабих варијанти у оквиру слабих b -метричких простора. Доказано је да за такве класе пресликавања постоји јединствена фиксна тачка, чиме се обједињују и проширују резултати Вардовског и других аутора у оквиру $\mathcal{F}$ -контракција, уз могућност примене у рјешавању интегралних једначина, што представља важну спону између апстрактне теорије и конкретних математичких модела.

У оквиру другог правца, радови посвећени интерполативним и проширеним контракцијама (Герети, Харди–Роџерс, Рус, Ћирић, као и новији приступи Вардовског) пружају значајне побољшања раније формулисаних резултата. Формулисане су нове класе проширених интерполативних F -контракција са строжијим условима. Добијени резултати омогућавају јединствено постојање фиксне тачке у комплетним метричким просторима и постављају основу за даља истраживања различитих типова контрактивних услова. Један од тренутних праваца даљег истраживања су Јунгова и Харди–Роџерс теорема у пертурбираним метричким просторима као и вишезначна пресликавања у јаким b -нормираним просторима.

Сумирано, рад обједињује класичне и модерне концепте у оквиру теорије фиксне тачке, уводи нове класе контракција и пружа прецизне процене итеративних метода, истовремено наглашавајући њихову примјенљивост. Тако постављени резултати отварају простор за даље истраживање тополошких и геометријских својстава генерализованих простора, као и њихову интеграцију у савремене математичке и примјењене дисциплине.

Литература

- [1] A.L. Cauchy. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Imprimerie Royale, Paris, 1821.
- [2] B. Riemann. Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. In H. Weber, editor, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1868. Original lecture in 1854.
- [3] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. *Giornale di Matematiche*, 6:284–312, 1868.
- [4] F. Klein. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. *Mathematische Annalen*, 4:573–625, 1871.
- [5] H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsien. *Acta Mathematica*, 1:1–62, 1882.
- [6] M. Fréchet. *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. PhD thesis, Université de Paris, Paris, 1906. Doctoral dissertation, introduction of metric spaces.
- [7] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre*. Veit & Comp., Leipzig, 1914.
- [8] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3(1):133–181, 1922.
- [9] S. Czerwik. Contraction mappings in b-metric spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, 1:5–11, 1993.
- [10] I.M. Vulpe, D. Ostrajkh, and F. Khojman. The topological structure of a quasimetric space. *Investigations in functional analysis and differential equations*, 27:31–42, 1981.
- [11] N. Bourbaki. *Topologie générale*. Hermann, Paris, 1966.
- [12] I.A. Bakhtin. The contraction mapping principle in almost metric spaces. *Funct. Anal., Uljanowsk Gos. Ped. Inst.*, 30:26–37, 1989.
- [13] S.G. Matthews. Partial metric topology. *Ann. New York Acad. Sci.*, 728:183–197, 1994.

- [14] Z. Mustafa and B. Sims. A new approach to generalized metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7(2):289–297, 2006.
- [15] A. Branciari. A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. *Publ. Math. Debrecen*, 57(1–2):31–37, 2000.
- [16] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [17] I. Kramosil and J. Michálek. Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11(5):336–344, 1975.
- [18] F.W. Lawvere. Metric spaces, generalized logic, and closed categories. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 43:135–166, 1973. Reprint: TAC Reprints 1 (2002).
- [19] E. Karapinar and R. P. Agarwal. *Fixed Point Theory in Generalized Metric Spaces*. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. Springer, 2022.
- [20] W. Wilson. On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 53:675–684, 1931.
- [21] E.W. Chittenden. Semi-metric spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 36:504–535, 1934.
- [22] M.B. Smyth. Quasi-uniformities: Reconciling domains with metric spaces. In *Mathematical Foundations of Programming Language Semantics*. Springer, 1988.
- [23] R. Kopperman. All topologies come from generalized metrics. *American Mathematical Monthly*, 95(2):89–97, 1992.
- [24] M. Krasner. Nombres des genres dans les corps valués complets. *Acta Arithmetica*, 2:353–369, 1944.
- [25] P. Hitzler and A.K. Seda. Dislocated topologies. *Journal of Electrical Engineering*, 51(12/s):3–7, 2000.
- [26] A. Amini-Harandi. Metric-like spaces, partial metric spaces and fixed point theory. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(204):1–10, 2012.
- [27] S. Shukla. Partial b-metric spaces and fixed point theorems. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 11(2):703–711, 2014.
- [28] S. Czerwik. Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. *Atti Sem. Mat. Univ. Modena*, 46(2):263–276, 1998.
- [29] H. Pajoohesh. On modified metric spaces. *Carpathian J. Math.*, 24(1):108–117, 2008.
- [30] H. Nakano. *Modulated Semi-Ordered Linear Spaces*. Tokyo Mathematical Book Series, 1950.

- [31] L. Huang and X. Zhang. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 332(2):1468–1476, 2007.
- [32] Z. Ma and J. Zhao. C^* -algebra valued metric spaces and related fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2009(1):Article ID 169837, 8 pages, 2009.
- [33] A. George and P. Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3):395–399, 1994.
- [34] D.H. Hyers. On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24:222–224, 1938.
- [35] D.G. Bourgin. Approximately isometric and quasi-normed linear spaces. *Duke Mathematical Journal*, 10:553–571, 1943.
- [36] R.R. Coifman and A. de Guzmán. Singular integrals and analysis on spaces of homogeneous type. *Revista Matemática Iberoamericana*, 1:5–56, 1970.
- [37] R.A. Macías and C. Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Advances in Mathematics*, 33(3):257–270, 1979.
- [38] R.R. Coifman and G. Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, volume 242 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1977.
- [39] D. Mitrea, I. Mitrea, M. Mitrea, and S. Monniaux. *Groupoid Metrization Theory: With Applications to Analysis on Quasi-Metric Spaces and Functional Analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [40] V. Berinde and M. Păcurar. The early developments in fixed point theory on b -metric spaces: A brief survey and some important related aspects. *Carpathian Journal of Mathematics*, 38:523–538, 07 2022.
- [41] M. Khamsi and N. Hussain. Krasnoselskii’s fixed point theorem in metric type spaces. *Nonlinear Anal.*, 71:365–371, 2010.
- [42] M. Bota, A. Molnar, and C. Varga. On Ekeland’s variational principle in b -metric spaces. *Fixed Point Theory*, 12(1):21–28, 2011.
- [43] N. Vulpe et al. Quasimetric structures and fixed points. *Investigations in Functional Analysis and Differential Equations*, 1977. Zbl 0502.54032.
- [44] T.V. An and N.V. Dung. Some properties of quasimetric spaces and fixed point theory. *Carpathian J. Math.*, 30(1):13–28, 2014.
- [45] S. Cobzaş. B -metric spaces, fixed points and lipschitz functions. *arXiv preprint arXiv:1802.02722*, 2019. version 3, 25 Mar 2019.

- [46] W.A. Kirk and N. Shahzad. Some results on fixed points in strong b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, pages Article ID 74593, 1–7, 2007.
- [47] A.H. Frink. Distance functions and the metrization problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43:133–142, 1937.
- [48] B.E. Gustavsson. On quasi-metric spaces. *Mathematica Scandinavica*, 35:313–319, 1974.
- [49] B. S. W. Schröder. On metrization of generalized metric spaces. *Topology Proceedings*, 30:445–456, 2006.
- [50] T.V. An and N.V. Dung. Stone-type theorems on quasi-metric and b -metric spaces. *Topology and its Applications*, 185–186:50–62, 2015.
- [51] P. Das, S. Dutta, and R.K. Nath. On metrizability of b -metric spaces and related results. *Topology and its Applications*, 313:108060, 2022.
- [52] J. Nagata. On a necessary and sufficient condition of metrizability. *Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University. Series A*, 1:93–100, 1950.
- [53] Y.M. Smirnov. A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 77:197–200, 1951.
- [54] T. Som. A note on the metrizability of b -metric spaces. *Topology and its Applications*, 264:106–111, 2019.
- [55] T. Som. On metrizability of b -metric spaces via generalized Chittenden theorem. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 13(1):100–111, 2020.
- [56] H. Aimar, R. Iaffei, and M. Nitti. On metric spaces related to quasi-metric spaces. *Mathematical Inequalities & Applications*, 1:647–666, 1998.
- [57] K. Paluszyński, M. and Stempak. On quasi-metric and metric spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(12):4307–4312, 2009.
- [58] N.V. Dung and V.T.L. Hang. On the completion of b -metric spaces. *Acta Mathematica Vietnamica*, 43(2):323–330, 2018.
- [59] S. Cobzaş and S. Czerwik. The completion of generalized b -metric spaces and fixed points. *Fixed Point Theory*, 21(1):133–150, 2020.
- [60] N. Hussain and S. Shah. Kannan type contractive mappings on quasi b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 83, 2011.
- [61] N. Hussain, M.A. Khamsi, and A. Latif. Common fixed point theorems in dislocated b -metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 13(3):529–540, 2012.
- [62] Z. Mustafa, B. Sims, H. Aydi, and E. Karapinar. On rectangular b -metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 15(6):1187–1196, 2014.

- [63] M.A. Alghamdi, N. Hussain, and P. Salimi. Fixed point results for various contractions in b -metric-like spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(402):1–20, 2013.
- [64] H. Huang and H. Xu. Fixed point theorems for contractive mappings in cone b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 322, 2014.
- [65] E. Karapinar, H. K. Nashine, and B. Samet. Fixed point theorems on probabilistic b -metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, page 201, 2012.
- [66] B. Samet, C. Vetro, and F. Vetro. Fixed point theorems in fuzzy b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 1, 2013.
- [67] Z. Ma, L. Jiang, and H. Yu. Fixed point theorems for contractive mappings in C^* -algebra-valued b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 24, 2016.
- [68] K. Zoto, S. Radenović, and H. A. Ansari. On some fixed point results for (s, p) -contractive mappings in b -metric-like spaces and applications to integral equations. *Open Math*, 16:235–249, 2018.
- [69] E. Karapinar, H. Aydi, and A. Fulga. On Hybrid-Wardoski Contractions. *Journal of Mathematics*, pages 526–534, 2020.
- [70] K. Zoto, S. Radenović, J. Dine, and I. Vardhami. Fixed points of generalized (ψ, s, α) -contractive mappings in dislocated and b dislocated metric spaces. *Commun. Optim. Theory*, 2017.
- [71] M. De la Sen, N. Nikolić, T. Došenović, M. Pavlović, and S. Radenović. Some results on $(s - q)$ - graphic contraction mappings in b -metric-like spaces. *Mathematics*, 7:1190–1197, 2019.
- [72] S. Aleksić, Z. Mitrović, and S. Radenović. Picard sequences in b -metric spaces. *Fixed Point Theory*, 21(2):379–388, 02 2019.
- [73] J. Liouville. Mémoire sur l’application de la méthode des approximations successives à l’intégration d’une classe d’équations différentielles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3:342–376, 1838.
- [74] E. Picard. *Théorie des équations différentielles*. Gauthier-Villars, Paris, 1890.
- [75] G. Peano. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. *Torino Atti della Reale Accademia delle Scienze*, 23:52–90, 1887.
- [76] R. Lipschitz. Zur theorie der differentialgleichungen. *Crelle’s Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 63:1–71, 1864.
- [77] R. Caccioppoli. Un teorema generale sull’esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. *Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 11:357–363, 1930.

