UNIVERZITET U BANJOJ LUCI
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Ivana Savković

PROSTORI HARMONIJSKIH FUNKCIJA SA MJEŠOVITOM NORMOM: MJERE KARLESONA, BERGMANOVE PROJEKCIJE I DUALNOST

DOKTORSKA DISERTACIJA

Banja Luka, 2024.

UNIVERSITY OF BANJA LUKA
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

Ivana Savković

HARMONIC MIXED NORM SPACES: CARLESON MEASURES, BERGMAN PROJECTIONS AND DUALITY

DOCTORIAL THESIS

Banja Luka, 2024.

Mentor: dr Miloš Arsenović, redovni profesor na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu
Naslov: Prostori harmonijskih funkcija sa mješovitom normom: mjere Karlesona, Bergmanove projekcije i dualnost.

Rezime

Karakterizcija mjera Karlesona, ograničenost Bergmanove projekcije i određivanje dualnog prostora su centralni problemi u teoriji prostora analitičkih i harmonijskih funkcija. Glavni objekat istraživanja u ovoj disertaciji je prostor težinskih harmonijskih funkcija sa mješovitom normom definisanih na ograničenim glatkim oblastima u $\mathbb{R}^n$. U kontekstu ovih prostora, proučavaju se navedeni problemi. Dobijeni rezultati daju potpunu informaciju o prostorima funkcija sa mješovitom normom sa stepenom težinom te uopštavaju niz poznatih rezultata za netežinske prostore i prostore na geometrijski jednostavnijim domenima.

Disertacija se sastoji od šest glava. U prvoj glavi su uvedeni pojmovi koji se koriste u toku disertacije i dat je pregled dosadašnjih istraživanja koja su u vezi sa predmetom istraživanja same disertacije. Druga glava je posvećena nekim bitnim osobine harmonijskih funkcija, budući da su upravo harmonijske funkcije u fokusu istraživanja. U istoj glavi je definisan i glavni objekat istraživanja - prostor harmonijskih funkcija sa mješovitom normom $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Glavni rezultati disertacije su izloženi u trećoj, četvrtoj, petoj i šestoj glavi. Treća glava se bavi mjerama Karlesona za prostore $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Dat je potreban i dovoljan uslov za Borelovu mjeru μ da utapanje $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\mu)$ bude neprekidno. Uslov je geometrijski i povezuje mjeru μ sa težinskom Lebegovom mjerom. Takođe, u ovoj glavi su opisane iščezavajuće mjere Karlesona, tj. dat je potreban i dovoljan uslov za Borelovu mjeru μ da utapanje $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\mu)$ bude kompaktno. U četvrtoj glavi su dobijeni rezultati u vezi sa ograničenošću Bergmanove projekcije koja djeluje na prostor $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, projektujući ga na prostor $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Takođe, u istoj glavi je opisano i djelovanje težinske Bergmanove projekcije na drugi prostor mjerljivih funkcija sa mješovitom normom, u oznaci $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, za određeni raspon parametara prostora.

U petoj glavi je dobijen dualni prostor prostora $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, za određeni raspon parametara, i to kao posljedica ograničenosti Bergmanove projekcije i rezultata dualnosti za prostor mjerljivih funkcija sa mješovitom normom, definisan u nešto apstraktnijem okviru. Konačno, u šestoj glavi su rezultati o Teplicovim operatorima, koji predstavljaju primjenu dobijenih rezultata o mjerama Karlesona, Bergmanovim projekcijama i dualnosti prostora funkcija sa mješovitom normom. Naime, u ovoj

glavi su dati potrebni i dovoljni uslovi da Teplicov operator T_μ bude ograničen (ili kompaktan).

Ključni pojmovi: Karlesonove mjere, Bergmanove projekcije, Dualni prostori, Teplicov operator, harmonijske funkcije, glatke ograničene oblasti
Naučna oblast: Prirodne nauke
Naučno polje: Matematika
Klasifikacioni kod prema CERIF-u: P 140

Supervisor: Dr Miloš Arsenović, Full Professor at Faculty of Mathematics, University of Belgrade
Title: Harmonic mixed norm spaces: Carleson measures, Bergman projections and duality.

Abstract

Characterization of Carleson measure, boundedness of Bergman projection and obtaining a dual space are central problems in the theory of analytic and harmonic function spaces. The main object of research in this dissertation is the space of weighted harmonic functions with mixed norm defined on bounded smooth domains in $\mathbb{R}^n$. In the context of of these domains, the mentioned problems are studied. The obtained results provide complete information on mixed norm spaces of harmonic functions, with power type weights, and generalize a series of well-known results for unweighted spaces and spaces on geometrically simpler domains. The dissertation consists of six chapters. In the first chapter, the terms used are introduced in the course of the dissertation, and an overview of previous research related to the subject is given research of the dissertation itself. The second chapter is dedicated to some essential properties of harmonic functions since harmonic functions are the focus of research. The main object of research - the space of harmonic functions with mixed norm $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ is defined in the same chapter. The main results of the dissertation are presented in the third, fourth, fifth, and sixth chapters. Third chapter deals with Carleson measures for spaces $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. A necessary and sufficient condition for a Borel measure μ, such that the embedding $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\mu)$ be continuous, is given. The condition is geometric and relates the measure μ with the weighted Lebesgue measure. Also, in this chapter vanishing Carleson measures are described, i.e. a necessary and sufficient condition for a Borel measure μ to embedding $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\mu)$ be compact, is given.

The results related to the boundedness of the Bergman projection acting on the space $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ projecting it onto the space $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, are obtained in the fourth chapter. Also, in the same chapter, the action of Bergman projection on another mixed norm space of measurable functions $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, for a certain range of space parameters, is described.

In the fifth chapter, the dual space of the space $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ is obtained , for a certain range of parameters, which is a consequence of the boundedness of Bergman projection and the result of duality for the mixed norm space of measurable functions, defined in something more abstract framework. Finally, in the sixth chapter, there are results on Toeplitz operators, which represent the application of the obtained results on Carleson

measures, Bergman projections, and duality of the mixed norm space. Namely, in this chapter the necessary data are provided and sufficient conditions for the Teplitz operator T_μ to be bounded (or compact).

Keywords: Carleson measures, Bergman projections, Dual spaces, Toeplitz operator, harmonic functions, smoothly bounded domains
Scientific Area: Natural sciences
Scientific Field: Mathematics
CERIF Classification code: P 140

Zahvalnica

Prije svega želim da se zahvalim mentoru prof. dr Milošu Arsenoviću, što mi je dao priliku da pod njegovim vodstvom sprovedem ovo istraživanje. Njegovo znanje, sjajne ideje, entuzijazam i podrška su u velikoj mjeri doprinijeli nastanku ove doktorske disertacije. Zahvalna sam mu što je mnogo mario za moj rad i pored brojnih obaveza posvetio mnogo vremena ovom projektu. Zaista sam počastvovana njegovim mentorstvom. Mogu reći da je njegovo znanje i vodstvo imalo veliki uticaj na postavljanje osnove, oblikovanje mog istraživačkog rada i želju da se i dalje usavršavam kao istraživač.

Hvala uvaženim članovima komisije akademiku prof. dr Miodragu Mateljeviću, akademiku prof. dr Zoranu Mitroviću, prof. dr Vladimiru Jovanoviću, prof. dr Biljani Vojvodić što su prihvatili članstvo u komisiji i posvetili vrijeme ovom projektu. Posebno se zahvaljujem profesoru Mateljeviću koji je uvijek nesebično dijelio svoje matematičke ideje, kroz seminare i na druge načine.

Hvala mojim roditeljima Milošu i Smilji za svu ljubav i podršku koju su mi pružali za sve moje odluke i izbore. Hvala im što su me odgojili na pravi način i usmjerili ka istinskim životnim vrijednostima među kojima su obrazovanje, upornost, marljivost i istrajnost. Bez njihovog usmjerenja ovo sve ne bi bilo moguće. Hvala mojoj sestri Karolini za ljubav, brižnost i vjeru u moj uspjeh. Hvala mom vjereniku Nemanji za ljubav, razumjevanje i podršku u moralnom i organizacionom smislu. Hvala i ostalim članovima moje porodice, kolegama i prijateljima koji su vjerovali u mene i radovali se mom uspjehu.

Oznake

∇f- gradijent funkcije f (vektor koji se sastoji od parcijalnih izvoda funkcije f)
dm- Lebegova zapreminska mjera
$d\sigma$- površinska mjera
$|x|$- Euklidova norma od $x \in \mathbb{R}^n$
$C^k(\Omega)$- skup k puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na Ω
$C^\infty(\Omega)$ skup svih funkcija koje pripadaju $C^k(\Omega)$ za svako k
$h(\Omega)$- prostor harmonijskih funkcija na Ω
$\mathbb{U}$- jedinični disk u kompleksnoj ravni
$\mathbb{T}$- granica jediničnog diska $\mathbb{U}$ (kružnica)
$B(x,r)$- lopta sa centrom u x i poluprečnikom r
$S(x,r)$- granica lopte $B(x,r)$
$\mathbb{B}$- jedinična lopta sa centrom u koordinatnom početku
$\mathbb{S}$- jedinična sfera
$D_{\mathbf{n}}$- izvod po pravcu jediničnog vektora spoljašne normale na $\partial\Omega$
Δf- Laplasijan funkcije f
dm_γ- težinska Lebegova mjera
$f * g$- konvolucija funkcija f i g
l^p-prostor p apsolutno sumabilnih nizova za $1 \leq p < \infty$
l^∞-prostor ograničenih nizova
$L^p(\Omega)$- Lebegov prostor p- integrabilnih funkcija na Ω
$H^p(\Omega)$- Hardijev prostor
$L^{p,q}_\alpha(\Omega)$- prostor Borel mjerljivih funkcija sa mješovitom normom
$B^{p,q}_\alpha(\Omega)$- prostor harmonijskih funkcija sa mješovitom normom
$R_\gamma(x,y)$- težinsko harmonijsko Bergmanovo jezgro za $\gamma > -1$
P_γ- težinska Bergmanova projekcija
$r(x)$- udaljenost x do granice oblasti Ω
$E_\delta(x)$- Euklidova lopta ca centrom u x i poluprečnikom samjerljivim sa $r(x)$
X^* - dualni prostor prostora X
$x_n \rightharpoonup x$ - x_n slabo konvergira ka x
s.s. - skoro svuda
t.p.t. - tačka po tačka
ω_{n-1} - površina sfere $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$

Popis slika

Sadržaj

1. Uvod

U ovoj glavi uvešćemo osnovne pojmove i notaciju te predstaviti probleme koji su riješeni a koji su usko povezani sa problemom koji je u fokusu disertacije. Glava je podijeljena na veći broj poglavlja u kojima su navedene i važnije osobine pojedinih pojmova.