- [78] B.E. Rhoades. A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 226:257–290, 1977.
- [79] R. Kannan. Some results on fixed points. *Bulletin Calcutta Mathematical Society*, 10:71–76, 1968.
- [80] J. Górnicki. Fixed point theorems for Kannan type mappings. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19:2145–2152, 2017.
- [81] S.K. Chatterjea. Fixed-point theorems. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 25:727–730, 1972.
- [82] S. Reich. Some remarks concerning contraction mappings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 14:121 – 124, 1971.
- [83] G.E. Hardy and T.D. Rogers. A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2):201–206, 1973.
- [84] T. Zamfirescu. Fixed point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik*, 23:292–298, 1972.
- [85] L.B. Ćirić. A generalization of Banach’s contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2):267–273, 1974.
- [86] Y.I. Alber and S. Guerre-Delabriere. Principle of weakly contractive maps in hilbert spaces. In I. Gohberg and Yu. Lyubich, editors, *New Results in Operator Theory*, volume 98 of *Operator Theory: Advances and Applications*, pages 7–22. Birkhäuser, Basel, 1997.
- [87] B.E. Rhoades. Some theorems on weakly contractive maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 47(4):2683–2693, 2001.
- [88] A. Meir and E. Keeler. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, 28(2):326–329, 1969.
- [89] D. Boyd and J. Wong. On nonlinear contractions. *Proceedings of The American Mathematical Society - PROC AMER MATH SOC*, 20:458–468, 02 1969.
- [90] G. Jungck. Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, 83:261–263, 04 1974.
- [91] M.A. Geraghty. On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40(2):604–608, 1973.
- [92] E. Karapinar. Revisiting the Kannan type contractions via interpolation. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*, 2:85–87, 2018.
- [93] T. Suzuki. A generalization of the Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(5):1861–1869, 2008.
- [94] T. Suzuki. A new type of fixed point theorem in metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):5313–5317, 2009.

- [95] S.B. Nadler. Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2):475–488, 1969.
- [96] I. Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2):324–353, 1974.
- [97] J. Caristi. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 215:241–251, 1976.
- [98] D. Wardowski. Fixed points of new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012, 12 2012.
- [99] J. Górnicki. Various extensions of Kannan’s fixed point theorem. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20:20, 2018.
- [100] J. Górnicki. Remarks on asymptotic regularity and fixed points. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21:29, 2019.
- [101] M. Khamsi. Generalized metric spaces: A survey. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 17:455–475, 2015.
- [102] Z. Kadelburg and S. Radenović. On generalized metric spaces: A survey. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(1):3–13, 2014.
- [103] T. Van An. Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, 109:175–186, 2015.
- [104] S. Cobzaş. Fixed points and completeness in metric and in generalized metric spaces. *arXiv preprint*, 2015. See arXiv:1508.05173.
- [105] M. Kabil and M. Pouzet. Generalized metric spaces. relations with graphs, ordered sets and automata: A survey. *arXiv preprint*, 2020. See arXiv:2002.03019.
- [106] V. Berinde. Generalized contractions in quasimetric spaces. Technical report, Seminar on Fixed Point Theory (Preprint No. 93-3), Babeş-Bolyai Univ., Cluj-Napoca, 1993.
- [107] V. Berinde. Sequences of operators and fixed points in quasimetric spaces. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 41(4):23–27, 1996.
- [108] V. Berinde. *Generalized contractions and applications*. Cub Press, Baia Mare, Romania, 1997.
- [109] S. Czerwik, K. Dłutek, and S.L. Singh. Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b -metric spaces. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 22:29–35, 2001.
- [110] S.L. Singh, K. Bhatnagar, and S.N. Mishra. A fixed point theorem for multivalued generalized contractions in quasi-metric spaces. *Demonstratio Mathematica*, 38(1):177–182, 2005.

- [111] M. Boriceanu. Fixed point theorems for multivalued weakly picard operators in b -metric spaces. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 53(4):3–14, 2008.
- [112] M.O. Olatinwo. Some common fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type in b -metric spaces. *Acta Univ. Apulensis*, 16:103–112, 2008.
- [113] M. Păcurar. Fixed point theorems for φ -contractions in b -metric spaces without bounded orbit assumption. *Fixed Point Theory*, 11(2):323–334, 2010.
- [114] H. Aydi, M. Bota, E. Karapınar, and S. Moradi. A common fixed point theorem for weak φ -contractions in b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:Article ID 88, 8 pages, 2012.
- [115] J.R. Roshan, V. Parvaneh, and S. Sedghi. Fixed points of generalized (ψ, φ) -contractions in ordered b -metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013:Article ID 130, 13 pages, 2013.
- [116] T.V. An, N.V. Dung, Z. Kadelburg, and S. Radenović. Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. (RACSAM)*, 109(1):175–198, 2015.
- [117] Z.D. Mitrović. Some results on fixed point theory in generalized b -metric spaces. *Mathematical Vesnik*, 68(4):235–248, 2016.
- [118] M. Arandjelović. Applications of fixed point theorems in b -metric spaces to differential equations. *Filomat*, 31(16):5055–5066, 2017.
- [119] S. Czerwik. On b -metric spaces and brouwer and schauder fixed point principles. In *Approximation Theory and Analytic Inequalities*, pages 71–86. Springer, 2021.
- [120] H. Aydi, E. Karapınar, and B. Samet. New fixed point results in extended b -metric spaces via simulation functions. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22:53, 2020.
- [121] E. Karapınar. Further results on F -contractions in b -metric spaces. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 5(2):85–97, 2021.
- [122] Z.D. Mitrović. Common fixed point results in partial b -metric spaces and applications. *Mathematics*, 10(12):2103, 2022.
- [123] S. Radenović and C. Vetro. On some new fixed point results in b -metric-like spaces. *Axioms*, 12(4):389, 2023.
- [124] M. Arandjelović and Z.D. Mitrović. Iterative methods and stability in b -metric spaces. *Mathematics*, 11(6):1432, 2023.
- [125] Z.D. Mitrović, R. George, and H. Hosseinzadeh. Some results on fixed points on the product of b -metric spaces with applications. *Fixed Point Theory*, 26(1):225–234, 2025.

- [126] S.L. Singh, S. Czerwik, K. Król, and A. Singh. Coincidences and fixed points of hybrid contractions. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 4:401–416, 2008.
- [127] T. Suzuki. Basic inequality on a b -metric space and its applications. *Journal of Inequalities and Applications*, (211), 2017.
- [128] R. Miculescu and A. Mihail. New fixed point theorems for set-valued contractions in b -metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19(4):2153–2163, 09 2017.
- [129] Z. D. Mitrović. Fixed point results in b -metric space. *Fixed Point Theory*, 20(2):559–566, 2019.
- [130] Z. D. Mitrović. The new results in extended b -metric spaces and the proofs of the results of Miculescu and Mihail and Suzuki. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22(3):55, 2020.
- [131] M. Akkouchi. A note on the Banach contraction principle in b -metric spaces. *Divulgaciones Matemáticas*, 22(1):22–30, 2021.
- [132] R. Miculescu and A. Mihail. A generalization of Matkowski and Istrăţescu fixed point theorem. *arXiv preprint*, 2015.
- [133] R. George, S. Radenović, K. P. Reshma, and S. Shukla. Rectangular b -metric space and contraction principles. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8(6):1005–1013, 2015.
- [134] A. Alfaqih, M. Postolache, A. Abodayeh, and M. Ariffin. On some fixed point results for generalized C -contractions in b -rectangular metric spaces. *Journal of Mathematics*, 2023:1–9, 2023.
- [135] K. Mlaiki, H. Aydi, and S. Wang. An approach to kleene’s fixed point theorem via b -rectangular metric spaces. *Axioms*, 12(5):480, 2023.
- [136] H. Guan. Common fixed point theorems for weakly contractions in rectangular b -metric spaces. *Mathematics*, 10(4):654, 2022.
- [137] D. Bajović, Z. D. Mitrović, and I. D. Arandjelović. On estimating convergence for picard sequences in b -metric space. *Letters in Nonlinear Analysis and its Applications*, 3(3):151–159, 2025.
- [138] Z. Mitrović. A note on the results of Suzuki, Miculescu and Mihail. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21, 01 2019.
- [139] P. Sharma, H. Ramos, V. Kanwar, R. Behl, and M. Rajput. Efficient iterative procedures for approximating fixed points of contractive-type mappings with applications. *Numerical Algorithms*, 99(1):27–74, 2025.
- [140] L. Pasicki. Cauchy sequences in b -metric spaces. *Topology and its Applications*, 373:109477, 2025.

- [141] E. Rakotch. A note on contractive mappings. *Proceedings of The American Mathematical Society - PROC AMER MATH SOC*, 13:459–465, 1962.
- [142] L.B. Ćirić. Generalized contractions and fixed-point theorems. *Publications de l'Institut Mathématique. Nouvelle Série*, 12(26):19–26, 1971.
- [143] V. Berinde. Approximating fixed points of weak contractions using Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 01 2003.
- [144] V. Berinde. Approximating fixed points of weak φ -contractions. *Fixed Point Theory*, 4:131–142, 01 2003.
- [145] I.A. Rus. Generalized contractions. (3):1–130, 1983.
- [146] J. Mohamed, C. Pacurar, and B. Samet. Fixed point results for contractions of polynomial type. *Demonstratio Mathematica*, 58, 03 2025.
- [147] H. Piri and P. Kumam. Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, (210), 2014.
- [148] O. Popescu and G. Stan. Two fixed point theorems concerning F -contraction in complete metric spaces. *Symmetry*, 12(58):58, 2020.
- [149] E. Karapınar. On Wardowski Type Fixed Point Results via F-Contractions. *Fixed Point Theory*, 18(2):597–604, 2017.
- [150] H. Aydi, E. Karapınar, and H. Yazidi. Modified F-contractions via α -admissible mappings and application to integral equations. *Filomat*, 31(5):1141–1148, 2017.
- [151] Ali. Öztürk. A fixed point theorem for mappings with an F-contractive iterate. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 3(4):231–236, 2019.
- [152] M. Cvetković. Comparison of F-contraction and φ -contractions. *Filomat*, 37(12):3951–3961, 2023.
- [153] N. Fabiano, Z. Kadelburg, N. Mirkov, V. Š. Čavić, and S. Radenović. On F-contractions: A Survey. *Contemporary Mathematics*, 3:327, 2022.
- [154] H. Piri and P. Kumam. Fixed point theorems for generalized F-Suzuki-contraction mappings in complete b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, (90):1–12, 2016.
- [155] Z. Kadelburg and S. Radenović. Notes on some recent papers concerning F-contractions in b -metric spaces. *Constructive Mathematical Analysis*, 1(2):108–112, 2018.
- [156] M. Younis, N. Mirkov, A. Savić, M. Pantović, and S. Radenović. Some critical remarks on recent results concerning F -contractions in b -metric spaces. *Cubo A Mathematical Journal*, 25(1):57–72, 2023.

- [157] H. Huang, Z. D. Mitrović, K. Zoto, and S. Radenović. On convex F-contraction in b -metric spaces. *Axioms*, 10(3):71, 2021.
- [158] B. Ali, H.A. Butt, and M. De la Sen. Existence of fixed points of generalized set-valued F -contractions of b -metric spaces. *AIMS Mathematics*, 7(10):17967–17988, 2022.
- [159] M. Rossafi and A. Kari. New fixed point theorems for (φ, f) -contraction on rectangular b -metric spaces. *African Mathematicology*, 34:Article ID: 34, 2022.
- [160] D. Singh, V. Chauhan, and I. Altun. Common fixed point of a power graphic (f, ψ) -contraction pair on partial b -metric spaces with application. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 22(5):662–678, 2017.
- [161] H. Huang, K. Zoto, Z. D. Mitrović, and S. Radenović. Fixed point results for generalized F-contractions in b -metric-like spaces. *Fractal and Fractional*, 6(5):272, 2022.
- [162] H.A. Hammad and M. De la Sen. Fixed-point results for a generalized almost (s, q) —jaggi F-contraction-type on b -metric-like spaces. *Mathematics*, 8(1):63, 2020.
- [163] V. Joshi, D. Singh, and A.P. Sel. Existence results for integral equations and boundary value problems via fixed point theorems for generalized F-contractions in b -metric-like space. *Journal of Function Spaces*, 2017:1649864, 2017.
- [164] K. Zoto et al. Generalizations of some contractions in b -metric-like spaces via admissibility and C -class functions. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2021(71), 2021.
- [165] M. De la Sen, N. Nikolić, T. D. Došenović, M. Pavlović, and S. Radenović. Some results on (s, q) -graphic contraction mappings in b -metric-like spaces. *Mathematics*, 7(12):1190, 2019.
- [166] S. Mitrović, V. Parvaneh, M. De la Sen, J. Vujaković, and S. Radenović. Some new results for Jaggi– W -contraction-type mappings on b -metric-like spaces. *Mathematics*, 9(16):1921, 2021.
- [167] D. Yu, C. Chen, and H. Wang. Common fixed point theorems for $(t, g)_f$ -contraction in b -metric-like spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(222):1–10, 2018.
- [168] M. Gardašević-Filipović, K. Kukić, D. Gardašević, and Z.D. Mitrović. Some best proximity point results in the orthogonal 0-complete b -metric-like spaces. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis. Armenian Academy of Sciences*, 58(2):105–115, 2023.
- [169] F.U. Din, M. Din, U. Ishtiaq, and S. Sessa. Perov fixed-point results on F-contraction mappings equipped with binary relation. *Mathematics*, 11(1):238, 2023.
- [170] A. Naz, S. Batul, D. Sagheer, I. Ayoob, and N. Mlaiki. F-contractions endowed with mann’s iterative scheme in convex G- b -metric spaces. *Axioms*, 12(10):937, 2023.

- [171] K. Abodayeh, S.K. Shah, M. Sarwar, C. Promsakon, and T. Sitthiwirattam. Ćirić-type generalized F-contractions with integral inclusion in super metric spaces. *Results in Control and Optimization*, 16:100443, 2024.
- [172] M. Sarwar, S.K. Shah, K. Abodayeh, A. Khan, and I. Altun. On a New Generalization of a Perov-type F-Contraction with Application to a Semilinear Operator System. *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 2024:6, 2024.
- [173] G.S. Saluja. Fixed point results for generalized F-alpha contraction in complete S-metric spaces. *Annals of Mathematics and Computer Science*, 20, 2024.
- [174] M.S. Abdullahi, A.I. Garba, J. Abubakar, and P. Kumam. F-contraction-type fixed point theorems in b-metric spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 22(2):323–334, 2024.
- [175] M. Iqbal, A. Batool, A. Hussain, and H.A. Sulami. Generalized Wardowski Type Contractive Mappings in b-Metric Spaces and Some Fixed Point Results with Applications in Optimization Problem and Modeling Biological Ecosystem. *PLOS ONE*, 19(12):e0313033, 2024.
- [176] D. Bajović, S. Mitrović, S. Buhmiller, and S. Radenovic. Remarks on Some Results of Extended Interpolative Hardy-Rogers-Geraghty-Wardowski Contractions and Ćirić-Reich-Rus Type F-Contractions. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 22(1):25–38, 2025.
- [177] M.U. Ali, H. Aydi, and M. Al-Ansari. New Generalizations of Set Valued Interpolative Hardy-Rogers Type Contractions in b-Metric Spaces. *Journal of Function Spaces*, pages 1–8, 2021.
- [178] S.S. Alzaid, A. Fulga, and F.S. Alshammari. Discussion on Geraghty type hybrid contractions. *Journal of Function Spaces*, 8:Article ID 6614291, 2020.
- [179] P. Debnath, Z.D. Mitrović, and S. Radenović. Interpolative Hardy-Rogers and Reich-Rus-Ćirić type contractions in b-metric spaces and rectangular b-metric spaces. *Matematički Vesnik*.
- [180] P. Debnath and M. De la Sen. Fixed points of interpolative Ćirić-Reich-Rus-type contractions in b-metric spaces. *Symmetry*, 12(1):1–9, 2020.
- [181] P. Debnath, N. Konwar, and S. Radenović. *Metric Fixed Point Theory, Applications in Science, Engineering and Behavioural Sciences*. Springer, Forum for Interdisciplinary Mathematics, Singapore, 2021.
- [182] M. Delfani, A.P. Farajzadeh, and C.F. Wen. On fixed points theorems for generalized f-contraction mappings via t-property. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 23:2511–2521, 2022.
- [183] D. Djukić, Z. Kadelburg, and S. Radenović. Fixed Points of Geraghty-Type Mappings in Various Generalized Metric Spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2011.

- [184] M.R. Haddadi, V. Parvaneh, and M. Mursaleen. Global optimal approximate solutions of best proximity points. *Filomat*, 35:1555–1564, 2021.
- [185] H. Işık, V. Parvaneh, and M.R. Haddadi. Strong and pure fixed point properties of mappings on normed spaces. *Mathematics and Statistics*, 15:305–309, 2021.
- [186] E. Karapinar, R. Agarwal, and H. Aydi. Interpolative Reich-Rus-Ćirić type contractions on partial metric spaces. *Mathematics*, 6(11):256–267, 2018.
- [187] E. Karapinar, O. Alqahtani, and H. Aydi. On interpolative Hardy-Rogers type contractions. *Symmetry*, 11(8):32–40, 2018.
- [188] E. Karapinar, A. Fulga, and R.P. Agarwal. A survey: F-contractions with related fixed point results. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, pages 22–69, 2020.
- [189] S. Radenović, Z. Kadelburg, D. Jandrlić, and A. Jandrlić. Some results on weakly contractive maps. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 38(3):625–645, 2012.
- [190] M. Rossafi and A. Kari. New Fixed Point Results for Interpolative Kannan-Reich Weak Contractive Mappings with Applications. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2023.
- [191] L. Wangwe and S. Kumar. Fixed point results for interpolative ψ -Hardy-Rogers type contraction mappings in quasi-partial b -metric space with an application. *The Journal of Analysis*, 31(1):387–404, 2023.
- [192] B. Mohammadi, V. Parvaneh, and H. Aydi. On extended interpolative Ćirić-Reich-Rus type F-contractions and an application. *Journal of Inequalities and Applications*, 290(11), 2019.
- [193] M. Younis, D. Singh, and A.A.N. Abdou. A fixed point approach for tuning circuit problem in dislocated b -metric spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4):2234–2253, 2022.
- [194] M. Younis and D. Singh. On the existence of the solution of Hammerstein integral equations and fractional differential equations. *J. Appl. Math. Comput.*, 68:1087–1105, 2022.
- [195] H.S. Ding, M. Imdad, S. Radenović, and J. Vujaković. On some fixed point results in b -metric, rectangular and b -rectangular metric spaces. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 22(2):151–164, 2016.
- [196] O. Ege. Complex valued rectangular b -metric spaces and an application to linear equations. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8(6):1014–1021, 2015.
- [197] D. Bajović, Z. D. Mitrović, and M. Saha. Remark on contraction principle in cone_{tv} b -metric spaces. *The Journal of Analysis*, 29(1):273–280, 2021.
- [198] N. Fabiano, T. Došenović, D. Rakić, and S. Radenović. Some new results on (s,q) -Dass-Gupta-Jaggi type contractive mappings in b -metric-like spaces. *Filomat*, 2020.

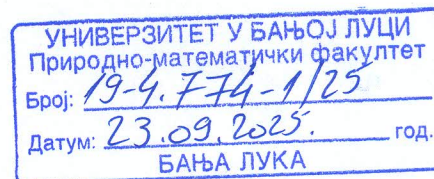
- [199] P.R. Agarwal and E. Karapinar. Interpolative Rus-Reich-Ćirić Type Contractions Via Simulation Functions. *An. St. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mater*, 27:137–152, 2019.
- [200] H. Aydi, E. Karapinar, and F. A. Roldán López de Hierro. ω -Interpolative Ćirić-Reich-Rus-type contractions. *Mathematics*, 7(1), 2019.
- [201] H. Aydi, M.C. Chen, and E. Karapinar. Interpolative Ćirić-Reich-Rus type contractions via the Branciari distance. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1), 2019.
- [202] K. Zoto, E.B. Rhoades, and S. Radenović. Common fixed point theorems for a class of (s, q) -contractive mappings in b metric-like spaces and applications to integral equations. *Math. Slovaca*, 69(1):1585–1598, 2019.
- [203] K. Zoto, B.E. Rhoades, and S. Radenović. Some generalizations for contractions in b -metric-like spaces and application. *Fixed Point Theory and Applications*, 26, 2017.
- [204] E. Karapinar, T. Abdeljawad, and F. Jarad. Applying new fixed point theorems on fractional and ordinary differential equations. *Adv. Differ. Equ*, 421, 2019.
- [205] J. Vujaković, H. Aydi, S. Radenović, and A. Mukheimer. Some remarks and new results in ordered partial b -metric spaces. *Mathematics*, 7(334), 2019.
- [206] N. Hussain, S. Radenović, and K. Zoto. Common fixed point results of $(\alpha - \psi, \phi)$ -contractions for a pair of mappings and applications. *Mathematics*, 6(19), 2018.
- [207] F. Vetro. F -contractions of Hardy-Rogers-type and application to multistage decision. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 21(4):531–546, 2016.
- [208] M. Cosentino and P. Vetro. Fixed point result for F -contractive mappings of Hardy-Rogers Type. *Filomat*, 28:715–722, 2014.
- [209] D. Wardowski. Solving existence problems via F -contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(4):1585–1598, 2018.
- [210] Kastriot Z., Ilir V., Dušan B., Z. D. Mitrović, and S. Radenović. On Some Novel Fixed Point Results for Generalized F -Contractions in b -Metric-Like Spaces with Application. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 135(1):673–686, 2023.

Биографија аутора

Душан Бајовић је рођен 22.12.1991. године у Требињу. Основну и средњу школу је завршио у Билећи. На студијски програм Математика и информатика, општи смјер, Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци се уписао 2010. године. Основне студије завршава 2015. године и исте године уписује мастер студије из математике, смјер Математичка анализа и примјене. Мастер студије завршава 2020. године након којих уписује докторске студије. Од 2016. године запослен је на Електротехничком факултету Универзитета у Бањој Луци у звању асистента, те вишег асистента од 2020. године на ужој научној области Математичка анализа и примјене.

Објављени радови

1. Aydi, H. and Bajović, D. and Mitrović, Z. (2019). Some common fixed point results in partial $b_v(s)$ -metric spaces. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 89(1), 153-160.
2. Bajović, D. and Mitrović, Z.D. and Saha, M. (2021). Remark on contraction principle in cone_{ts} b -metric spaces, *The Journal of Analysis* 29, 273-280.
3. Zoto, K. and Vardhami, I. and Bajović, D. and Mitrović, Z. and Radenović, S. (2023). On Some Novel Fixed Point Results for Generalized F-Contractions in b -Metric-Like Spaces with Application, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*. 135. 673-686.
4. Bajović, D. , Mitrović, S. , Buhmiller, S. and Radenović, S. (2025). Remarks on Some Results of Extended Interpolative Hardy-Rogers-Geraghty-Wardowski Contractions and Ćirić-Reich-Rus Type F-Contractions. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 22(1), 25-38.
5. Bajović, D. and Mitrović, Z. and Arandjelović, I. (2025). On estimating convergence for Picard sequences in b -metric space, *Letters in Nonlinear Analysis and its Applications* 3 151-159.