1.1 Ograničena oblast sa glatkom granicom u $\mathbb{R}^n$

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast (otvoren i povezan skup) sa C^∞ granicom i neka je $\rho(x)$ defininišuća funkcija skupa Ω. To znači da je ρ realno vrijednosna funkcija na $\mathbb{R}^n$ koja je C^∞ u okolini granice $\partial\Omega$ od Ω takva da je $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > 0\}$ ograničen i $|\nabla\rho(x)| \neq 0$ na $\partial\Omega$ gdje je $\nabla\rho(x) = (\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial\rho}{\partial x_n}(x))$. Dalje, postoji $\epsilon > 0$ takvo da za svako $0 < r \leq \epsilon$, skup $\Omega_{r,\rho} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > r\}$ je glatka ograničena podoblast od Ω sa definišućom funkcijom $\rho(x) - r$. Fiksiramo takvo $\epsilon > 0$. Jasno je da je $\partial\Omega_{r,\rho} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = r\}$ i ovu granicu ćemo označavati sa $\Gamma_{r,\rho}$. Označavamo sa $d\sigma_{r,\rho}$ indukovanu površinsku mjeru na $\partial\Omega_{r,\rho}$. Postoji beskonačno mnogo definišućih funkcija za Ω i bilo koje dvije različite definišuće funkcije povlače dva različita sistema $\{\partial\Omega_{r,\rho}\}$ i $\{\sigma_{r,\rho}\}$. dm označava Lebegovu zapreminsku mjeru na $\mathbb{R}^n$. $h(\Omega)$ označava prostor harmonijskih funkcija na Ω. Ove postavke će se koristiti za definisanje prostora funkcija sa mješovitom normom u glavi 2.

1.2 Harmonijske funkcije

Neka je Ω neprazan otvoren podskup realnog Euklidovog prostora $\mathbb{R}^n$ gdje je $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Dva puta neprekidno diferencijabilna , kompleksno-vrijednosna funkcija f definisana na Ω je harmonijska na Ω ako je

$$\Delta f \equiv 0, \tag{1.1}$$

gdje je $\Delta = D_1^2 + D_2^2 + ... + D_n^2$ i D_j^2 $(j = 1, 2, ..., n)$ označava druge parcijalne izvode u odnosu na j-tu koordinatu promjenljive. Operator Δ se naziva Laplasijan (Laplasov operator) i jednačina (1.1) se naziva Laplasova jednačina. Kažemo da je funkcija f definisana na skupu (ne neophodno otvorenom) E harmonijska ako se može proširiti na harmonijsku funkciju na otvorenom skupu koji sadrži skup E.

Neka $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ označava tačku u $\mathbb{R}^n$ i neka $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ označava Euklidovu normu od x.

Primjeri harmonijskih funkcija

Najjednostavnije nekonstantne harmonijske funkcije su koordinatne funkcije, npr. $u(x) = x_1$. Nešto kompleksniji primjer je funkcija na $\mathbb{R}^3$ definisana sa $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + ix_2$. Funkcija $f(x) = |x|^{2-n}$ je harmonijska na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i vitalna je u teoriji harmonijskih funkcija kada je $n > 2$.

Još primjera harmonijskih funkcija možemo dobiti diferenciranjem. Naime, uočimo da je za glatku funkciju, Laplasijan komutativan sa svakim parcijalnim izvodom; diferenciranjem u posljednjem primjeru, pokazuje se da je $x_1|x|^{-n}$ harmonijska na $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ kada je $n > 2$. Međutim, ova funkcija je harmonijska i za $n = 2$. To se može provjeriti direktno ili uočavajući da je $x_1|x|^{-2}$ parcijalni izvod od funkcije $\log|x|$, koja je harmonijska na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Funkcija $\log|x|$, kada je $n = 2$, ima istu ulogu kao i funkcija $|x|^{2-n}$, kada je $n > 2$.

Primjetimo da je $\lim_{x\to\infty} \log|x| = \infty$, ali $\lim_{x\to\infty} |x|^{2-n} = 0$; primjetimo i da $\log|x|$ nije ograničena niti odozdo niti odozgo, s druge strane, $|x|^{2-n}$ je uvijek pozitivno. Ova činjenica nagovještava kontrast između teorije harmonijskih funkcija u ravni i u višedimenzionalnom slučaju.

Druga ključna razlika nastaje zbog uske povezanosti između holomorfnih i harmonijskih funkcija u ravni: Realno-vrijednosna funkcija na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je harmonijska ako i samo ako je lokalno realan dio holomorfne funkcije. Ne postoje ovakvi rezultati u višedimenzionalnom slučaju.

Za $k \in \mathbb{N}$, neka $C^k(\Omega)$ označava skup k puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na Ω a $C^\infty(\Omega)$ skup svih funkcija koje pripadaju $C^k(\Omega)$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Za $E \subset \mathbb{R}^n$, sa $C(E)$ označavamo skup neprekidnih funkcija na E. Pošto je Laplasijan linearan operator, sume i skalarni umnošci harmonijskih funkcija su harmonijski.

Za $y \in \mathbb{R}^n$ i funkciju u na Ω, y-translacija od u je funkcija na $\Omega + y$ čija je vrijednost u x jednaka $u(x - y)$. Jasno je da je translacija harmonijske funkcije harmonijska funkcija.

Za $r > 0$ i funkciju u na Ω, r-dilatacija od u je funkcija definisana na $\frac{1}{r}\Omega = \{\frac{1}{r}\omega : \omega \in \Omega\}$ u oznaci u_r za koju je $u_r(x) = u(rx)$. Ako je $u \in C^2(\Omega)$, onda jednostavnim računom dobijamo da je $\Delta(u_r) = r^2(\Delta u)_r$ na $\frac{1}{r}\Omega$. Dakle, u_r je harmonijska ako je u harmonijska tj. dilatacija harmonijske funkcije je harmonijska funkcija.

Primjetimo sličnost između Laplasijana $\Delta = D_1^2 + D_2^2 + ... + D_n^2$ i funkcije $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ čiji su nivoski skupovi sfere centrirane u koordinatnom početku. Povezanost između harmonijskih funkcija i sfera je centralna u teoriji harmonijskih funkcija. Osobina srednje vrijednosti najbolje ilustruje ovu povezanost.

Za kvadratnu matricu T koja je ortogonalna i funkciju $u \in C^2(\Omega)$, funkcija $u \circ T$ je rotacija funkcije u. Pokazaćemo da Laplasijan komutira sa ortogonalnim transformacijama što znači da je rotacije harmonijske funkcije harmonijska. Naime, $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$ na $T^{-1}(\Omega)$. Neka je $T = [t_{ij}]$. Onda je

$$D_j(u \circ T) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(D_i u) \circ T,$$

gdje D_j označava parcijalni izvod u odnosu na j-tu koordinatu promjenljive. Diferenciranjem još jednom i sumiranjem po j se dobija

$$\begin{aligned}\Delta(u \circ T) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i,k=1}^{n} t_{kj} t_{ij} (D_k D_i u) \circ T \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{kj} t_{ij} \right) (D_k D_i u) \circ T \\ &= \sum_{i=1}^{n} (D_i D_i) \circ T = (\Delta u) \circ T,\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Navešćemo još jedno pravilo za računanje Laplasijana kompozicije funkcija (vidjeti [19], p. 26). Ako je funkcija $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ realnovrijednosna, onda se Laplasijan kompozicije ovih funkcija računa po sljedećoj formuli:

$$\Delta(f \circ g)(x) = f''(g(x))|\nabla g(x)|^2 + f'(g(x))\Delta g(x). \tag{1.2}$$

Sljedeća lema daje procjenu odozdo Laplasijana od $|f|^p$ kada je f harmonijska funkcija i $p \geq 2$.

Lema 1.2.1. *Neka je $f \in h(\Omega)$ i $2 \leq p < \infty$. Tada je*

$$\Delta |f|^p \geq p|f|^{p-2}|\nabla f|^2.$$

Dokaz. Neka je $f = u + iv$, gdje su u i v realni i imaginarni dio kompleksne funkcije f, redom. Koristeći pravilo za Laplasijan kompozicije (1.2) dobijamo

$$\Delta |f|^p = \Delta(|f|^2)^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2}(\frac{p}{2} - 1)(|f|^2)^{\frac{p}{2}-2}|\nabla |f|^2|^2 + \frac{p}{2}(|f|^2)^{\frac{p}{2}-1}\Delta |f|^2$$

$$= \frac{p}{2}(\frac{p}{2}-1)|f|^{p-4}4|u\nabla u + v\nabla v|^2 + p|f|^{p-2}|\nabla f|^2$$
$$= p(p-2)|f|^{p-4}|u\nabla u + v\nabla v|^2 + p|f|^{p-2}|\nabla f|^2$$
$$\geq p|f|^{p-2}|\nabla f|^2. \tag{1.3}$$

□

Mnoge važne osobine harmonijskih funkcija slijede iz Grinovog identiteta:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dm = \int_\Gamma (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)d\sigma, \tag{1.4}$$

gdje je Ω ograničen otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ sa glatkom granicom Γ a funkcije u i v funkcije iz klase C^2 na okolini od $\overline{\Omega}$. $D_{\mathbf{n}}$ označava izvod po pravcu jediničnog vektora spoljašnje normale $\mathbf{n}$ tj. za $\xi \in \Gamma$, $(D_{\mathbf{n}}u)(\xi) = (\nabla u)(\xi) \cdot \mathbf{n}(\xi)$. Navedena Grinova formula se jednostavno dokazuje koristeći poznatu teoremu o divergenciji

$$\int_\Omega \mathrm{div} w dm = \int_\Gamma w \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

Ovdje je $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ glatko vektorsko polje (vektorska funkcija sa vrijednostima u $\mathbb{C}^n$ čije su komponente neprekidno diferencijabilne) na okolini od $\overline{\Omega}$ i $\mathrm{div}(w)$ je divergencija vektorskog polja w tj. $\mathrm{div}(w) = \nabla \cdot w = D_1w_1 + D_2w_2 + ... + D_nw_n$. Kada u teoremi o divergenciji stavimo da je $w = u\nabla v - v\nabla u$, koristeći činjenicu da je $\mathrm{div}(\nabla) = \Delta$, dobijamo Grinovu formulu. Značajan je specijalan slučaj Grinovog identiteta koji se dobija za harmonijsku funkciju u i $v \equiv 1$. Naime, tada je $\Delta u = 0$, $D_{\mathbf{n}}v = 0$ i $\Delta v = 0$ pa Grinov identitet postaje:

$$\int_\Gamma D_{\mathbf{n}}ud\sigma = 0. \tag{1.5}$$

Grinov identitet je ključan za dokazivanje osobine srednje vrijednosti harmonijske funkcije kao što će se vidjeti u glavi 2.

Interesantno je reći nešto o porijeklu samog naziva harmonijskih funkcija. Riječ harmoničnost se obično koristi da se opiše kvalitet zvuka. Harmonijske funkcije su dobile ime iz povezanosti sa jednim izvorom zvuka - vibrirajućim žicama. Fizičari označavaju kretanje tačke po vibrirajućim žicama kao harmonijsko kretanje. Takvo kretanje se može opisati koristeći funkcije sinus i kosinus. U ovom kontekstu se ove funkcije ponekad zovu harmonijske. U klasičnoj Furijeovoj analizi se funkcije na jediničnoj kružnici razvijaju preko sinusa i kosinusa. Analogan razvoj postoji na sferi u $\mathbb{R}^n$ za $n > 2$ i to preko homogenih harmonijskih polinoma. O ovim polinomima se detaljnije može pronaći u glavi 5 iz [19]. Ovi harmonijski polinomi igraju istu ulogu na sferi kao i harmonijski sinus i kosinus na kružnici; zato se nazivaju sferični harmonici. Termin "sferični harmonik" su prvi put u ovom kontekstu koristili William Thomson i Peter G. Tait (vidjeti [140]). Na samom početku XX vijeka, pojam harmonijska funkcija se koristi ne samo za homogene polinome čiji je Laplasijan nula, nego za sva rješenja Laplasove jednačine.