ИЗВЈЕШТАЈ

за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада¹

1. ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ													
Орган који је именовао комисију: Научно-наставно вијеће Природно-математичког факултета													
Датум именовања комисије: 10.9.2025.													
Број одлуке: 19-3.2096/25													
Чланови комисије:													
1.	<table border="0"><tr><td>Пранић Мирослав</td><td>редовни професор</td></tr><tr><td>Презиме и име</td><td>Звање</td></tr><tr><td colspan="2">Математика, Математичка анализа и примјене</td></tr><tr><td colspan="2">Научно поље и ужа научна/умјетничка област</td></tr><tr><td>Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци</td><td>предсједник</td></tr><tr><td>Установа у којој је запослен/а</td><td>Функција у комисији</td></tr></table>	Пранић Мирослав	редовни професор	Презиме и име	Звање	Математика, Математичка анализа и примјене		Научно поље и ужа научна/умјетничка област		Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци	предсједник	Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији
Пранић Мирослав	редовни професор												
Презиме и име	Звање												
Математика, Математичка анализа и примјене													
Научно поље и ужа научна/умјетничка област													
Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци	предсједник												
Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији												
2.	<table border="0"><tr><td>Арсеновић Милош</td><td>редовни професор</td></tr><tr><td>Презиме и име</td><td>Звање</td></tr><tr><td colspan="2">Математика, Математичка анализа и примјене</td></tr><tr><td colspan="2">Научно поље и ужа научна/умјетничка област</td></tr><tr><td>Математички факултет, Универзитет у Београду</td><td>члан</td></tr><tr><td>Установа у којој је запослен/а</td><td>Функција у комисији</td></tr></table>	Арсеновић Милош	редовни професор	Презиме и име	Звање	Математика, Математичка анализа и примјене		Научно поље и ужа научна/умјетничка област		Математички факултет, Универзитет у Београду	члан	Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији
Арсеновић Милош	редовни професор												
Презиме и име	Звање												
Математика, Математичка анализа и примјене													
Научно поље и ужа научна/умјетничка област													
Математички факултет, Универзитет у Београду	члан												
Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији												
3.	<table border="0"><tr><td>Петковић Борис</td><td>доцент</td></tr><tr><td>Презиме и име</td><td>Звање</td></tr><tr><td colspan="2">Математика, Математичка анализа и примјене</td></tr><tr><td colspan="2">Научно поље и ужа научна/умјетничка област</td></tr><tr><td>Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци</td><td>члан</td></tr><tr><td>Установа у којој је запослен/а</td><td>Функција у комисији</td></tr></table>	Петковић Борис	доцент	Презиме и име	Звање	Математика, Математичка анализа и примјене		Научно поље и ужа научна/умјетничка област		Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци	члан	Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији
Петковић Борис	доцент												
Презиме и име	Звање												
Математика, Математичка анализа и примјене													
Научно поље и ужа научна/умјетничка област													
Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци	члан												
Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији												
4.	<table border="0"><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>Презиме и име</td><td>Звање</td></tr><tr><td colspan="2">Научно поље и ужа научна/умјетничка област</td></tr><tr><td colspan="2">Установа у којој је запослен/а</td></tr><tr><td colspan="2">Функција у комисији</td></tr></table>			Презиме и име	Звање	Научно поље и ужа научна/умјетничка област		Установа у којој је запослен/а		Функција у комисији			
Презиме и име	Звање												
Научно поље и ужа научна/умјетничка област													
Установа у којој је запослен/а													
Функција у комисији													
5.	<table border="0"><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>Презиме и име</td><td>Звање</td></tr></table>			Презиме и име	Звање								
Презиме и име	Звање												

¹ У даљем тексту „дисертација / умјетнички рад”.

Научно поље и ужа научна/умјетничка област	
Установа у којој је запослен/а	Функција у комисији

2. ПОДАЦИ О СТУДЕНТУ					
Име, име једног родитеља, презиме: Душан (Милан) Бајовић					
Датум рођења: 22.12.1991.					
Мјесто и држава рођења: Требиње, Босна и Херцеговина					
2.1. Студије првог циклуса или основне студије или интегрисане студије					
Година уписа:	2010.	Година завршетка:	2015.	Просјечна оцјена током студија:	8.97
Универзитет: Универзитет у Бањој Луци					
Факултет/Академија: Природно-математички факултет					
Студијски програм: Математика и информатика					
Стечено звање: дипломирани математичар и информатичар					
2.2. Студије другог циклуса или мастер студије					
Година уписа:	2015.	Година завршетка:	2020.	Просјечна оцјена током студија:	9.66
Универзитет: Универзитет у Бањој Луци					
Факултет/Академија: Природно-математички факултет					
Студијски програм: Математика					
Назив завршног рада другог циклуса или мастер тезе, датум одбране:					
Контрактивна пресликавања у b -метричким просторима и примјене, 20.10.2020.					
Ужа научна/умјетничка област завршног рада другог циклуса или мастер тезе:					
Математичка анализа и примјене					
Стечено звање: Мастер математике					
2.3. Студије трећег циклуса					
Година уписа:	2020.	Број ECTS бодова остварених до сада:	120	Просјечна оцјена током студија:	10.00
Факултет/Академија: Природно-математички факултет					
Студијски програм: Математика					

2.4. Приказ научних и стручних односно умјетничких радова студента ²		
Навести појединачне радове, са навођењем DOI бројева, односно концерте / снимљена дјела. Додати потребан број редова. Користити исти стил за навођење свих референци у 2.4.		
Р. б.	Основни подаци о научном раду	Цитатна база
1.	Bajović, D. and Mitrović, Z. and Saha, M. (2021). Remark on contraction principle in cone _{tv} b-metric spaces. <i>The Journal of Analysis</i> 29, 273-280. DOI: 10.1007/s41478-020-00261-x.	Web of Science Core Collection
2.	Zoto, K. and Vardhami, I. and Bajović, D. and Mitrović, Z. and Radenović, S. (2023). On Some Novel Fixed Point Results for Generalized F-Contractions in b-Metric-Like Spaces with Application, <i>Computer Modeling in Engineering and Sciences</i> . 135. 673-686. DOI: 10.32604/cmes.2022.022878.	Web of Science Core Collection
3.	Bajović, D. and Mitrović, S. and Buhmiller, S. and Radenović, S. (2025). Remarks on Some Results of Extended Interpolative Hardy-Rogers-Geraghty-Wardowski Contractions and Ćirić-Reich-Rus Type F-Contractions. <i>Sahand Communications in Mathematical Analysis</i> . 22(1), 25-38. DOI: 10.22130/scma.2024.2018063.1564	Web of Science Core Collection
4.	Bajović, D. and Mitrović, Z. and Arandjelović, I. (2025). On estimating convergence for Picard sequences in b-metric space, <i>Letters in Nonlinear Analysis and its Applications</i> 3. 151-159. DOI: https://lettersinnonlinearanalysis.com/index.php/lnaa/article/view/59	-----
5.		-----
Припадност рада ужој научној/умјетничкој области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		☒ ДА ☐ НЕ

3. УВОДНИ ДИО ОЦЈЕНЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ / УМЈЕТНИЧКОГ РАДА	
1. Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима	
2. Математика, Математичка анализа и примјене	
3. 13.11.2024. године, Одлука Научно-наставног вијећа Природно-математичког факултета број 19-3.2887/24	
4. 15.01.2025. године, Приједлог одлуке Научно-наставног вијећа Природно-математичког факултета број 19-3.69/25 -- 30.01.2025. године, Одлука Сената Универзитета у Бањој Луци број 02/04-3.100-41/25	
5. Садржај	
Увод	1
1 Метрички простори и генерализације	3
1.1 Метрички простори	3
1.2 Генерализације метричког простора.	7
1.2.1 <i>b</i> -метрички простори.	10
1.2.2 Слаби <i>b</i> -метрички простори	17
2 Итеративни низови и фиксне тачке	21
2.1 Метричка теорија фиксне тачке	21
2.1.1 Проширење Харди-Роџерс контракције.	34
2.1.2 Фиксна тачка у <i>b</i> -метричким просторима	37
3 Процјене растојања и критеријуми конвергенције.	39

² У складу са чланом 34 Правила студирања на трећем циклусу студија, септембра 2022. године.

3.1	Процјене у b -метричким просторима.	44
4	Полиномске контракције.	51
4.1	Слабе контракције.	51
4.2	Полиномске контракције у b -метричким просторима.	60
5	F -контракције.	70
5.1	Проширене F -контракције у метричким просторима.	74
5.2	Проширене F -контракције у слабом b -метричким просторима. ...	83
5.2.1	Примјена на рјешавање интегралне једначине.	93
	Закључак.	96
	Литература.	97
	Биографија аутора.	111

6. Дисертација је написана на српском језику(ћирилично писмо) на 111 страна А4 формата. Текст дисертације је подијељен на седам поглавља: Увод, Метрички простори и генерализације, Итеративни низови и фиксне тачке, Процјене растојања и критеријуми конвергенције, Полиномске контракције, F -контракције и Закључак. Осим тога, на почетку дисертације дате су Информације о ментору и дисертацији са резимеом и Захвалница уз посвету, док је на крају дата Литература (210 референци) и Биографија аутора. Дисертација садржи двије табеле.

У уводној глави представљена је мотивација за проучавање проблема фиксних тачака у генерализованим метричким просторима, као и историјски осврт на настанак и развој ове области. У првој глави дат је преглед основних појмова везаних за метричке просторе и разне генерализације метричког простора, са посебним освртом на b -метричке просторе. У другој глави су истакнути класични резултати теорије фиксне тачке, као и бројне модификације и проширења. Уведене су уопштене Харди–Роџерс контракције и дат је осврт на резултате фиксне тачке у b -метричким просторима. У трећој глави кандидат разматра процјену растојања између елемената низа и његове граничне вриједности у b -метричком простору, при чему се анализирају низови који испуњавају посебан контрактивни услов. У четвртој глави уведне су полиномске контракције и слабе полиномске контракције као проширење слабих контракција, а затим су доказане теореме Јунговог типа у b -метричким просторима. У петој глави уведен је појам F -контракције и приказани нови резултати у оквиру различитих типова интерполативних проширених контракција. Разматране су и (s, q, φ, F) -контракције и њихове модификације у слабом b -метричким просторима, при чему је показано постојање јединствене фиксне тачке. У закључку су систематизовани сви добијени резултати, истакнут њихов научни значај и назначени могући правци даљих истраживања.

1. Наслов дисертације / умјетничког рада.
2. Научно поље и ужа научна/умјетничка област.
3. Датум прихватања теме дисертације / умјетничког рада и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета.
4. Датум прихватања извјештаја комисије за оцјену подобности студента, теме и ментора за израду дисертације / умјетничког рада и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета.
5. Садржај дисертације / умјетничког рада уз навођење броја страна.
6. Истаћи основне податке о дисертацији / умјетничком раду: обавезно укључујући обим, број и називе поглавља, број табела, слика, шема, графикана и број литературних навода.