1.3 L^p prostori

Neka je (X,μ) fiksiran prostor sa mjerom i $0<p<+\infty$. Sa $L^p(\mu)$ označavamo prostor svih kompleksnih mjerljivih funkcija f na X takvih da je $\int_X |f|^p d\mu < +\infty$ tj. f je p-integrabilna. $L^p(\mu)$ je vektorski prostor sa normom $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ ukoliko je $1 \leq p < +\infty$; taj prostor je Banahov, odnosno kompletan u odnosu na metriku indukovanu datom normom. Za $0<p<1$, $\|\cdot\|_p$ nije norma, ali je sa $d_p(f,g) = \|f-g\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu$ zadana metrika i $L^p(\mu)$ je tada kompletan metrički prostor. $L^\infty(\mu)$ je prostor svih funkcija f takvih da je $\|f\|_\infty = \sup \mathrm{ess}|f| < +\infty$, gdje je $\sup \mathrm{ess}|f| = \inf\{\alpha : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\}$. Dalje navodimo neke bitne nejednakosti koje se tiču normi na $L^p(\mu)$ prostorima a koje će se koristiti u radu.

Helderova nejednakost Neka su p i p' konjugovani eksponenti tj. za $p>1$ je $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ i za $p=1$, $p'=\infty$. Neka su f i g mjerljive funkcije na prostoru X sa mjerom μ. Tada je

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|f\|_{p'}.$$

Integralna nejednakost Minkovskog Neka je $(X\times Y, \mu\times\nu)$ proizvod dva $\sigma-$ konačna prostora sa mjerom i neka je f $\mu\times\nu$ mjerljiva funkcija na $X\times Y$. Pretpostavimo da je, za neko $1<p<+\infty$,

$$\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) < +\infty.$$

Tada važi

$$\left(\int_Y \left|\int_X f(x,y)d\mu(x)\right|^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p d\nu(y)\right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x).$$

Šurov test Neka je K funkcija na $X\times X$. Neka je T integralni operator sa jezgrom K, takav da

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)d\mu(y).$$

U sljedećoj teoremi predstavljamo dovoljan uslov na integralno jezgro K za ograničenost pridruženog integralnog operatora T na $L^p(X,\mu)$ u slučaju $1 < p < \infty$. Ovaj rezultat se može pronaći u [150]. Zbog značaja rezultata, navešćemo i dokaz teoreme.

Teorema 1.3.1 ([150]). *Pretpostavimo da je K nenegativna mjerljiva funkcija na $X \times X$, T je integralni operator sa jezgrom K i $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Ako postoje pozitivne konstante C_1 i C_2 i pozitivna mjerljiva funkcija h na X takva da*

$$\int_X K(x,y)h(y)^{p'}d\mu(y) \le C_1 h(x)^{p'},$$

za skoro svako $x \in X$ i

$$\int_X K(x,y)h(x)^p d\mu(x) \le C_2 h(y)^p,$$

za skoro svako $y \in X$, onda je T ograničen linearan operator na $L^p(X,\mu)$, sa normom manjom ili jednakom $C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}}$.

Dokaz. Ovo je direktna posljedica Helderove nejednakosti i Fubinijeve teoreme. Zapravo, ako je $f \in L^p(X, d\mu)$, onda za skoro svako $x \in X$,

$$|Tf(x)| \le \int_X K(x,y)h(y)h(y)^{-1}|f(y)|d\mu(y),$$

i Helderova nejednakost u odnosu na mjeru $K(x,y)d\mu(y)$ daje

$$|Tf(x)| \le \left[\int_X K(x,y)h(y)^{p'}d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p'}} \left[\int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Na osnovu prve nejednakosti pretpostavke, imamo da je

$$|Tf(x)| \le C_1^{\frac{1}{p'}} h(x) \left[\int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{1}{p}},$$

za skoro svako $x \in X$. Sada, podižući gornju nejednakost na eksponent p i integraleći dobijeni izraz, primjenom Fubinijeve teoreme i druge nejednakosti pretpostavke, dobijamo:

$$\int_X |Tf(x)|^p d\mu(x) \le \int_X \left(C_1^{\frac{p}{p'}} h(x)^p \int_X K(x,y)h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y)\right) d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1^{\frac{p}{p'}} \int_X h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y) \int_X h(x)^p K(x,y) d\mu(x) \\
&\le C_1^{\frac{p}{p'}} \int_X h(y)^{-p}|f(y)|^p d\mu(y) C_2 h(y)^p \\
&= C_1^{\frac{p}{p'}} C_2 \int_X |f(y)|^p d\mu(y) = C_1^{\frac{p}{p'}} C_2 \|f\|_{L^p}^p.
\end{aligned}
$$

Dakle, operator T je ograničen na $L^p(X,\mu)$, sa normom manjom ili jednakom $C_1^{\frac{1}{p'}} C_2^{\frac{1}{p}}$.
□

1.4 Prostori funkcija sa mješovitom normom

Prostore funkcija sa mješovitom normom uveo je Hardyjev student Thomas Flett 1972. godine [49, 50] iako se integrali kojima se definišu ovi prostori pojavljuju mnogo ranije, u radovima Hardyja i Littlewooda objavljenim 1932. i 1941. [58, 59]. Prvobitna definicija ovih prostora se odnosi na funkcije definisane na disku. Naime, za svaku kompleksno vrijednosnu neprekidnu funkciju f na jediničnom disku $\mathbb{U}$ u ravni i za $0 < p, q \le \infty$ i $\alpha > 0$ se posmatra izraz

$$
\begin{cases} \{\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f,r) dr\}^{\frac{1}{q}}, & \text{za } 0 < q < \infty \\ \sup_{0 \le r < 1} (1-r)^\alpha M_p(f,r), & \text{za } q = \infty \end{cases}, \tag{1.6}
$$

gdje je

$$
M_p(f,r) = \begin{cases} \{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}}, & 0 < p < \infty \\ \text{ess sup}_\theta |f(re^{i\theta})|, & p = \infty. \end{cases}
$$

Prostor svih harmonijskih funkcija za koje je posmatrani izraz, koji ćemo označavati sa $\|f\|_{B_\alpha^{p,q}(\mathbb{U})}$, konačan, se naziva prostor harmonijskih funkcija sa mješovitom normom i označava sa $B_\alpha^{p,q}(\mathbb{U})$. Analogno se može definisati i prostor holomorfnih funkcija $A_\alpha^{p,q}(\mathbb{U})$ sa mješovitom normom.

Prostore funkcija sa mješovitom normom povezaćemo sa Hardijevim prostorima. Prostor funkcija $f \in H(\mathbb{U})$ (holomorfne funkcije na jediničnom disku) za koje je izraz

$$
\|f\|_{H^p} = \sup_{0 \le r < 1} \{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}} \tag{1.7}
$$

konačan, za $0 < p < \infty$ se naziva Hardijev prostor funkcija i označava sa $H^p(\mathbb{U})$. Hardijev prostor $H^\infty(\mathbb{U})$ je prostor svih holomorfnih funkcija na jediničnom disku takvih da je

$$\|f\|_{H^\infty} = \sup_{0\leq r<1} [\text{ess sup}_\theta |f(re^{i\theta})|] < +\infty. \tag{1.8}$$

Napomenimo da se supremumi iz (1.7) i (1.8) mogu zamijeniti sa odgovarajućim limesima, budući da se supremumi odnose na monotone (rastuće) funkcije promjenljive r. Dakle, imamo da je $\|f\|_{H^p} = \lim_{r\to 1}\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta\}^{\frac{1}{p}}$, za $0 < p < \infty$ i $\|f\|_{H^\infty} = \lim_{r\to 1}[\text{ess sup}_\theta |f(re^{i\theta})|]$. Za $1 \leq p \leq \infty$, $\|f\|_{H^p}$ predstavlja normu i ovaj prostor je Banahov.

Lako se provjeri da ako je $p, q \geq 1$ izraz (1.6) definiše normu na $A^{p,q}_\alpha(\mathbb{U})$. Provjerićemo nejednakost trougla, pošto ostale osobine važe trivijalno. Uočimo da je $M_p(f, r) = \|f_r\|_{H^p}$ gdje je $f_r(z) = f(rz)$ standardna dilatacija funkcije f. Dakle, za $1 \leq q < \infty$,

$$\|f\|_{A^{p,q}_\alpha} = \{\int_0^1 ((1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}}\|f_r\|_{H^p})^q dr\}^{\frac{1}{q}} = \|\|f_r\|_{H^p}(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}}\|_{L^q(0,1)}.$$

Sada, s obzirom na to da je $(f+g)_r = f_r + g_r$, iz standardne nejednakosti trougla u H^p i realnom Lebegovom prostoru $L^q(0,1)$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{A^{p,q}_\alpha} &= \|\|f_r + g_r\|_{H^p}(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}}\|_{L^q(0,1)} \\
&\leq \|\|f_r\|_{H^p}(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}} + \|g_r\|_{H^p}(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}}\|_{L^q(0,1)} \\
&\leq \|\|f_r\|_{H^p}(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}}\|_{L^q(0,1)} + \|\|g_r\|_{H^p}(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}}\|_{L^q(0,1)} \\
&= \|f\|_{A^{p,q}_\alpha} + \|g\|_{A^{p,q}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Prostor svih Lebeg mjerljivih funkcija za koje je izraz (1.6) konačan ćemo označavati sa $L^{p,q}_\alpha(\mathbb{U})$. Naravno, izraz (1.6) ne definiše uvijek pravu normu ali $L^{p,q}_\alpha$ je metrički prostor u svojoj toplogiji indukovanom kvazi-normom i niz koji konvergira u ovoj topologiji ima podniz koji konvergira tačka po tačka s.s. Dakle, kompletnost prostora $A^{p,q}_\alpha$ će slijediti iz činjenice da je ovaj prostor zatvoren potprostor od $L^{p,q}_\alpha$ (vidjeti [72]).

Napomenimo da se težinski prostor funkcija sa mješovitom normom može definisati i opštije, npr. sa težinama koje su rastuće, apsolutno neprekidne funkcije $\varphi : (0,1) \to (0, +\infty)$. Ovakav prostor je definisao Pavlović u [115] i predstavlja uopštenje prostora koji je razmatran u [101]. Naime, za rastuću apsolutno neprekidnu funkciju $\varphi : (0,1] \to (0, +\infty)$, $\varphi(0+) = 0$ i $p > 0$ se posmatra veličina

$$\{\int_0^1 [\varphi(1-r)\|f_r\|_{H^p}]^q dm_\varphi(r)\}^{\frac{1}{q}},$$

gdje je $dm_\varphi(r) = \frac{\varphi'(1-r)}{\varphi(1-r)}dr,\ 0 < r < 1,\ f_r \in H^p$. Prostor svih funkcija za koje je posmatrana veličina konačna je prostor analitičkih funkcija sa mješovitom normom u oznaci $H(p,q,\varphi)$. U [115] se analogno definiše i prostor harmonijskih funkcija $h(p,q,\varphi)$, za $p \geq 1$. Specijalno, za $\varphi(t) = t^\alpha$, za neko $\alpha > 0$, dobija se da je $dm_\varphi(t) = \frac{\alpha dt}{1-t}$.

Fokus istraživanja je prostor $B^{p,q}_\alpha(\Omega)-$prostor koji se definiše u glavi 2, na opštijem domenu Ω. Prostor $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{U})$ je prirodno uopštenje harmonijskog Bergmanovog težinskog prostora funkcija $b^p_\beta(\mathbb{U}) = \{f \in h(\mathbb{U}) : f \in L^p(\mathbb{U}, (1-|z|^2)^\beta dm(z))\}$, definisanog za $\beta > -1$. Zapravo je $B^{p,p}_{\frac{\beta+1}{p}}(\mathbb{U}) = b^p_\beta(\mathbb{U})$.

Teorija Bergmanovih prostora analitičkih funkcija ima dugu istoriju. Naime, prvi sistematski pristup proučavanju B^2 prostora potiče od S. Bergmana [1], još iz 1950. (vidjeti [21]). Od tada postoji mnogo članaka i knjiga posvećenih ovoj oblasti.

O težinskim Bergmanovim prostorima analitičkih funkcija na disku, kao i na jediničnoj lopti i polidisku u $\mathbb{C}^n$ se može pronaći u [39]. Glava 7 iz [39] je posvećena harmonijskim Bergmanovim prostorima b^p_α na jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^n$, date su procjene jezgra za ove prostore, dokazana je ograničenost nekih linearnih operatora iz L^p_α u b^p_α, opisani su duali Bergmanovih prostora. U [136], 1998. su proučavani harmonijski Bergmanovi prostori na jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^n$ te su u ovom radu na jednostavniji način predstavljeni već poznati rezultati. Moderniji predmet istraživanja Bergmanovih prostora je mješavina teorije kompleksnih funkcija sa funkcionalnom analizom i teorijom operatora. Dolazi u dodir sa harmonijskom analizom, teorijom aproksimacija, hiperboličkom geometrijom i teorijom parcijalnih diferencijalnih jednačina. Pozadina potrebna za razumijevanje ove teorije kao i rezultati u vezi sa ovim prostorima koji su do tada dobijeni su 2004. izloženi u [44]. Krajem 20. vijeka i početkom 21. vijeka dobijeno je mnogo rezultata u vezi sa težinskim Bergmanovim prostorima $B^p_\alpha(\mathbb{B})$ na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$, gdje je $0 < p < +\infty$ i $\alpha > -1$. Zhao i Zhu su ove rezultate proširili na prirodan način na slučaj kada je α proizvoljan realan broj i $0 < p \leq \infty$ (vidjeti [147]). Naime, njihov pristup pokriva sve klasične Bergmanove prostore, Besove prostore, Lipschitzove prostore, Blochove prostore, Hardijev prostor H^2, i tzv. Arvesonov prostor. Neki od rezultata o integralnim reprezentacijama, kompleksnoj interpolaciji, nizovskim množiocima i mjerama Karlesona su novi čak za standardne netežinske Bergmanove prostore na jediničnom disku.

Recimo nešto o motivaciji za uvođenje prostora $B^{p,q}_\alpha(\mathbb{U})$. Poznato je da za holomorfnu funkciju f i $0 < p \leq \infty$, integralna sredina $M_p(f,r)$ je rastuća funkcija od promjenljive r; takođe, integralna sredina je rastuća funkcija u slučaju harmonijske funkcije i $1 \leq p \leq \infty$. Funkcija f pripada Hardijevom prostoru $H^p(\mathbb{U})$ ako

[1]Stefan Bergman, 1895.-1977., američki matematičar rođen u Poljskoj, najpoznatiji po istraživanju u okviru kompleksne analize, Bergmanovoj projekciji i Bergmanovom jezgru koje je otkrio kada je bio na Univerzitetu u Berlinu, 1922.

i samo ako je f analitička i $\sup_{0\le r<1} M_p(f,r) < \infty$, $0 < p \le \infty$. Po definiciji, funkcija f pripada Hardijevom prostoru $h^p(\mathbb{U})$ ako i samo ako je f harmonijska i $\sup_{0\le r<1} M_p(f,r) < \infty$, $0 < p \le \infty$. O Hardijevim prostorima na jediničnom disku se može pronaći u [122, 82, 43]. Višedimenzionalna teorija Hardijevih prostora harmonijskih funkcija je razvijena i produbljena u [132] i [48]. Ukoliko funkcija $M_p(f,r)$ nije ograničena, izlazimo iz granica Hardijevih prostora. Sljedeći prirodan uslov koji se može nametnuti da bismo dobili bogatu klasu funkcija je da integralna sredina bude integrabilna. Štaviše, možemo nametnuti uslov da M_p pripada nekom $L^q(\mathbb{U})$ u odnosu na neku konačnu mjeru. Na ovaj način dolazimo do prirodnog proširenja Hardijevog prostora, prostora funkcija sa mješovitom normom. Naime, $f \in B^{p,q}_\alpha(\mathbb{U})$ ako i samo ako je f harmonijska i $(1-r)^\alpha M_p(f,r) \in L^q([0,1), d\lambda(r))$ $0 < q \le \infty$, gdje je $d\lambda(t) = \frac{dt}{1-t}$ mjera na $[0,1)$. Dakle, familija prostora funkcija sa mješovitom normom uključuje sve težinske Hardijeve prostore i težinske Bergmanove prostore, i više.

Glava 7 iz [72] je posvećena bitnim osobinama prostora funkcija sa mješovitom normom. Dokazana je teorema projekcije za prostore $A^{p,q}_\alpha$, ustanovljene su ekvivalentne norme na ovim prostorima, diskutovani su prostori analitičkih funkcija na $\mathbb{U}$ sa izvodima u $A^{p,q}_\alpha$ koji uključuju neke dobro poznate prostore kao što su Blochovi i Besov-Lipschitzovi prostori.

U nastavku navodimo i teoremu iz [58] koja povezuje prostore sa mješovitom normom (analitičke) na jediničnom disku sa Hardijevim prostorima.

Teorema 1.4.1 ([58])**.** *Ako je $f \in H^t$, $0 < t < p$ i $q \ge t$, onda*

$$\int_0^1 (1-r)^{q(\frac{1}{t}-\frac{1}{p})-1} M_p^q(f,r)dr \le C\|f\|_{H^t}.$$

Navedena teorema predstavlja teoremu utapanja. Inkluzije između različitih prostora analitičkih funkcija sa mješovitom normom u zavisnosti od tri parametra prostora su date u [9], poglavlje 4.3. Utapanje jednog prostora harmonijskih funkcija sa mješovitom normom $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ u drugi $B^{p_1,q_1}_{\alpha_1}(\Omega)$, gdje je Ω opštiji domen - ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$ je dokazano u [15], pod određenim uslovima za parametre. Navešćemo i ovu opštiju teoremu utapanja.

Teorema 1.4.2 ([15])**.** *Za $0 < p \le p_1 \le \infty$, $0 < q \le q_1 \le \infty$ imamo neprekidno utapanje*

$$B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow B^{p_1,q_1}_{\alpha_1}(\Omega),$$

gdje je $\alpha_1 q_1 = \alpha q + (n-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1})$.

U fokusu ove disertacije je drugačija vrsta utapanja, utapanje Karlesonovog tipa. Teorema utapanja Karlesonovog tipa je rezultat iz [123] koji će biti izložen u glavi

3. Za $\alpha = \frac{1}{q}$ dobija se beztežinski prostor funkcija sa mješovitom normom. Prostor $B_{\alpha}^{p,q}(\Omega)$ za ograničenu oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se definiše u [123] i on je u fokusu ove disertacije. Uvodimo ga u glavi 2. Prostore funkcija sa mješovitom normom - mješovite Lebegove prostore $L^{\vec{p}}(\mathbb{R}^n)$ gdje je $\vec{p} \in (0, \infty]^n$, kao prirodnu generalizaciju klasičnog Lebegovog prostora $L^p(\mathbb{R}^n)$ zamjenom eksponenta p sa vektorom $\vec{p}$, su proučavali Benedek i Panzone, 1961. godine u [20]. U [68] su predstavljena istraživanja u vezi sa ovim prostorima i drugim prostorima sa mješovitom normom kao što su mješoviti Morreyjevi prostori i neizotropni Hardijevi prostori sa mješovitom normom. U [78] se razmatra još jedna generalizacija klasičnog Bergmanovog prostora, koja je kardinalno drugačija od gore navedenog pristupa. Umjesto integralne norme se koristi l^q norma niza čiji su članovi norme Morreyjevog tipa Furijeovih koeficijenata funkcije na jediničnom disku $\mathbb{U}$ u $\mathbb{C}$. Tako uvedeni prostori nasljeđuju karakteristike i Bergmanovog i Morreyjevog prostora i stoga ih nazivamo prostorima tipa Bergman–Morrey. Isti autori su u [77] razmatrali opštije prostore analitičkih funkcija sa mješovitom normom. Težinski prostori holomorfnih funkcija sa mješovitom normom na jediničnom disku, definisani preko Furijeovih koeficijenata, proučavani su 2022. godine u [79].

1.5 Ograničeni operatori

Operator $A : X \to Y$ koji preslikava linearan prostor X u linearan prostor Y se naziva linearan operator ako je

$$A(ax_1 + bx_2) = aA(x_1) + bA(x_2)$$

za svako $x_1, x_2 \in X$ i svako $a, b \in \mathbb{C}$ (ili $\mathbb{R}$).

Definicija 1.5.1. Linearan operator $A : X \to Y$ iz normiranog prostora X u normiran prostor Y je ograničen operator ako postoji pozitivna konstanta C takva da

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

za svako $x \in X$.

Teorema 1.5.1. *Linearan operator $A : X \to Y$ iz normiranog prostora X u normiran prostor Y je ograničen operator ako i samo ako*

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < +\infty. \tag{1.9}$$

Broj $\|A\|$ je najmanja granica operatora A i zove se norma operatora A. Može se predstaviti i sa $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| < +\infty$.

Dakle, linearan operator $A : X \to Y$ je ograničen ako i samo ako slika ograničene skupove iz X u ograničene skupove iz Y.

Teorema 1.5.2. *Linearan prostor $L(X, Y)$ ograničenih linearnih operatora iz normiranog prostora X u normiran prostor Y je normiran prostor sa normom* (1.9)*. Ako je Y Banahov prostor, onda $L(X, Y)$ je takođe Banahov prostor.*

1.6 Kompaktni operatori

U ovom poglavlju ćemo uvesti kompaktne operatore i formulisati tvrđenja u vezi sa njima, koja ćemo koristiti u nastavku. Ovi operatori imaju važnu ulogu u teoriji integralnih jednačina i mnogim dijelovima funkcionalne analize. Detaljnije o kompaktnim operatorima se može pogledati u [11] (strane 195-208) i [85] (strane 25-32).

Definicija 1.6.1. Linearan operator $A : X \to Y$ iz normiranog prostora X u normiran prostor Y se zove kompaktan operator ako slika svaki ograničen skup iz X u relativno kompaktan skup iz Y.

Kako je podskup U normiranog prostora Y relativno kompaktan u Y ako svaki niz u U sadrži podniz koji konvergira u Y, imamo sljedeću ekvivalentnu karakterizaciju kompaktnog operatora.

Teorema 1.6.1. *Linearan operator $A : X \to Y$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ograničen niz (φ_n) iz X, niz $(A\varphi_n)$ sadži konvergentan podniz u Y.*

Sljedeća teorema predstavlja kriterijum za kompaktnost u $C(G)$, prostoru kompleksno-vrijednosnih neprekidnih funkcija na kompaktnom skupu G, na kome je definisana supremum norma $\|\phi\|_\infty := \sup_{x \in G} |\phi(x)|$. Koristićemo ju za dokazivanje kompaktnosti Bergmanove projekcije na određenim prostorima, u glavi 4.