4. УВОД И ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

1. Истраживање је подстакнуто чињеницом да класична теорија фиксне тачке у стандардним метричким просторима не обухвата бројне природне ситуације које настају у генерализованим метричким оквирима. У посљедње три деценије област теорије фиксне тачке у генерализацијама метричких простора интензивно се развија, а нарочито у новије вријеме за b -метричке просторе и њихове даље генерализације и примјене. Полазећи од тога, у раду се формулишу и анализирају нове класе контракција под слабијим претпоставкама, са циљем да се утврде услови постојања и

јединствености фиксне тачке, изведу квантитативне процјене конвергенције и прецизно позиционирају добијени резултати у односу на класичне теореме.

Предмет истраживања је постојање и јединственост фиксне тачке контракције у генерализованим метричким просторима и процјена грешке Пикаровог итеративног низа при различитим контрактивним условима. У оквиру генерализација истраживање обухвата b -метричке просторе и класе интерполативних Геретијевих и Харди-Роџерс контракција и F контракција. Процјена грешке итеративног низа посматра се у оквиру b -метричких и квази b -метричких простора у зависности од различитих контрактивних услова (Банах, Канан, Рајх, Харди-Роџерс, Чатерџа, Ћирић).

Циљ истраживања је вишеструк јер се разматра низ проблема у оквиру проширења метричких простора. Први циљ је увођењем (s, q, ϕ, F) -контракција, интерполативних Геретијевих контракција и интерполативних Харди-Роџерс контракција проширити постојеће резултате интерполативних и F -контракција у метричким и генерализованим метричким просторима. Други је добити процјену апериорне и апостериорне грешке Пикаровог низа под различитим контрактивним условима.

Хипотезе истраживања:

1. Слабе (s, q, ϕ, F) -контракције имају фиксну тачку у комплетним b -метричким просторима.
2. Класе F -интерполативних Кананових, Геретијевих и Харди-Роџерсових контракција имају фиксну тачку у b -метричким просторима.
3. Процјена апериорне и апостериорне грешке Пикаровог низа под контрактивним условима у b -метричким и квази b -метричким просторима.
4. Добијени резултати имају примјену на рјешавање неких класа проблема диференцијалних и интегралних једначина, парцијалних диференцијалних једначина и фракционих диференцијалних једначина

2. Преглед литературе:

- [1] A.L. Cauchy. Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Imprimerie Royale, Paris, 1821.
- [2] B. Riemann. Über die hypothesen, welche der geometrie zu grunde liegen. In H. Weber (ed.), Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1868. Original lecture in 1854.
- [3] E. Beltrami. Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche, 6:284–312, 1868.
- [4] F. Klein. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Mathematische Annalen, 4:573–625, 1871.
- [5] H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsien. Acta Mathematica, 1:1–62, 1882.
- [6] M. Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. PhD thesis, Université de Paris, Paris, 1906. Doctoral dissertation, introduction of metric spaces.
- [7] F. Hausdorff. Grundzüge der Mengenlehre. Veit & Comp., Leipzig, 1914.
- [8] S. Banach. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae, 3(1):133–181, 1922.
- [9] S. Czerwik. Contraction mappings in b -metric spaces. Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis, 1:5–11, 1993.
- [10] I.M. Vulpe, D. Ostrajkh, and F. Khojman. The topological structure of a quasimetric space. Investigations in Functional Analysis and Differential Equations, 27:31–42, 1981.
- [11] N. Bourbaki. Topologie générale. Hermann, Paris, 1966.
- [12] I.A. Bakhtin. The contraction mapping principle in almost metric spaces. Functional Analysis, Ulianowsk Gos. Ped. Inst., 30:26–37, 1989.
- [13] S.G. Matthews. Partial metric topology. Annals of the New York Academy of Sciences, 728:183–197, 1994.

- [14] Z. Mustafa and B. Sims. A new approach to generalized metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 7(2):289–297, 2006.
- [15] A. Branciari. A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces. *Publ. Math. Debrecen*, 57(1–2):31–37, 2000.
- [16] B. Schweizer and A. Sklar. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [17] I. Kramosil and J. Michalek. Fuzzy metric and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11(5):336–344, 1975.
- [18] F.W. Lawvere. Metric spaces, generalized logic, and closed categories. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 43:135–166, 1973. Reprint: TAC Reprints 1 (2002).
- [19] E. Karapinar and R. P. Agarwal. *Fixed Point Theory in Generalized Metric Spaces*. Synthesis Lectures on Mathematics and Statistics. Springer, 2022.
- [20] W. Wilson. On quasi-metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 53:675–684, 1931.
- [21] E.W. Chittenden. Semi-metric spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 36:504–535, 1934.
- [22] M.B. Smyth. Quasi-uniformities: Reconciling domains with metric spaces. In *Mathematical Foundations of Programming Language Semantics*. Springer, 1988.
- [23] R. Kopperman. All topologies come from generalized metrics. *American Mathematical Monthly*, 95(2):89–97, 1992.
- [24] M. Krasner. Nombres des genres dans les corps valués complets. *Acta Arithmetica*, 2:353–369, 1944.
- [25] P. Hitzler and A.K. Seda. Dislocated topologies. *Journal of Electrical Engineering*, 51(12/s): 3–7, 2000.
- [26] A. Amini-Harandi. Metric-like spaces, partial metric spaces and fixed point theory. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012(204):1–10, 2012.
- [27] S. Shukla. Partial b-metric spaces and fixed point theorems. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 11(2):703–711, 2014.
- [28] S. Czerwik. Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. *Atti Sem. Mat. Univ. Modena*, 46(2):263–276, 1998.
- [29] H. Pajoohesh. On modified metric spaces. *Carpathian J. Math.*, 24(1):108–117, 2008.
- [30] H. Nakano. *Modulated Semi-Ordered Linear Spaces*. Tokyo Mathematical Book Series, 1950.
- [31] L. Huang and X. Zhang. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 332(2):1468–1476, 2007.
- [32] Z. Ma and J. Zhao. C*-algebra valued metric spaces and related fixed point theorems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2009(1):Article ID 169837, 8 pages, 2009.
- [33] A. George and P. Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3):395–399, 1994.
- [34] D.H. Hyers. On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, 24:222–224, 1938.
- [35] D.G. Bourgin. Approximately isometric and quasi-normed linear spaces. *Duke Mathematical Journal*, 10:553–571, 1943.
- [36] R.R. Coifman and A. de Guzmán. Singular integrals and analysis on spaces of homogeneous type. *Revista Matemática Iberoamericana*, 1:5–56, 1970.
- [37] R.A. Macias and C. Segovia. Lipschitz functions on spaces of homogeneous type. *Advances in Mathematics*, 33(3):257–270, 1979.
- [38] R.R. Coifman and G. Weiss. *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, volume 242 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1977.

- [39] D. Mitrea, I. Mitrea, M. Mitrea, and S. Monniaux. *Groupoid Metrization Theory: With Applications to Analysis on Quasi-Metric Spaces and Functional Analysis*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser/Springer, New York, 2013.
- [40] V. Berinde and M. Păcurar. The early developments in fixed point theory on b-metric spaces: A brief survey and some important related aspects. *Carpathian Journal of Mathematics*, 38:523–538, 2022.
- [41] M. Khamsi and N. Hussain. Krasnoselskii’s fixed point theorem in metric type spaces. *Nonlinear Analysis*, 71:365–371, 2010.
- [42] M. Bota, A. Molnar, and C. Varga. On Ekeland’s variational principle in b-metric spaces. *Fixed Point Theory*, 12(1):21–28, 2011.
- [43] N. Vulpe et al. Quasimetric structures and fixed points. *Investigations in Functional Analysis and Differential Equations*, 1977. Zbl 0502.54032.
- [44] T.V. An and N.V. Dung. Some properties of quasimetric spaces and fixed point theory. *Carpathian Journal of Mathematics*, 30(1):13–28, 2014.
- [45] S. Cobzaş. B-metric spaces, fixed points and Lipschitz functions. arXiv preprint arXiv:1802.02722, version 3, 25 Mar 2019.
- [46] W.A. Kirk and N. Shahzad. Some results on fixed points in strong b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, Article ID 74593, 1–7, 2007.
- [47] A.H. Frink. Distance functions and the metrization problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 43:133–142, 1937.
- [48] B.E. Gustavsson. On quasi-metric spaces. *Mathematica Scandinavica*, 35:313–319, 1974.
- [49] B.S.W. Schröder. On metrization of generalized metric spaces. *Topology Proceedings*, 30:445–456, 2006.
- [50] T.V. An and N.V. Dung. Stone-type theorems on quasi-metric and b-metric spaces. *Topology and its Applications*, 185–186:50–62, 2015.
- [51] P. Das, S. Dutta, and R.K. Nath. On metrizability of b-metric spaces and related results. *Topology and its Applications*, 313:108060, 2022.
- [52] J. Nagata. On a necessary and sufficient condition of metrizability. *Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University. Series A*, 1:93–100, 1950.
- [53] Y.M. Smirnov. A necessary and sufficient condition for metrizability of a topological space. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 77:197–200, 1951.
- [54] T. Som. A note on the metrizability of b-metric spaces. *Topology and its Applications*, 264:106–111, 2019.
- [55] T. Som. On metrizability of b-metric spaces via generalized Chittenden theorem. *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 13(1):100–111, 2020.
- [56] H. Aimar, R. Iaffei, and M. Nitti. On metric spaces related to quasi-metric spaces. *Mathematical Inequalities & Applications*, 1:647–666, 1998.
- [57] K. Paluszyński and M. Stempak. On quasi-metric and metric spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(12):4307–4312, 2009.
- [59] S. Cobzaş and S. Czerwik. The completion of generalized b-metric spaces and fixed points. *Fixed Point Theory*, 21(1):133–150, 2020.
- [60] N. Hussain and S. Shah. Kannan type contractive mappings on quasi b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 83, 2011.
- [61] N. Hussain, M.A. Khamsi, and A. Latif. Common fixed point theorems in dislocated b-metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 13(3):529–540, 2012.
- [62] Z. Mustafa, B. Sims, H. Aydi, and E. Karapinar. On rectangular b-metric spaces. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 15(6):1187–1196, 2014.