Teorema 1.6.2 (Arzelà-Ascoli teorema)**.** *Skup $U \subset C(G)$ je relativno kompaktan ako i samo ako je ograničen i ekvineprekidan tj. ako*

- *postoji konstanta C takva da $|\phi(x)| \leq C$ za svako $x \in G$ i svako $\phi \in U$,*
- *za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $|\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon$ za svako $x, y \in G$ t.d. $|x - y| < \delta$ i svako $\phi \in U$.*

Sljedeća teorema daje primjer kompaktnih operatora koji će nas zanimati i može se dokazati primjenom prethodne teoreme.

Teorema 1.6.3. *Integralni operatori sa neprekidnim jezgrom su kompaktni linearni operatori na $C(G)$ t.j. za kompaktan skup $G \subset \mathbb{R}^n$, jezgro $K \in C(G^2)$, operator*

$$A\varphi(x) := \int_G K(x,y)\varphi(y)dm(y)$$

je kompaktan na $C(G)$.

U nastavku definišemo refleksivan prostor.

Definicija 1.6.2. Prostor X je refleksivan ako je $X^{**} = \Phi(X)$, gdje je $\Phi : X \to X^{**}$ preslikavanje definisano sa $\Phi(x) = x^{**}$ $(x^{**}(f) = f(x),\ f \in X^*)$.

Sljedeća teorema je veoma značajna u funkcionalnoj analizi.

Teorema 1.6.4 (Banach-Alaoglu teorema)**.** *Ako je X Banahov prostor, onda je zatvorena jedinična lopta iz X^* kompaktna u slaboj-* toplogiji prostora X^*.*

Korolar 1.6.5. *Ako je X refleksivan, zatvorena jedinična lopta iz X je slabo kompaktna.*

Sljedeća propozicija se može pronaći u [11] (Stav 8.20). Koristimo ju za dokazivanje bitne teoreme o kompaktnim operatorima.

Propozicija 1.6.6. *Svaki slabo konvergentan niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je ograničen u normi prostora X.*

Dokaz. Definišimo $\hat{x_n} \in X^{**}$ sa $\hat{x_n}(f) = f(x_n), f \in X^*$. Fiksirajući $f \in X^*$, dobijamo da je $\{f(x_n)\}$ (strogo) konvergentan niz pa je ograničen tj. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f(x_n)| < \infty$. Na osnovu teoreme o uniformnoj ograničenosti, imamo da ako je $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\hat{x_n}(f)| < \infty$, onda je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{x_n}\|_{X^{**}} < \infty$. Sada na osnovu Han-Banachove teoreme važi

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{x_n}\|_{X^{**}} < +\infty.$$

Dakle, norme $\|x_n\|_X$ su ograničene. $\square$

Kompaktni operatori slikaju slabo konvergentne nizove u nizove konvergentne u normi odgovarajućeg prostora. Takođe, ako operator slika slabo konvergentan niz u niz konvergentan u normi, u slučaju refleksivnog prostora X, taj operator je kompaktan. Ova karakterizacija kompaktnih operatora je poznat rezultat koji se može pronaći u [41] ili [120]. Budući da se ovaj rezultat koristi u glavi 6, navodimo ga i dokazujemo u okviru sljedeće teoreme.

Teorema 1.6.7. *Ako je linearan operator $A : X \to Y$ kompaktan, onda za svaki niz x_n koji slabo konvergira ka x, niz Ax_n konvergira ka Ax u normi prostora Y. Ako je prostor X refleksivan, onda važi i obrnuto tvrđenje tj. važi sljedeće: Ako za svaki niz x_n koji slabo konvergira ka x, niz Ax_n konvergira ka Ax u normi prostora Y, onda je operator A kompaktan.*

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da ako je operator A kompaktan, onda za svaki niz x_n koji slabo konvergira ka x, niz Ax_n konvergira ka Ax u normi prostora Y. Pretpostavimo da $x_n \rightharpoonup x$, što znači da $f(x_n) \to f(x)$ za svako $f \in X^*$. Dokaz ćemo podijeliti u nekoliko koraka.

- Na osnovu Propozicije 1.6.6, niz x_n je ograničen u normi prostora X tj. postoji $C \in \mathbb{R}$ t.d. $\|x_n\|_X \leq C$ za sve $n = 1, 2, 3, ...$

- Neka je $y_n = Ax_n$ i $y = Ax$. Onda:

  $$l(y_n) - l(y) = lA(x_n - x) = A^* l(x_n - x) \text{ za svako } l \in Y^*,$$

  što znači da y_n slabo konvergira ka y u Y.

- Pretpostavimo da y_n ne konvergira ka y u normi prostora Y. Onda postoji $\epsilon > 0$ i podniz (y_{n_k}) $(y_{n_k} = Ax_{n_k})$ od (y_n) takav da $\|y_{n_k} - y\|_Y \geq \epsilon$. Pošto je niz (x_{n_k}) ograničen i operator A kompaktan, onda na osnovu Teoreme 1.6.1, (y_{n_k}) ima podniz koji konvergira ka $\tilde{y} \neq y$ pa ovaj podniz mora takođe slabo konvergirati ka $\tilde{y}$. Ovo je nemoguće jer y_n slabo konvergira ka y.

Ostaje da dokažemo drugi smjer teoreme, uz pretpostavku da je prostor X refleksivan. Dakle, pretpostavimo da za svaki niz x_n koji slabo konvergira ka x, niz Ax_n konvergira ka Ax u normi prostora Y. Dokažimo da je operator A kompaktan. Pretpostavimo da A nije kompaktan. Tada na osnovu Teoreme 1.6.1 postoji niz φ_n iz zatvorene jedinične lopte prostora X takav da ne postoji konvergentan podniz od $A\varphi_n$. Na osnovu Korolara 1.6.5, $\overline{\mathbb{B}}$ je kompaktan skup u slaboj topologiji pa postoji slabo konvergentan podniz φ_{n_k}. Dakle, imamo niz $x_k = \varphi_{n_k}$ koji je slabo konvergentan ali njegova slika u odnosu na A tj. Ax_k nema podniz konvergentan u normi prostora Y, pa zapravo ne konvergira u normi prostora Y, što je kontradikcija sa pretpostavkom. □

1.7 Karlesonove mjere

Neka je X topološki vektorski prostor funkcija definisanih na domenu Ω. Problem karakterizirizacije mjera μ na Ω takih da se X neprekidno utapa u $L^p(\mu)$ je klasičan problem. Takve mjere se nazivaju Karlesonove mjere za prostor X, karakterizacija uvijek uključuje geometrijski uslov na μ. Karlesonove mjere su jedan od bitnih aspekata u proučavanju prostora holomorfnih i harmonijskih funkcija. Karleson [2] je prvi proučavao ovaj problem u slučaju jediničnog diska $\mathbb{U}$ kompleksne ravni i to za Hardijev prostor holomorfnih funkcija $H^p(\mathbb{U})$ (vidjeti [27, 28]). U [27], Karleson se bavio interpolacionim problemom. Naime, proučavao je pod kojim uslovima je moguća interpolacija $f(z_i) = w_i,\ i = 1, 2, ...$ za dati niz tačaka $\{z_i\}$, $|z_i| < 1$ i analitičku funkciju $f(z),\ f : \mathbb{U} \to \overline{\mathbb{U}}$. Nevanlinna je još 1919. u [108] dao potreban i dovoljan uslov da ova interpolacija bude moguća, ali je njegov rezultat veoma implicitan, u smislu da u konkretnoj situaciji daje veoma malo pomoći da li je interpolacija moguća ili ne. Karleson je dao jednostavan i eksplicitan uslov na niz z_i pod kojim je moguća interpolacija ograničenom funkcijom $f(z)$. Ako je $\{w_i\}$ proizvoljan ograničen niz, uslov je i potreban. Navešćemo formulaciju njegovog glavnog rezultata iz [27].

Teorema 1.7.1 ([27])**.** *Neka je $\{z_i\}$ niz kompleksnih brojeva, $0 < |z_i| < 1$. Onda interpolacijski problem $f(z_i) = w_i$, $f(z) \in H(\mathbb{U})$ ograničena, je rješiv za proizvoljan ograničen niz $\{w_i\}$ ako i samo ako*

$$\prod_{j\neq i}\left|\frac{z_i - z_j}{1 - z_i\overline{z_j}}\right| \geq \delta > 0,\ \ i = 1, 2, ..$$

Niz $\{z_i\}$ koji dozvoljava H^∞ interpolaciju za svaki ograničen niz $\{w_i\}$ se naziva univerzalni interpolacijski niz. Za niz $\{z_i\}$ posmatrajmo linearan operator T koji svakoj funkciji $f \in H^\infty$ dodjeljuje niz $f(z_i)$. Slika operatora T je jasno skup svih nizova za koje je interpolacija moguća. U terminologiji operatora T, univerzalni interpolacijski niz $\{z_i\}$ je niz za koji je $T(H^\infty) = l^\infty$. Za niz $\{z_i\}$ se kaže da je uniformno separabilan (razdvojen) ako postoji $\delta > 0$ takvo da je $\prod_{j\neq i}|\frac{z_i - z_j}{1 - z_i\overline{z_j}}| \geq \delta,\ i = 1, 2, ...$ (vidjeti [43]). Koristeći ovu definiciju, možemo preformulisati Teoremu 1.7.1. Ona zapravo govori da je niz $\{z_i\}$ univerzalni interpolacijski niz ako i samo ako je uniformno separabilan. Operator T se može definisati i za fiksirano $0 < p \leq \infty$ i niz $\{z_i\}$ na isti način kao što je gore definisano za $p = \infty$. Rezultat iz [27] se može proširiti na proizvoljan H^p prostor. U tu svrhu, pogodno je posmatrati vrstu težinske interpolacije. Naime, za niz $\{z_i\}$, neka je operator T_p definisan na H^p, $0 < p \leq \infty$ sa

$$T_p(f) = \{(1 - |z_i|^2)^{\frac{1}{p}} f(z_i)\}.$$

Sada ćemo formulisati opštiju interpolacijsku teoremu koja je dokazana u [43].

[2] Lennart Carleson, 1928.-, Švedski matematičar koji je dao fundamentalan doprinos harmonijskoj analizi. Dokazao je skoro-svuda konvergenciju Furijeovih redova funkcija iz L^2 i riješio "korona" problem. Dobitnik Abelove nagrade 2006. godine i mnogih drugih.