- [63] M.A. Alghamdi, N. Hussain, and P. Salimi. Fixed point results for various contractions in b-metric-like spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2013(402):1–20, 2013.
- [64] H. Huang and H. Xu. Fixed point theorems for contractive mappings in cone b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 322, 2014.
- [65] E. Karapinar, H.K. Nashine, and B. Samet. Fixed point theorems on probabilistic b-metric spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, page 201, 2012.
- [66] B. Samet, C. Vetro, and F. Vetro. Fixed point theorems in fuzzy b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 1, 2013.
- [67] Z. Ma, L. Jiang, and H. Yu. Fixed point theorems for contractive mappings in C^* -algebra-valued b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, page 24, 2016.
- [68] K. Zoto, S. Radenović, and H.A. Ansari. On some fixed point results for (s,p) -contractive mappings in b-metric-like spaces and applications to integral equations. *Open Math*, 16:235– 49, 2018.
- [69] E. Karapinar, H. Aydi, and A. Fulga. On Hybrid-Wardoski Contractions. *Journal of Mathematics*, pages 526–534, 2020.
- [70] K. Zoto, S. Radenović, J. Dine, and I. Vardhami. Fixed points of generalized (ψ, s, α) -contractive mappings in dislocated and b-dislocated metric spaces. *Commun. Optim. Theory*, 2017.
- [71] M. De la Sen, N. Nikolić, T. Došenović, M. Pavlović, and S. Radenović. Some results on $(s-q)$ -graphic contraction mappings in b-metric-like spaces. *Mathematics*, 7:1190–1197, 2019.
- [72] S. Aleksić, Z. Mitrović, and S. Radenović. Picard sequences in b-metric spaces. *Fixed Point Theory*, 21(2):379–388, 2019.
- [73] J. Liouville. Mémoire sur l’application de la méthode des approximations successives à l’intégration d’une classe d’équations différentielles. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 3:342–376, 1838.
- [74] E. Picard. Théorie des équations différentielles. Gauthier-Villars, Paris, 1890.
- [75] G. Peano. Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. *Torino Atti della Reale Accademia delle Scienze*, 23:52–90, 1887.
- [76] R. Lipschitz. Zur theorie der differentialgleichungen. *Crelle’s Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 63:1–71, 1864.
- [77] R. Caccioppoli. Un teorema generale sull’esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. *Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali*, 11:357–363, 1930.
- [78] B.E. Rhoades. A comparison of various definitions of contractive mappings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 226:257–290, 1977.
- [79] R. Kannan. Some results on fixed points. *Bulletin Calcutta Mathematical Society*, 10:71–76, 1968.
- [80] J. Górnicki. Fixed point theorems for Kannan type mappings. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19:2145–2152, 2017.
- [81] S.K. Chatterjea. Fixed-point theorems. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 25:727–730, 1972.
- [82] S. Reich. Some remarks concerning contraction mappings. *Canadian Mathematical Bulletin*, 14:121–124, 1971.
- [83] G.E. Hardy and T.D. Rogers. A generalization of a fixed point theorem of Reich. *Canadian Mathematical Bulletin*, 16(2):201–206, 1973.
- [84] T. Zamfirescu. Fixed point theorems in metric spaces. *Archiv der Mathematik*, 23:292–298, 1972.
- [85] L.B. Ćirić. A generalization of Banach’s contraction principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 45(2):267–273, 1974.

- [86] Y.I. Alber and S. Guerre-Delabriere. Principle of weakly contractive maps in Hilbert spaces. In I. Gohberg and Yu. Lyubich (eds.), *New Results in Operator Theory*, volume 98 of *Operator Theory: Advances and Applications*, pages 7–22. Birkhäuser, Basel, 1997.
- [87] B.E. Rhoades. Some theorems on weakly contractive maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 47(4):2683–2693, 2001.
- [88] A. Meir and E. Keeler. A theorem on contraction mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 28(2):326–329, 1969.
- [89] D. Boyd and J. Wong. On nonlinear contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20:458–468, 1969.
- [90] G. Jungck. Commuting mappings and fixed points. *The American Mathematical Monthly*, 83:261–263, 1974.
- [91] M.A. Geraghty. On contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40(2):604–608, 1973.
- [92] E. Karapinar. Revisiting the Kannan type contractions via interpolation. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*, 2:85–87, 2018.
- [93] T. Suzuki. A generalization of the Banach contraction principle that characterizes metric completeness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136(5):1861–1869, 2008.
- [94] T. Suzuki. A new type of fixed point theorem in metric spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(12):5313–5317, 2009.
- [95] S.B. Nadler. Multi-valued contraction mappings. *Pacific Journal of Mathematics*, 30(2):475–488, 1969.
- [96] I. Ekeland. On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(2):324–353, 1974.
- [97] J. Caristi. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 215:241–251, 1976.
- [98] D. Wardowski. Fixed points of new type of contractive mappings in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:12, 2012.
- [99] J. Górnicki. Various extensions of Kannan’s fixed point theorem. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 20:20, 2018.
- [100] J. Górnicki. Remarks on asymptotic regularity and fixed points. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21:29, 2019.
- [101] M. Khamsi. Generalized metric spaces: A survey. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 17:455–475, 2015.
- [102] Z. Kadelburg and S. Radenović. On generalized metric spaces: A survey. *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, 5(1):3–13, 2014.
- [103] T. Van An. Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems. *Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid*, 109:175–186, 2015.
- [104] S. Cobzaş. Fixed points and completeness in metric and in generalized metric spaces. *arXiv preprint*, 2015. [arXiv:1508.05173](https://arxiv.org/abs/1508.05173).
- [105] M. Kabil and M. Pouzet. Generalized metric spaces. Relations with graphs, ordered sets and automata: A survey. *arXiv preprint*, 2020. See [arXiv:2002.03019](https://arxiv.org/abs/2002.03019).
- [106] V. Berinde. Generalized contractions in quasimetric spaces. Technical report, Seminar on Fixed Point Theory (Preprint No. 93-3), Babeş-Bolyai Univ., Cluj-Napoca, 1993.
- [107] V. Berinde. Sequences of operators and fixed points in quasimetric spaces. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 41(4):23–27, 1996.
- [108] V. Berinde. Generalized contractions and applications. Cub Press, Baia Mare, Romania, 1997.

- [109] S. Czerwik, K. Dłutek, and S.L. Singh. Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b-metric spaces. *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 22:29–35, 2001.
- [110] S.L. Singh, K. Bhatnagar, and S.N. Mishra. A fixed point theorem for multivalued generalized contractions in quasi-metric spaces. *Demonstratio Mathematica*, 38(1):177–182, 2005.
- [111] M. Boriceanu. Fixed point theorems for multivalued weakly Picard operators in b-metric spaces. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica*, 53(4):3–14, 2008.
- [112] M.O. Olatinwo. Some common fixed point theorems for mappings satisfying contractive conditions of integral type in b-metric spaces. *Acta Univ. Apulensis*, 16:103–112, 2008.
- [113] M. Păcurar. Fixed point theorems for ϕ -contractions in b-metric spaces without bounded orbit assumption. *Fixed Point Theory*, 11(2):323–334, 2010.
- [114] H. Aydi, M. Bota, E. Karapınar, and S. Moradi. A common fixed point theorem for weak ϕ -contractions in b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:Article ID 88, 8 pages, 2012.
- [115] J.R. Roshan, V. Parvaneh, and S. Sedghi. Fixed points of generalized (ψ, ϕ) -contractions in ordered b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013:Article ID 130, 13 pages, 2013.
- [116] T.V. An, N.V. Dung, Z. Kadelburg, and S. Radenović. Various generalizations of metric spaces and fixed point theorems. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. (RACSAM)*, 109(1):175–198, 2015.
- [117] Z.D. Mitrović. Some results on fixed point theory in generalized b-metric spaces. *Mathematical Vesnik*, 68(4):235–248, 2016.
- [118] M. Arandelović. Applications of fixed point theorems in b-metric spaces to differential equations. *Filomat*, 31(16):5055–5066, 2017.
- [119] S. Czerwik. On b-metric spaces and Brouwer and Schauder fixed point principles. In *Approximation Theory and Analytic Inequalities*, pages 71–86. Springer, 2021.
- [120] H. Aydi, E. Karapınar, and B. Samet. New fixed point results in extended b-metric spaces via simulation functions. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22:53, 2020.
- [121] E. Karapınar. Further results on F-contractions in b-metric spaces. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 5(2):85–97, 2021.
- [122] Z.D. Mitrović. Common fixed point results in partial b-metric spaces and applications. *Mathematics*, 10(12):2103, 2022.
- [123] S. Radenović and C. Vetro. On some new fixed point results in b-metric-like spaces. *Axioms*, 12(4):389, 2023.
- [124] M. Arandelović and Z.D. Mitrović. Iterative methods and stability in b-metric spaces. *Mathematics*, 11(6):1432, 2023.
- [125] Z.D. Mitrović, R. George, and H. Hosseinzadeh. Some results on fixed points on the product of b-metric spaces with applications. *Fixed Point Theory*, 26(1):225–234, 2025.
- [126] S.L. Singh, S. Czerwik, K. Król, and A. Singh. Coincidences and fixed points of hybrid contractions. *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences*, 4:401–416, 2008.
- [127] T. Suzuki. Basic inequality on a b-metric space and its applications. *Journal of Inequalities and Applications*, (211), 2017.
- [128] R. Miculescu and A. Mihail. New fixed point theorems for set-valued contractions in b-metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19(4):2153–2163, 2017.
- [129] Z.D. Mitrović. Fixed point results in b-metric space. *Fixed Point Theory*, 20(2):559–566, 2019.
- [130] Z.D. Mitrović. The new results in extended b-metric spaces and the proofs of the results of Miculescu and Mihail and Suzuki. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22(3):55, 2020.

- [131] M. Akkouchi. A note on the Banach contraction principle in b-metric spaces. *Divulgaciones Matemáticas*, 22(1):22–30, 2021.
- [132] R. Miculescu and A. Mihail. A generalization of Matkowski and Istrăţescu fixed point theorem. *arXiv preprint*, 2015.
- [133] R. George, S. Radenović, K.P. Reshma, and S. Shukla. Rectangular b-metric space and contraction principles. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8(6):1005–1013, 2015.
- [134] A. Alfaqih, M. Postolache, A. Abodayeh, and M. Ariffin. On some fixed point results for generalized C-contractions in b-rectangular metric spaces. *Journal of Mathematics*, 2023:1–9, 2023.
- [135] K. Mlaiki, H. Aydi, and S. Wang. An approach to Kleene’s fixed point theorem via b-rectangular metric spaces. *Axioms*, 12(5):480, 2023.
- [136] H. Guan. Common fixed point theorems for weakly contractions in rectangular b-metric spaces. *Mathematics*, 10(4):654, 2022.
- [137] D. Bajović, Z.D. Mitrović, and I.D. Arandjelović. On estimating convergence for Picard sequences in b-metric space. *Letters in Nonlinear Analysis and its Applications*, 3(3):151–159, 2025.
- [138] Z.D. Mitrović. A note on the results of Suzuki, Miculescu and Mihail. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 21, 2019.
- [139] P. Sharma, H. Ramos, V. Kanwar, R. Behl, and M. Rajput. Efficient iterative procedures for approximating fixed points of contractive-type mappings with applications. *Numerical Algorithms*, 99(1):27–74, 2025.
- [140] L. Pasicki. Cauchy sequences in b-metric spaces. *Topology and its Applications*, 373:109477, 2025.
- [141] E. Rakotch. A note on contractive mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 13:459–465, 1962.
- [142] L.B. Ćirić. Generalized contractions and fixed-point theorems. *Publications de l’Institut Mathématique. Nouvelle Série*, 12(26):19–26, 1971.
- [143] V. Berinde. Approximating fixed points of weak contractions using Picard iteration. *Nonlinear Analysis Forum*, 9, 2003.
- [144] V. Berinde. Approximating fixed points of weak ϕ -contractions. *Fixed Point Theory*, 4:131–142, 2003.
- [145] I.A. Rus. Generalized contractions, (3):1–130, 1983.
- [146] J. Mohamed, C. Păcurar, and B. Samet. Fixed point results for contractions of polynomial type. *Demonstratio Mathematica*, 58, 2025.
- [147] H. Piri and P. Kumam. Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, (210), 2014.
- [148] O. Popescu and G. Stan. Two fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces. *Symmetry*, 12(58):58, 2020.
- [149] E. Karapınar. On Wardowski Type Fixed Point Results via F-Contractions. *Fixed Point Theory*, 18(2):597–604, 2017.
- [150] H. Aydi, E. Karapınar, and H. Yazidi. Modified F-contractions via α -admissible mappings and application to integral equations. *Filomat*, 31(5):1141–1148, 2017.
- [151] A. Öztürk. A fixed point theorem for mappings with an F-contractive iterate. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications*, 3(4):231–236, 2019.
- [152] M. Cvetković. Comparison of F-contraction and ϕ -contractions. *Filomat*, 37(12):3951–3961, 2023.
- [153] N. Fabiano, Z. Kadelburg, N. Mirkov, V.Š. Čavić, and S. Radenović. On F-contractions: A Survey. *Contemporary Mathematics*, 3:327, 2022.
- [154] H. Piri and P. Kumam. Fixed point theorems for generalized F-Suzuki-contraction mappings in complete b-metric spaces. *Fixed Point Theory and Applications*, (90):1–12, 2016.

- [155] Z. Kadelburg and S. Radenović. Notes on some recent papers concerning F-contractions in b-metric spaces. *Constructive Mathematical Analysis*, 1(2):108–112, 2018.
- [156] M. Younis, N. Mirkov, A. Savić, M. Pantović, and S. Radenović. Some critical remarks on recent results concerning F-contractions in b-metric spaces. *Cubo A Mathematical Journal*, 25(1):57–72, 2023.
- [157] H. Huang, Z.D. Mitrović, K. Zoto, and S. Radenović. On convex F-contraction in b-metric spaces. *Axioms*, 10(3):71, 2021.
- [158] B. Ali, H.A. Butt, and M. De la Sen. Existence of fixed points of generalized set-valued F-contractions of b-metric spaces. *AIMS Mathematics*, 7(10):17967–17988, 2022.
- [159] M. Rossafi and A. Kari. New fixed point theorems for (ϕ, f) -contraction on rectangular b-metric spaces. *African Mathematicology*, 34:Article ID 34, 2022.
- [160] D. Singh, V. Chauhan, and I. Altun. Common fixed point of a power graphic (f, ψ) -contraction pair on partial b-metric spaces with application. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 22(5):662–678, 2017.
- [161] H. Huang, K. Zoto, Z.D. Mitrović, and S. Radenović. Fixed point results for generalized F-contractions in b-metric-like spaces. *Fractal and Fractional*, 6(5):272, 2022.
- [162] H.A. Hammad and M. De la Sen. Fixed-point results for a generalized almost (s, q) -jaggi F-contraction-type on b-metric-like spaces. *Mathematics*, 8(1):63, 2020.
- [163] V. Joshi, D. Singh, and A.P. Sel. Existence results for integral equations and boundary value problems via fixed point theorems for generalized F-contractions in b-metric-like space. *Journal of Function Spaces*, 2017:1649864, 2017.
- [164] K. Zoto et al. Generalizations of some contractions in b-metric-like spaces via admissibility and C-class functions. *Advances in Continuous and Discrete Models*, 2021(71), 2021.
- [165] M. De la Sen, N. Nikolić, T.D. Došenović, M. Pavlović, and S. Radenović. Some results on (s, q) -graphic contraction mappings in b-metric-like spaces. *Mathematics*, 7(12):1190, 2019.
- [166] S. Mitrović, V. Parvaneh, M. De la Sen, J. Vujaković, and S. Radenović. Some new results for Jaggi-W-contraction-type mappings on b-metric-like spaces. *Mathematics*, 9(16):1921, 2021.
- [167] D. Yu, C. Chen, and H. Wang. Common fixed point theorems for $(t, g)f$ -contraction in b-metric-like spaces. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(222):1–10, 2018.
- [168] M. Gardašević-Filipović, K. Kukić, D. Gardašević, and Z.D. Mitrović. Some best proximity point results in the orthogonal O-complete b-metric-like spaces. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis. Armenian Academy of Sciences*, 58(2):105–115, 2023.
- [169] F.U. Din, M. Din, U. Ishtiaq, and S. Sessa. Perov fixed-point results on F-contraction mappings equipped with binary relation. *Mathematics*, 11(1):238, 2023.
- [170] A. Naz, S. Batul, D. Sagheer, I. Ayoob, and N. Mlaiki. F-contractions endowed with Mann’s iterative scheme in convex G b-metric spaces. *Axioms*, 12(10):937, 2023.
- [171] K. Abodayeh, S.K. Shah, M. Sarwar, C. Promsakon, and T. Sitthiwiratttham. Ćirić-type generalized F-contractions with integral inclusion in super metric spaces. *Results in Control and Optimization*, 16:100443, 2024.
- [172] M. Sarwar, S.K. Shah, K. Abodayeh, A. Khan, and I. Altun. On a new generalization of a Perov-type F-contraction with application to a semilinear operator system. *Fixed Point Theory and Algorithms for Sciences and Engineering*, 2024:6, 2024.
- [173] G.S. Saluja. Fixed point results for generalized F-alpha contraction in complete S-metric spaces. *Annals of Mathematics and Computer Science*, 20, 2024.
- [174] M.S. Abdullahi, A.I. Garba, J. Abubakar, and P. Kumam. F-contraction-type fixed point theorems in b-metric spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 22(2):323–334, 2024.
- [175] M. Iqbal, A. Batool, A. Hussain, and H.A. Sulami. Generalized Wardowski Type Contractive Mappings in b-Metric Spaces and Some Fixed Point Results with Applications in Optimization Problem and Modeling Biological Ecosystem. *PLOS ONE*, 19(12):e0313033, 2024.

- [176] D. Bajović, S. Mitrović, S. Buhmiller, and S. Radenović. Remarks on some results of extended interpolative Hardy-Rogers-Geraghty-Wardowski contractions and Ćirić-Reich-Rus type F-contractions. *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, 22(1):25–38, 2025.
- [177] M.U. Ali, H. Aydi, and M. Al-Ansari. New generalizations of set valued interpolative Hardy-Rogers type contractions in b-metric spaces. *Journal of Function Spaces*, 1–8, 2021.
- [178] S.S. Alzaid, A. Fulga, and F.S. Alshammari. Discussion on Geraghty type hybrid contractions. *Journal of Function Spaces*, 8:Article ID 6614291, 2020.
- [179] P. Debnath, Z.D. Mitrović, and S. Radenović. Interpolative Hardy-Rogers and Reich-Rus-Ćirić type contractions in b-metric spaces and rectangular b-metric spaces. *Matematički Vesnik*.
- [180] P. Debnath and M. De la Sen. Fixed points of interpolative Ćirić-Reich-Rus-type contractions in b-metric spaces. *Symmetry*, 12(1):1–9, 2020.
- [181] P. Debnath, N. Konwar, and S. Radenović. Metric fixed point theory, applications in science, engineering and behavioural sciences. Springer, Forum for Interdisciplinary Mathematics, Singapore, 2021.
- [182] M. Delfani, A.P. Farajzadeh, and C.F. Wen. On fixed points theorems for generalized F-contraction mappings via t-property. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 23:2511–2521, 2022.
- [183] D. Djukić, Z. Kadelburg, and S. Radenović. Fixed points of Geraghty-type mappings in various generalized metric spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2011.
- [184] M.R. Haddadi, V. Parvaneh, and M. Mursaleen. Global optimal approximate solutions of best proximity points. *Filomat*, 35:1555–1564, 2021.
- [185] H. Işık, V. Parvaneh, and M.R. Haddadi. Strong and pure fixed point properties of mappings on normed spaces. *Mathematics and Statistics*, 15:305–309, 2021.
- [186] E. Karapinar, R. Agarwal, and H. Aydi. Interpolative Reich-Rus-Ćirić type contractions on partial metric spaces. *Mathematics*, 6(11):256–267, 2018.
- [187] E. Karapinar, O. Alqahtani, and H. Aydi. On interpolative Hardy-Rogers type contractions. *Symmetry*, 11(8):32–40, 2018.
- [188] E. Karapinar, A. Fulga, and R.P. Agarwal. A survey: F-contractions with related fixed point results. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 22–69, 2020.
- [189] S. Radenović, Z. Kadelburg, D. Jandrić, and A. Jandrić. Some results on weakly contractive maps. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 38(3):625–645, 2012.
- [190] M. Rossafi and A. Kari. New fixed point results for interpolative Kannan-Reich weak contractive mappings with applications. *Montes Taurus Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2023.
- [191] L. Wangwe and S. Kumar. Fixed point results for interpolative ψ -Hardy-Rogers type contraction mappings in quasi-partial b-metric space with an application. *The Journal of Analysis*, 31(1):387–404, 2023.
- [192] B. Mohammadi, V. Parvaneh, and H. Aydi. On extended interpolative Ćirić-Reich-Rus type F-contractions and an application. *Journal of Inequalities and Applications*, 290(11), 2019.
- [193] M. Younis, D. Singh, and A.A.N. Abdou. A fixed point approach for tuning circuit problem in dislocated b-metric spaces. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45(4):2234–2253, 2022.
- [194] M. Younis and D. Singh. On the existence of the solution of Hammerstein integral equations and fractional differential equations. *J. Appl. Math. Comput.*, 68:1087–1105, 2022.
- [195] H.S. Ding, M. Imdad, S. Radenović, and J. Vujaković. On some fixed point results in b-metric, rectangular and b-rectangular metric spaces. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 22(2):151–164, 2016.
- [196] O. Ege. Complex valued rectangular b-metric spaces and an application to linear equations. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 8(6):1014–1021, 2015.

- [197] D. Bajović, Z.D. Mitrović, and M. Saha. Remark on contraction principle in cone tvs b-metric spaces. *The Journal of Analysis*, 29(1):273–280, 2021.
- [198] N. Fabiano, T. Došenović, D. Rakić, and S. Radenović. Some new results on (s,q) -Dass-Gupta-Jaggi type contractive mappings in b-metric-like spaces. *Filomat*, 2020.
- [199] P.R. Agarwal and E. Karapinar. Interpolative Rus-Reich-Ćirić Type Contractions via Simulation Functions. *An. St. Univ. Ovidius Constanța Ser. Mat.*, 27:137–152, 2019.
- [200] H. Aydi, E. Karapinar, and F.A. Roldán López de Hierro. ω -Interpolative Ćirić-Reich-Rus-type contractions. *Mathematics*, 7(1), 2019.
- [201] H. Aydi, M.C. Chen, and E. Karapinar. Interpolative Ćirić-Reich-Rus type contractions via the Branciari distance. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1), 2019.
- [202] K. Zoto, E.B. Rhoades, and S. Radenović. Common fixed point theorems for a class of (s,q) -contractive mappings in b-metric-like spaces and applications to integral equations. *Math. Slovaca*, 69(1):1585–1598, 2019.
- [203] K. Zoto, B.E. Rhoades, and S. Radenović. Some generalizations for contractions in b-metric-like spaces and application. *Fixed Point Theory and Applications*, 26, 2017.
- [204] E. Karapinar, T. Abdeljawad, and F. Jarad. Applying new fixed point theorems on fractional and ordinary differential equations. *Adv. Differ. Equ.*, 421, 2019.
- [205] J. Vujaković, H. Aydi, S. Radenović, and A. Mukheimer. Some remarks and new results in ordered partial b-metric spaces. *Mathematics*, 7(334), 2019.
- [206] N. Hussain, S. Radenović, and K. Zoto. Common fixed point results of $(\alpha-\psi, \varphi)$ -contractions for a pair of mappings and applications. *Mathematics*, 6(19), 2018.
- [207] F. Vetro. F-contractions of Hardy-Rogers-type and application to multistage decision. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 21(4):531–546, 2016.
- [208] M. Cosentino and P. Vetro. Fixed point result for F-contractive mappings of Hardy-Rogers type. *Filomat*, 28:715–722, 2014.
- [209] D. Wardowski. Solving existence problems via F-contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(4):1585–1598, 2018.
- [210] K. Zoto, I. Vardhami, D. Bajović, Z.D. Mitrović, and S. Radenović. On some novel fixed point results for generalized F-contractions in b-metric-like spaces with application. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 135(1):673–686, 2023.3.