Teorema 1.7.2 ([43]). *Za $0 < p \leq \infty$, $T_p(H^p) = l^p$ ako i samo ako je $\{z_i\}$ uniformno razdvojen.*

Dio dokaza interpolacijske teoreme se sastojao u pokazivanju da ako je $\{z_i\}$ uniformno razdvojen i $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$, onda

$$\{\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)|f(z_n)|^p\}^{\frac{1}{p}} \leq C\|f\|_{H_p}.$$

Drugim riječima, ako je μ diskretna mjera na $\mathbb{U}$ definisana sa

$$\mu(z_n) = 1 - |z_n|,\ n = 1, 2, ...$$

onda

$$\int_{\mathbb{U}} |f(z)|^p d\mu(z) < \infty$$

za svako $f \in H^p$, i injektivno preslikavanje iz H^p u $L^p(\mu)$ je ograničeno. Prirodno je pitanje koje druge mjere imaju ovu osobinu. Trivijalan primjer je Lebegova mjera. U [28], Karleson je proučavao sljedeći problem:
Neka je $\mu(z)$ nenegativna mjera na $\mathbb{U}$. Pod kojim uslovima na mjeru μ, postoji konstanta C tako da za $p \geq 1$, $\|f\|_{L^p(\mu)} \leq C\|f\|_{H^p}$? Drugim riječima, pod kojim uslovima na mjeru μ se Hardijev prostor $H^p(\mathbb{U})$ utapa u Lebegov prostor $L^p(\mu)$. Ovaj problem je zapravo riješen u [27] za određeni tip mjere - diskretnu mjeru i Karleson je u [28] pokazao da se i ovaj opštiji slučaj može redukovati na spomenuti specijalan slučaj. Glavni rezultat u [28] je sljedeća teorema:

Teorema 1.7.3 ([28]). *Neka je $\mu(z)$ nenegativna mjera na $\mathbb{U}$ i pretpostavimo da*

$$\mu(S) \leq Cl \tag{1.10}$$

važi za sve skupove S oblika $S = \{re^{i\theta} : r \geq 1-l, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + l\}$. Onda postoji konstanta A takva da

$$\int_{\mathbb{U}} |f(z)|^p d\mu \leq AC\|f\|^p_{H^p} \tag{1.11}$$

za svako $f \in H^p(\mathbb{U})$, $p \geq 1$. Obrnuto, ako nejednakost (1.11) *važi za određenu konstantu, mjera μ zadovoljava uslov* (1.10) *sa konstantom C nezavisnom od S.*

Za svaki luk $I \subset \partial\mathbb{U}$ Karlesonov kvadrat nad I je skup

$$S(I) := \{z : 1 - |I| < |z| < 1, \frac{z}{|z|} \in I\},$$

gdje je $|I|$ normalizovana dužina luka (tako da je $|\partial\mathbb{U}| = 1$). Geometrijski uslov (1.10) sada može da se zapiše :

$$\mu(S(I)) \le C|I|. \tag{1.12}$$

Teorema Karlesona važi i za $0 < p < 1$. Prije nego ju formulišemo, definišimo mjeru Karlesona:

Definicija 1.7.1. Konačna mjera μ na $\mathbb{U}$ je mjera Karlesona ako postoji konstanta C takva da je $\mu(S) \le Cl$ za svaki skup S oblika $S = \{re^{i\theta} : 1-l \le r < 1, \theta_0 \le \theta \le \theta_0 + l\}$.

Sada ćemo formulisati uopštenje Teoreme 1.7.3 koje je dokazano u [42].

Teorema 1.7.4 ([42])**.** *Neka je μ konačna mjera na jediničnom disku $\mathbb{U}$, i pretpostavimo $0 < p < \infty$. Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni*

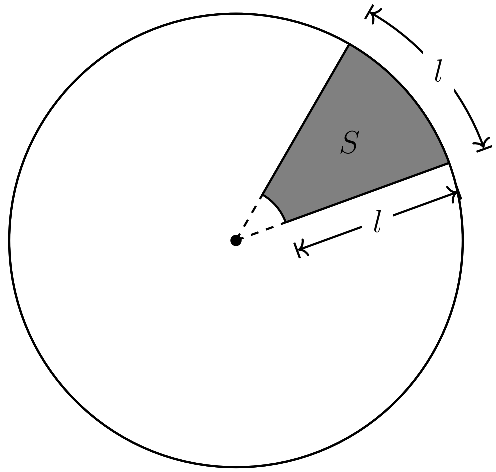
- *μ je mjera Karlesona.*
- *Postoji konstanta C takva da*

$$\{\int_{\mathbb{U}} |f(z)|^p d\mu(z)\}^{\frac{1}{p}} \le C\|f\|_{H^p} \text{ za svaku funkciju } f \in H^p.$$

Ovom teoremom je kompletiran odgovor na pitanje koje se nameće nakon Teoreme 1.7.2. Karlesonove mjere za analitičke Hardijeve prostore na strogo pseudokonveksnim domenima u $\mathbb{C}^n$ i za harmonijske Hardijeve prostore na otvorenom skupu Ω sa C^2 granicom je proučavao Hörmander 1967. u [62]. Naime, dokazao je teoremu utapanja Karlesonovog tipa za ove prostore. Power je 1985. u [117] dao drugačiji dokaz teoreme utapanja Karlesonovog tipa za analitički Hardijev prostor na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^2$, što je zapravo specijalan slučaj Hörmanderovog rezultata iz 1967. Lefèvre i Rodríguez-Piazza su u [86] 2018. godine proučavali utapanja Karlesonovog tipa klasičnih Hardijevih prostora (na disku) u prostore $L^p(\mu)$, gdje je μ Karlesonova mjera na jediničnom disku. Ovo uključuje slučaj operatora kompozicije. Oni su opisali operatore kompozicije koji su r-sumabilni na H^p, gdje je $p > 1$ i $r \ge 1$. Dakle, jedan od motiva za razmatranje utapanja Karlesonovog tipa je i to što nam to omogućava da tretiramo slučaj operatora kompozicije na H^p. Naime, neka je

$$J_\mu : H^p(\mathbb{U}) \hookrightarrow L^p(\mu)$$

operator utapanja (Karlesonovog tipa). Neka je $C_\varphi : H^p \to H^p$ operator kompozicije, zadan sa $C_\varphi f = f \circ \varphi$, gdje je simbol $\phi : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ ograničena analitička funkcija. Mnoge



Slika 1.1: Karlesonov boks

osobine operatora C_φ se mogu izraziti preko Karlesonovih mjera zahvaljujući transfer formuli. Naime, mjera povlačenja pridružena funkciji φ igra ključnu ulogu

$$\lambda_\varphi(E) = m\{\zeta \in \mathbb{T} : \varphi^*(\zeta) \in E\},$$

gdje je $E \subset \overline{\mathbb{U}}$ Borelov skup i $\varphi^*(\zeta) = \lim_{r\to 1-} \varphi(r\zeta)$ (postoji za skoro svako $\zeta \in \mathbb{T}$ jer je $\varphi \in H^\infty$). Transfer formula daje

$$\|f \circ \varphi\|_{H^p} = \|f\|_{L^p(\overline{\mathbb{U}},\lambda_\varphi)},$$

za svako $f \in H^p$. Dakle, mnoge osobine operatora C_φ su zajedničke sa osobinama operatora J_{λ_φ}, npr. kompaktnost i r-sumabilnost. Ograničenost i kompaktnost težinskog operatora kompozicije (vidjeti poglavlja 1.5 i 1.6 o ograničenim i kompaktnim operatorima) iz prostora sa mješovitom normom u prostor Blochovog tipa na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$ su razmatrali Liang i Chen u [87]. Prostor sa mješovitom normom koji su oni razmatrali je definisan za $0 < p, q \leq \infty$ i težinu ρ koja predstavlja normalnu funkciju, tj. pozitivnu neprekidnu funkciju ρ na $[0, 1)$ za koju postoje tri konstante $0 \leq \delta < 1$, $0 < a < b < \infty$ takve da za $r \in [\delta, 1)$

$$\frac{\rho(r)}{(1-r)^a} \downarrow 0 \text{ i } \frac{\rho(r)}{(1-r)^b} \uparrow \infty,$$

kada $r \to 1$. Prostor svih holomorfnih funkcija za koje je

$$\|f\|_{L^{p,q}_\rho} = \int_0^1 r^{2n-1}(1-r)^{-1} M_p^q(f, r)\rho(r)^q dr < \infty,$$

za $q < \infty$ i

$$\|f\|_{L^{p,q}_\rho} = \sup_{0\le r<1} \rho(r)M_p(f,r) < \infty,$$

za $q = \infty$, je posmatrani prostor holomorfnih funkcija sa mješovitom normom. Drugi prostor koji Liang i Chen razmatraju je prostor Blochovog tipa $\mathcal{B}_\rho$, prostor holomorfnih funkcija na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$ za koje je

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\rho} = \sup_{z\in\mathbb{B}} \rho(z)|\nabla f(z)| < +\infty,$$

gdje je ∇f gradijent od f. Opštiji operatori od gore navedenih operatora kompozicije a koji predstavljaju i uopštenje operatora množenja su razmatrani u [63], i to na (težinskim) Bergmanovim analitičkim prostorima na gornjoj poluravni. Za holomorfnu funkciju f na gornjoj poluravni $\mathbb{R}^2_+$ razmatra se operator

$$W_{u,\varphi}(f(z)) = u(z)\cdot f\circ\varphi(z),$$

gdje je $u \in H(\mathbb{R}^2_+)$ i $\varphi : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ holomorfno preslikavanje. Jasno je da se za $u(z) \equiv 1$ dobija operator kompozicije a za $\varphi(z) = z$ operator množenja. U ovom radu su dobijene "sparse" procjene ovih operatora i okarakterisana je kompaktnost ovih operatora koristeći spomenute procjene. Kod ovih operatora nedostaje nam integralna struktura pa se njihovo proučavanje razlikuje od proučavanja procjena maksimalnih operatora Hardy-Littlewooda, Calderón-Zygumundovih operatora, Haarovih operatora pomaka ili drugih operatora koji se proučavaju u harmonijskoj analizi. Ovaj problem se prevazilazi primjenom integralnih reprezentacija Bergmanove klase funkcija i uvođenjem odgovarajućih pozitivnih "sparse" formi koje su prilagođene Karlesonovoj mjeri indukovanoj težinskim operatorima kompozicije.

Konačna pozitivna Borelova mjera μ je Karlesonova mjera za Bergmanov prostor $B^p_\alpha(\Omega) = L^p(\Omega, dm_\alpha) \cap H(\Omega)$ (ili $b^p_\alpha(\Omega)$), $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ glatka ograničena oblast u $\mathbb{C}^n$ (ili $\mathbb{R}^n$), ako je utapanje $B^p_\alpha(\Omega)$(ili $b^p_\alpha(\Omega)$) $\hookrightarrow L^p(\Omega,\mu)$ neprekidno. Mnogi autori su proučavali slučaj prostora analitičkih funkcija jedne ili više kompleksnih promjenljivih. Karlesonove mjere za (težinske) Bergmanove prostore su proučavane od strane nekoliko autora uključujući Stegenga [131], Hastings [60], Oleinik i Pavlov [110], Oleinik [109] i Luecking [97] za jedinični disk $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$; Cima i Wogen [33], Duren i Weir [45], Zhu [149] i Kaptanoglu [75] i [76] za jediničnu loptu u $\mathbb{C}^n$; Zhu [148] za ograničene simetrične domene; Cima i Mercer [32], Abate i Saracco [5], Abate, Raissy i Saracco [4], Hu, Lv i Zhu [67] i Abate i Raissy [3] za strogo pseudokonveksne oblasti. Karlesonove mjere za uopštene Bergmanove prostore $B^2_\alpha(\mathbb{B})$, kada je $\alpha \in \mathbb{R}$, opisane su u [139]. Uopšteni Bergmanov prostor $B^2_\alpha(\mathbb{B})$, čine analitičke funkcije na jediničnoj lopti takve da za neki $m \in \mathbb{Z}$ važi $\int_{\mathbb{B}} |(I+K)^m f(z)|^2(1-|z|^2)^{2m+\alpha} dm(z) < +\infty$, gdje je

$(I+K)^m f(z) = \sum(1+k)^m f_k(z)$ ako je $f = \sum f_k$ homogeni razvoj od f. Teorema utapanja Karlesonovog tipa za Bergmanove prostore cijelih (analitičkih na $\mathbb{C}$) funkcija sa težinama eksponencijalnog tipa dokazana je u [111]. Naime posmatrani su prostori $L^2_\varphi(d\mu)$ mjerljivih funkcija f za koje je $\left(\int |f|^2 e^{-\varphi} d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$, gdje je φ subharmonijska funkcija na kompleksnoj ravni $\mathbb{C}$; opisana je mjera μ za koju je utapanje $B^2_\varphi \hookrightarrow L^2_\varphi(d\mu)$, gdje je B^2_φ Bergmanov prostor cijelih funkcija (potprostor od L^2_φ), neprekidno. U [146], fokus istraživanja su težinski Bergmanovi prostori na jediničnom disku, sa težinama eksponencijalnog tipa. Zhang, Wang i Hu su u ovom radu iz 2022. godine okarakterisali konačne pozitivne Borelove mjere μ na jediničnom disku, takve da je utapanje $B^p_\varphi \hookrightarrow L^q_\mu$ ograničeno ili kompaktno za $0 < p, q < +\infty$. Geometrijska karakterizacija Karlesonovih mjera za Bergmanove prostore u slučaju ograničenih strogo pseudokonveksnih oblasti u $\mathbb{C}^n$ sa C^∞ granicom je data i u [1], u kontekstu primjene Kobajašijeve metrike, obzirom da su pseudokonveksne oblasti važna klasa oblasti gdje se proučava Kobajašijeva udaljenost. O pseudokonveksnim oblastima u $\mathbb{C}^n$ se može pronaći u [83], glava 3. 2010. godine u [35] je dokazana teorema utapanja Karlesonovog tipa za težinske Bergmanove prostore sa Békolléjevim težinama na jedničnom disku u $\mathbb{C}$ - B^p_ω (ω- nenegativna integrabilna funkcija na $\mathbb{U}$). Ovdje se radi o tzv. "iskrivljenim" Karlesonovim mjerama, naime o utapanju

$$\int_{\mathbb{U}} |f^{(n)}|^q d\mu \le k \|f\|_{B^p_\omega}, \; f \in B^p_\omega, \; 0 < p < q < \infty, \; n - \text{fiksirano},$$

ω je Békolléjeva težina. Okarakterisane su pozitivne mjere μ na $\mathbb{U}$ za koje važi gornja nejednakost i taj rezultat je primjenjen na proučavanje osobina Teplicovog operatora (vidjeti 1.11) i operatora kompozicije koji djeluju na ovakve prostore. Slučaj kada je $\omega = (1-|z|^2)^\alpha, \; \alpha > -1$ standardna težina i $0 < p \le q < \infty$ je razmatran u nekim od gore navedenih radova [60, 110, 131]. U [113], 2015. godine su date nove karakterizacije za Bergman-Karlesonove mjere i iščezavajuće Bergman-Karlesonove mjere na jediničnoj lopti korišćenjem proizvoda funkcija u težinskim Bergmanovim prostorima. Takođe su opisani ograničeni i kompaktni Teplicovi operatori između težinskih Bergmanovih prostora. Ovi rezultati su primjenjeni na proučavanje ograničenosti i kompaktnosti proširenih Cesàrovih operatora i t.p.t. množilaca iz težinskih Bergmanovih prostora u opštiju klasu prostora funkcija.

Takođe, pomenimo i novije rezultate za težinske Bergmanove prostore sa Békolléjevim težinama na jediničnoj lopti iz [141], za prostore indukovane dvostranim duplim težinama iz [81] i za prostore sa mješovitom normom na homogenim Zigelovim domenima iz [25]. Karlesonove mjere za Blochove prostore analitičkih funkcija na jediničnom disku proučavali su Girela, Peláez, Pérez-González i Rättyä, 2008. u [57]. Naime, oni su proučavali pozitivne Borelove mjere μ na jediničnom disku $\mathbb{U}$ u $\mathbb{C}$ za koje je Blochov prostor (prostor holomorfnih funkcija na jediničnom disku za koje je $\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|^2)|f'(z)| < +\infty$) neprekidno utopljen u $L^p(d\mu)$, $0 < p < \infty$. Karlesonove mjere za težinske prostore sa mješovitom normom sa radijalnom težinom na jediničnom disku su opisane i to koristeći atomarnu dekompoziciju u [130], 2018. godine. Napomenimo da je radijalna težina $\omega(z) = \omega(|z|)$ takva da $\int_r^1 \omega(s)ds \le C\int_{\frac{1+r}{2}}^1 \omega(s)ds$. Standardne težine $(1-|z|)^\alpha$, $\alpha > -1$ su radijalne težine.

Slučaj kada se X sastoji od harmonijskih funkcija je takođe proučavan, međutim u manjoj mjeri od slučaja analitičkih funkcija. Naprimjer, teorema utapanja Karlesonovog tipa za težinske Bergmanove prostore harmonijskih funkcija na $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ (Ω ograničena oblast sa glatkom granicom) se može pronaći u [73]. Ovdje ćemo navesti dio glavnog rezultata tog rada, obzirom da ćemo ga koristiti u posljednjoj glavi disertacije.

Propozicija 1.7.5 ([73]). *Neka Borelova mjera μ na Ω zadovoljava*

$$\frac{\mu(E_\delta(x))}{m(E_\delta(x))^{1+\frac{\gamma}{n}}} \le C,$$

za fiksirano $\delta > 0$. Onda za svako $p > 0$ imamo utapanje $b^p_\gamma(\Omega) \hookrightarrow L^p(\mu)$.

Ova propozicija je dokazana u [73] sa Karlesonovim boksovima $\Delta_k(x)$ umjesto $E_\delta(x)$, ali jednostavan argument o pokrivanju pokazuje da je ovo validno za $E_\delta(x)$ umjesto $\Delta_k(x)$. Koristićemo samo slučaj $p = 1$, u glavi 6.

Rezultate za težinske prostore sa mješovitom normom na $\mathbb{R}^{n+1}_+$ su dobili Arsenović i Shamoyan u [13]. Odnos između Karlesonovih mjera za Hardijeve prostore i Karlesonovih mjera za Bergmanove prostore se može pronaći u [8]. Naime, ovaj odnos je dobijen kao primjena tzv. principa poređenja koji grubo govoreći glasi : Ako važi neka osobina za Hardijeve prostore na nekoj vrsti domena u $\mathbb{C}^n$ onda ona važi i za Bergmanove prostore na istoj vrsti domena u $\mathbb{C}^{n-1}$.

Definicija 1.7.2. Pozitivna Borelova mjera μ na $\mathbb{U}$ se zove "nestajuća" (iščezavajuća) Karlesonova mjera ako

$$\lim_{l\to 0}\frac{\mu(S)}{l} = 0$$

uniformno za $0 \le \theta_0 < 2\pi$, gdje je S skup iz Teoreme 1.7.3.

Kada X i $L^p(\mu)$ zamijene uloge tj. kada imamo utapanje $L^p(\mu) \hookrightarrow X$, dobijamo obrnutu mjeru Karlesona za prostor X. Ova vrsta mjere je suštinski uvedena kroz seriju članaka Lueckinga [92, 93, 94, 95] za težinske Bergmanove prostore na jediničnom disku ili opštije domene, i kasnije je uopštena u različitim kontekstima od strane nekoliko autora. Mjera se zove "sampling" mjera ako je i mjera Karlesona i obrnuta mjera

Karlesona. Ovdje ćemo spomenuti rad [93] koji razmatra slučaj Bergmanovog prostora harmonijskih funkcija. Dati su potrebni i dovoljni uslovi za mjerljiv skup G u jediničnoj lopti iz $\mathbb{R}^n$ da zadovolji sljedeću osobinu: postoji konstanta $C > 0$ takva da

$$\int_{\mathbb{B}} |f|^2 dm \leq C \int_G |f|^2 dm, \tag{1.13}$$

za svako $f \in L^2(\mathbb{B})$ koja je harmonijska na jediničnoj lopti.

Isti uslov je dovoljan ako bilo koji eksponent $p > 0$ zamijeni 2 u (1.13), i ako određene težinske mjere zamijene m (n-dimenzionalnu Lebegovu mjeru). U ovom radu je naznačena i primjena na problem predstavljanja harmonijskih funkcija iz L^2 kao suma funkcija jezgara.

O iščezavajućim Karlesonovim mjerama se može pronaći u [150], u poglavlju 7.2. Ovdje ćemo navesti teoremu kojom su opisane ove mjere za težinski Bergmanov prostor analitičkih funkcija $B^p_\gamma(\mathbb{U})$.

Teorema 1.7.6 ([150])**.** *Pretpostavimo da je μ konačna pozitivna Borelova mjera na $\mathbb{U}$, $r > 0$, $p > 0$. Onda je μ iščezavajuća Karlesonova mjera za prostor $B^p_\gamma(\mathbb{U})$ ako i samo ako je*

$$\lim_{|a| \to 1^-} \frac{\mu(D(a,r))}{(1-|a|^2)^{2+\gamma}} = 0.$$

Teorema ovog tipa za harmonijske prostore sa mješovitom normom će biti dokazana u poglavlju 3.2. Veza između Karlesonovih nestajućih mjera za Lebegove prostore na jediničnom disku i kompaktnih operatora na Banahovim prostorima je uspostavljena u [118], 1980; kasnije, 2013. godine, dokazano je proširenje ovog klasičnog rezultata u [34]. Luecking je 2000. godine u [98] dao karakterizaciju "sampling" mjera za težinske Bergmanove prostore na jediničnom disku. Naime, on je posmatrao pozitivne mjere μ na jediničnom disku $\mathbb{U}$ za koje postoji konstanta C takva da važi

$$\frac{1}{C} \int |f|^p dm \leq \int |f|^p (1-|z|^2)^2 d\mu \leq C \int |f|^p dm, \; f \in B^p(\mathbb{U}),$$

a koje se nazivaju sampling mjere za Bergmanov prostor (analitičkih funkcija) na jediničnom disku. Jasno je da je mjera μ (mjera $(1-|z|^2)^2 d\mu$) koja zadovoljava samo prvu nejednakost obrnuta Karlesonova mjera. Takođe je jasno da je druga nejednakost zapravo uslov da je $(1-|z|^2)^2 d\mu$ Karlesonova mjera za B^p. Iako se mjera $(1-|z|^2)^2 d\mu$ ponekad naziva sampling mjera, pogodno je da se normalizuje sa faktorom $(1-|z|^2)^2$.

U [25] razmatran je problem dobijanja potrebnog i dovoljnog uslova na mjeru da bi bila mjera Karlesona, nestajuća mjera Karlesona ili obrnuta mjera Karlesona za težinske prostore sa mješovitom normom holomorfnih funkcija na homogenim Zigelovim domenima tipa II. Iščezavajuća mjera Karlesona povezana sa uopštenim analitičkim prostorom funkcija koji uključuje Bergmanov prostor na jediničnom disku kompleksne ravni je proučavana u [114]. Nekoliko rezultata o mjerama Karlesona i nestajućim mjerama Karlesona za težinske Bergmanove prostore u slučaju jako pseudokonveksnih oblasti je dobijeno u [67]. U [128], su okarakterisane mjere Karlesonovog tipa i nestajuće Karlesonove mjere na Bergmanovim prostorima na jediničnom disku sa dopustivim težinama preko Berezinove transformacije i funkcije usrednjenja (vidjeti poglavlje 1.11 za pojam funkcije usrednjenja). Maccluer i Zhao su u [99] okarakterisali iščezavajuće mjere tipa Karlesona definisane sa dodatnim logaritamskim članovima i to koristeći funkcije iz BMOA i Blochov prostor. Rezultati su primjenjeni na operatore Cesàrovog tipa na BMOA i Blochovim prostorima. Kada se uobičajeni geometrijski uslov (1.12) iz definicije mjera Karlesona zamijeni sa

$$\mu(S(I)) \leq \frac{C|I|^s}{(\log \frac{2}{|I|})^t},$$

gdje je $0 < s < \infty$ i $0 \leq p < \infty$, mjera μ se naziva t logaritamska s mjera Karlesona. Svi gore navedeni rezultati o nestajućim mjerama Karlesona se odnose na analitičke prostore funkcija, međutim, nas zanima prostor harmonijskih funkcija. Analogni rezultati za beztežinski slučaj prostora harmonijskih funkcija sa mješovitom normom, specijalno prostora $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ kada je $\alpha = \frac{1}{q}$, su dobijeni u [65].