Резултати претходних истраживања:

Полазиште чине класични резултати о контрактивним пресликавањима у метричким просторима (Банах, Канан, Харди–Роџерс; [8, 79, 83, 85, 91, 93–97]). Прелаз ка генерализованим метрикама означио је Червик увођењем b -метричких простора [9] и проширењем теорије на вишезначне контракције [28]. Убрзо су уследили студије комплетирања и метризабилности b -метричких структура [58, 59, 51, 54, 55]. Модерну синтезу доноси Вардовски са F -контракцијама [98], које уједињују и интерполишу класичне шеме; та линија је даље разрађена у b -метричком окружењу кроз интерполативне, слабе и вишезначне варијанте [121, 147, 149, 154, 155, 157, 161], као и интерполативне резултате Харди–Роџерс/Герети типа у b -метрикама [186–188]. Поред структуралних аспеката, проучене су и квантитативне компоненте Пикарових итерација у b -метрикама, са проценама грешке и брзине приближавања [72, 137]. Овај обим радова консолидује услове постојања и јединствености фиксне тачке у генерализованим оквирима и јасно назначава поља за даља проширења која дисертација адресира.

3. Теза доприноси увођењем јединственог оквира и нових резултата о постојању и јединствености фиксне тачке за интерполативне Геретијеве и Харди–Роџерсове контракције и F -контракције b -метричким просторима. Дате су процене грешке Пикаровог низа за класичне контрактивне услове

(Банах, Канан, Рајх, Харди-Роцерс, Чатержа, Ђирић), које обезбјеђују практичне критеријуме заустављања.

4. Очекивани допринос дисертације обухвата развој јединственог и општег оквира за слабе (s, q, φ, F) -и F -интерполативне контракције у b -метричким просторима, са условима постојања и јединствености фиксне тачке, проширењем класичних теорема, као и формулисањем нових квантитативних процјена конвергенције Пикарових низова уз јасно идентификовање минималних структурних услова. Практична релевантност огледа се у примјени резултата на рјешавање интегралних, диференцијалних (парцијалних и фракционих) и операторских једначина у генерализованим метричким просторима.

1. Укратко описати разлоге због којих су истраживања предузета и представити проблем, предмет, циљеве и хипотезе³.
2. На основу прегледа литературе, сажето приказати резултате претходних истраживања у вези проблема који је истраживан (водити рачуна о томе да обухвата најновија и најзначајнија сазнања из те области код нас и у свијету).
3. Навести допринос тезе у рјешавању изучаваног предмета истраживања.
4. Навести очекивани научни и практични односно умјетнички допринос дисертације.

5. МАТЕРИЈАЛ И МЕТОДОЛОГИЈА РАДА

1. Материјали који су коришћени за истраживање су искључиво писани радови објављени у разним математичким часописима као и уџбеници реномираних универзитета, с обзиром да је истраживање из теоријске математике.

2. Метод истраживања је дедуктиван и теоријски, заснива се на доказима који се ослањају на раније добијене резултате. Методи су интердисциплинарни унутар математике, укључујући методе и резултате функционалне анализе, специфична својства функција и резултате математичке анализе. Будући да је фокус истраживања теорија фиксне тачке, у истраживању се користе до сада развијене методе у теорији метричке фиксне тачке. Стандардне методе за егзистенцију фиксне тачке користе конвергенцију Кошијевог низа која слиједи из комплетности посматраног метричког простора. Директна примјена оваквог приступа у генерализованим метричким просторима често захтјева додатне услове за све вриједности контрактивних параметара пресликавања или параметара генерализованог метричког простора, па се технике модификују у зависности од особина самог простора.

2.1. Примјењене методе су адекватне, тачне и у складу са савременим трендовима у теорији фиксне тачке и генерализованим метричким структурама.

2.2. Првобитни план истраживања спроведен је у цјелости.

2.3. Спроведени обим истраживања је довољан за доношење поузданих закључака.

2.4. У истраживању није коришћена статистичка обрада резултата.

1. Описати и дати основне карактеристике материјала који је обрађиван, критеријуме који су узети у обзир за избор материјала.
2. Дати кратак увид у примјењени метод истраживања, при чему је важно оцијенити сљедеће:
 - 2.1. Да ли су примјењене методе истраживања адекватне, довољно тачне и савремене, имајући у виду достигнућа на том пољу у свјетском оквиру;
 - 2.2. Образложити евентуалне измјене првобитног плана истраживања;
 - 2.3. Да ли је обим истраживања довољан за доношење поузданих закључака или је потребно проширити постојеће или увести нове методе;
 - 2.4. Да ли је статистичка обрада података адекватна, ако је коришћена при обради резултата.

³ Хипотезе приказати само за научни докторат.

6. РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНИ/УМЈЕТНИЧКИ ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА

1. Главни доприноси овог истраживања су сљедећи:

1. доказ да проширене Харди-Роџерс контракције имају јединствену фиксну тачку у метричким просторима;
2. увођење полиномских и слабих полиномских контракција у b -метричким просторима;
3. резултати о заједничким фиксним тачкама Јунговог типа за полиномске и слабо полиномске контракције;
4. процјена грешке n -те итерације итеративног низа у односу на фиксну тачку у b -метричком простору;
5. докази егзистенције и јединствености фиксне тачке у метричком простору у оквиру интерполативних проширених контракција Геретија, Харди-Роџерса, Руса и Ђирића;
6. уведене су (s, q, φ, F) -контракције и (s, q, φ, F) - g слабе контракције у slabим b -метричким просторима, при чему је доказано да за таква пресликавања постоји јединствена фиксна тачка.

2. Резултати су јасно приказани, правилно, логично и јасно тумачени. Довољан ниво критичности потврђује чињеница да је студент спровео студиозно истраживање ове тематике што је резултовало објављивањем четири рада.

3. Теоријски допринос: нове класе контракција које уједињују и проширују постојеће концепте у генерализованим метричким оквирима; нови услови за постојање и јединственост фиксне тачке у метричким, b -метричким и slabим b -метричким просторима; процјене конвергенције итеративних низова у b -метричким просторима.

Примјене: стабилност итеративних метода, модели засновани на интегралним и диференцијалним једначинама, оптимизација и проблеми најближих тачака у неklasичним метрикама.

Отварају се и јасни правци даљег истраживања: пренос добијених теорема на парцијалне и правоугаоне b -метрике, даље поштравање процјена брзине конвергенције и критеријума стабилности; проучавање вишезначних пресликавања и операторских модела; као и испитивање минималних услова комплетности, компактности и уређености под којима се добијени резултати и даље одржавају.

1. Укратко навести резултате до којих је студент дошао.
2. Оцијенити да ли су добијени резултати јасно приказани, правилно, логично и јасно тумачени, упоређујући их са резултатима других аутора и да ли је студент при томе испољавао довољно критичности.
3. Посебно је важно истаћи до којих нових сазнања се дошло у истраживању, који је њихов теоријски и практични допринос, те да ли указују на нове правце истраживања.

7. ЗАКЉУЧАК И ПРИЈЕДЛОГ

1. Кандидат је истраживао актуелан проблем и добијени резултати су коректно интерпретирани. Допринос аутора дисертације је увођење и систематизација нових класа контракција у генерализованим метричким просторима. Формулисане су и доказане теореме о јединствености фиксне тачке различитих врста контракција и дате процјене конвергенције итеративног низа.

2. Будући да је кандидат показао темељно познавање предмета истраживања, те у потпуности одговорио на проблематику која се разматра у дисертацији, Комисија предлаже Научно-наставном вијећу Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци и Сенату Универзитета у Бањој Луци да се докторска дисертација под називом „Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима“ кандидата ма Душана Бајовића прихвати и одобри јавна одбрана дисертације пред комисијом у истом саставу.

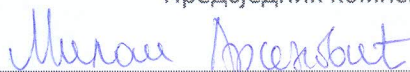
1. Навести најзначајније чињенице које указују на научни/уметнички допринос дисертације.
2. На основу укупне оцјене дисертације, комисија предлаже:
 - да се дисертација / уметнички рад прихвати, а студенту одобри одбрана,
 - да се дисертација / уметнички рад враћа студенту на дораду (да се допуни или измијени) или
 - да се дисертација / уметнички рад одбија.

Мјесто и датум: Бања Лука, 23.9.2025.



Др Мирослав Пранић, редовни професор

Предсједник комисије



Др Милош Арсеновић, редовни професор

Члан



Др Борис Петковић, доцент

Члан

Име и презиме, титула и звање

Члан

Име и презиме, титула и звање

Члан

ИЗДВОЈЕНО МИШЉЕЊЕ: Члан комисије који не жели да потпише извјештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије дужан је да у извјештај унесе образложење, то јест разлоге због којих не жели да потпише извјештај.

У прилогу извјештаја доставити:

1. Одлуку Умјетничко-научно-наставног / научно-наставног вијећа чланице Универзитета о именовању комисије за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада и јавну одбрану;
2. Одлуку Умјетничко-научно-наставног / научно-наставног вијећа чланице Универзитета о прихватању извјештаја комисије за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада и јавну одбрану;

3. Извјештај комисије за оцјену урађене докторске дисертације / докторског умјетничког рада и јавну одбрану – Образац 3;
4. Докторска дисертација у ПДФ формату;
5. Увјерење продекана за научноистраживачки рад и развој о провјери оригиналности докторске дисертације путем званичног софтвера за откривање плагијаризма;
6. Изјава о ауторству;
7. Изјава којом се овлашћује Универзитет у Бањој Луци да докторску дисертацију / докторски умјетнички рад учини јавно доступним;
8. Изјава о идентичности штампане и електронске верзије докторске дисертације / докторског умјетничког рада.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем
да је докторска дисертација

Наслов рада Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима

Наслов рада на енглеском језику Iterative sequences and fixed points in generalized metric spaces

- ☒ резултат сопственог истраживачког рада,
- ☒ да докторска дисертација, у цјелини или у дијеловима, није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- ☒ да су резултати коректно наведени и
- ☒ да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Бањој Луци, дана 23.9.2025. године

Потпис докторанта

Зоран Бајовић

Изјава 2

Изјава којом се овлашћује Универзитет у Бањој Луци да докторску дисертацију учини јавно доступном

Овлашћујем Универзитет у Бањој Луци да моју докторску дисертацију под насловом
Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима
која је моје ауторско дјело, учини јавно доступном.

Докторску дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату
погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у дигитални репозиторијум Универзитета у
Бањој Луци могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце
Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио/ла.

- ☐ Ауторство
- ☐ Ауторство – некомерцијално
- ☐ Ауторство – некомерцијално – без прераде
- ☒ Ауторство – некомерцијално – дијелити под истим условима
- ☐ Ауторство – без прераде
- ☐ Ауторство – дијелити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци
дат је на полеђини листа).

У Бањој Луци, дана 23.9.2025. године

Потпис докторанта

Зушан Бајовић

Изјава 3

Изјава о идентичности штампане и електронске верзије докторске дисертације

Име и презиме аутора	Душан Бајовић
Наслов рада	Итеративни низови и фиксне тачке у генерализованим метричким просторима
Ментор	др Зоран Митровић, редовни професор

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације идентична електронској верзији коју сам предао за дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци.

У Бањој Луци, дана 23.9.2025. године

Потпис докторанта

Душан Бајовић