Mjere Karlesona se pojavljuju u različitim kontekstima teorije prostora funkcija. Jedan od njih je problem množilaca. Naime, za dati prostor funkcija X na skupu Ω, opisati sve funkcije f takve da je operator množenja sa f neprekidan operator iz prostora X u prostor X. Dakle, ako sa $M(X)$ označimo skup svih množilaca iz X u X, tj. skup svih funkcija f takvih da $fg \in X$ za svaku funkciju $g \in X$, od interesa je okarakterisati skup $M(X)$. Takođe, može da se posmatra i skup $M(X, Y)$, skup množilaca iz skupa X u skup Y. Postoji mnogo radova vezanih za ovaj problem. Problem karakterizacije prostora množilaca između različitih prostora analitičkih funkcija je klasični problem u kompleksnoj teoriji funkcija. Postoji mnogo literature na ovu temu, npr. množioci između Hardijevih prostora, tj. slučaj kada je $X = H^p$, $Y = H^q$, $p < \min(q, 1)$, su okarakterisani u [102]. Takođe, jedan od rezultata koji je Mateljević 1990. dobio u ovom radu je i da je prostor množilaca $M(H^1, BMOA)$ prostor Blochovih funkcija kojeg čine analitičke funkcije f na disku $\mathbb{U}$, za koje je $\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|)|f'(z)| < +\infty$. Množioce između prostora analitičkih funkcija sa mješovitom normom, kada je $X = A^{p,q}_{\alpha}, Y = A^{s,t}_{\beta}$, je proučavao Blasco 1995. u [22]. U [126] su prošireni rezultati iz [22], kao i još neki raniji rezultati o prostorima množilaca; specijalno radi se o prostorima množilaca u analitičkim Lizorkin-Triebelovim prostorima na jediničnom polidisku $F^{p,q}_{\alpha}(\mathbb{U}^n)$ i prostorima množilaca iz ovih prostora u određene dobro proučavane prostore funkcija kao što su prostori funkcija sa mješovitom normom, Bergmanovi prostori i Hardijevi prostori. Karakterizacija mjera Karlesona za analitičke Besove prostore B^p na jediničnoj lopti iz $\mathbb{C}^n$ je data u [7], gdje su opisani i (t.p.t.) množioci na B^p preko mjera Karlesona. Zatim su ovi rezultati primjenjeni da se opišu interpolacioni nizovi u lopti za Besove prostore i njihove prostore množilaca MB^p. U [144] su 2005. diskutovani t.p.t. množioci prostora sa mješovitom normom na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$ i time su uopšteni neki prethodni razultati o množiocima (npr. [131]). Za normalne funkcije φ_1 i φ_2, dato je nekoliko potpunih karakterizacija t.p.t. množilaca $M(H(p,q,\varphi_1), H(p,q,\varphi_2))$ za $0 < p \leq \infty,\ 0 < q \leq \infty$ i $M(H(p,p,\varphi_1), H(q,q,\varphi_2))$ za $0 < p < \infty,\ 0 < q < \infty$. Arsenović i Shamoyan su 2013. godine predstavili nekoliko novih oštrih tvrđenja o množiocima u prostorima sa mješovitom normom, težinskim Hardijevim i Lizorkin-Triebelovim prostorima harmonijskih funkcija u višoj dimenziji [14]. U [14] je dokazana i određena inkluzija između Lizorkin-Triebelovih prostora i prostora sa mješovitom normom na otvorenoj jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^n$. Za nenegativnu Borelovu mjeru μ na jediničnom disku kompleksne ravni su u [114], 2014. godine, dobijeni potrebni uslovi da se uopšteni prostori analitičkih funkcija $F(p,q,s)$ neprekidno ili kompaktno utapaju u prostore tent-tipa $T^{\infty}_{p,s}(\mu)$. Prostori $F(p,q,s)$ su uopštenja mnogih klasičnih prostora funkcija, uključujući težinske Bergmanove prostore, Dirichletove prostore, Blochove prostore i BMOA prostore. Ovi rezultati su primjenjeni da se opiše ograničenost operatora množenja (i drugih operatora) na $F(p,q,s)$.

Kroz cijelu disertaciju, koristićemo C za označavanje pozitivne konstante koja se može mijenjati od jednog pojavljivanja do drugog. Za dvije date pozitivne veličine A i B, pišemo $A \asymp B$ ako postoje konstante $0 < c \leq C$ takve da $cA \leq B \leq CA$.

1.8 Bergmanovo jezgro i Bergmanove projekcije

Za $\gamma > -1$, neka je $b^p_\gamma(\Omega) = h(\Omega) \cap L^p(\Omega, dm_\gamma)$ Bergmanov prostor harmonijskih funkcija na Ω, gdje je $dm_\gamma(x) = r(x)^\gamma dm(x),\ r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Za fiksirano $x \in \Omega$, računanje vrijednosti funkcije u tački x, $\Lambda_x(f) = f(x)$ predstavlja neprekidan linearan funkcional na $b^p_\gamma(\Omega)$ (vidjeti npr. glavu 8 iz [19] ili [39]). Bergmanov prostor $b^p_\gamma(\Omega)$ je zatvoren potprostor od $L^p(\Omega, dm_\gamma)$. Na osnovu ove činjenice, za $p = 2$, imamo da je $b^2_\gamma(\Omega)$ Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $\langle f, g\rangle_\gamma = \int_\Omega f g dm_\gamma$. Takođe, za svako $x \in \Omega$, $\Lambda_x(f) = f(x)$ predstavlja neprekidan linearan funkcional na Hilbertovom prostoru $b^2_\gamma(\Omega)$, pa nam Rieszova teorema o reprezentaciji neprekidnog linearnog funkcionala (vidjeti npr. 3. glavu iz [41]) garantuje postojanje jedinstvene funkcije $R_\gamma(x, \cdot) \in b^2_\gamma(\Omega)$ takve da je

$$f(x) = \int_{\Omega} \overline{R_\gamma(x,y)} f(y) dm_\gamma(y), \;\; x \in \Omega,$$

za svaku funkciju $f \in b^2_\gamma(\Omega)$. Funkcija R_γ, koja se može posmatrati kao funkcija na $\Omega \times \Omega$, se naziva reprodukujuće jezgro harmonijskog Bergmanovog prostora. Jezgro $R_\gamma(x,y)$ je realno vrijednosno i simetrično pa u gornjoj formuli možemo da izostavimo konjugaciju jezgra (vidjeti Propoziciju 8.4 iz [19] za slučaj beztežinskog jezgra). Dokažimo ove osobine (težinskog) jezgra. Neka je funkcija $u \in b^2_\gamma(\Omega)$ realno vrijednosna i $x \in \Omega$ tj. $\Im(u(x)) = 0$. To znači da imamo sljedeće:

$$0 = \Im\left(\int_{\Omega} \overline{R_\gamma(x,y)} u(y) dm_\gamma(y)\right) = -\int_{\Omega} \Im(R_\gamma(x,y)) u(y) dm_\gamma(y).$$

Sada uzmimo da je $u(y) = R_\gamma(x,y)$; dobijamo da je

$$\int_{\Omega} (\Im R_\gamma(x,y))^2 dm_\gamma(y) = 0,$$

pa je $\Im R_\gamma(x,y) \equiv 0$ tj. $R_\gamma(x,y)$ je realno-vrijednosno. Ovo znači da je $\overline{R_\gamma(x,y)} = R_\gamma(x,y)$, s druge strane, dokazaćemo da je $\overline{R_\gamma(x,y)} = R_\gamma(y,x)$, što će značiti da je $R_\gamma(x,y) = R_\gamma(y,x)$ tj. da je jezgro simetrično. Neka je (u_m) ortonormalna baza Bergmanovog prostora $b^2_\gamma(\Omega)$. Prisjetimo se da je prostor $b^2_\gamma(\Omega)$ separabilan jer je $L^2(\Omega, dm_\gamma)$ separabilan. Prema standardnoj teoriji Hilbertovih prostora, Bergmanovo jezgro $R_\gamma(x,y)$(posmatrano kao funkcija od y-a) se može predstaviti preko ovih baznih vektora na sljedeći način:

$$R_\gamma(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle R_\gamma(x,y), u_m(y) \rangle u_m(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{u_m(x)} u_m(y),$$

za svako $x \in \Omega$ za koje beskonačna suma konvergira u $b^2_\gamma(\Omega)$ normi. Gornja jednakost nam daje željeni zaključak $\overline{R_\gamma(x,y)} = R_\gamma(y,x)$.

Težinska Bergmanova projekcija P_γ je ortogonalna projekcija iz $L^2_\gamma(\Omega)$ na potprostor $b^2_\gamma(\Omega)$; data je sa sljedećom integralnom formulom

$$P_\gamma f(x) = \int_{\Omega} R_\gamma(x,y) f(y) dm_\gamma(y), \qquad x \in \Omega. \tag{1.14}$$

Eksplicitna formula za Bergmanovo jezgro je poznata za neke specijalne slučajeve domena.

U slučaju jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$, težinsko harmonijsko reprodukujuće jezgro se može predstaviti kao beskonačna linearna kombinacija zonalnih harmonika. Naime,

$$R_\gamma(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i^{\gamma+1} Z_i(x,y)$$

gdje je $A_i^{\gamma+1} = \frac{B(\frac{n}{2},\gamma+1)}{B(\frac{n}{2}+i,\gamma+1)}$, $\gamma > -1, i = 0,1,2...$ i $Z_i(x,y)$ su prošireni zonalni harmonici (vidjeti [39, 104]). Detaljno izvođenje eksplicitne reprezentacije Bergmanovog jezgra u slučaju jedinične lopte se može pronaći u [19]. Naime, Bergmanovo jezgro se može predstaviti preko frakcionog izvoda Puasonovog jezgra. Teorema 8.13 iz [19] daje eksplicitnu formulu za beztežinsko jezgro $R(x,y)$ za loptu; za $x, y \in \mathbb{B}$:

$$R(x,y) = \frac{(n-4)|x|^4|y|^4 + (8xy - 2n - 4)|x|^2|y|^2 + n}{nV(\mathbb{B})(1 - 2 \cdot xy + |x|^2|y|^2)^{1+n/2)}}.$$

Harmonijske funkcije na poluprostoru proučavali su Ramey i Yi 1996. u [119]. U slučaju gornjeg poluprostora $\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, eksplicitan izraz za reprodukujuće jezgro Bergmanove projekcije je

$$R(x,y) = \frac{4}{nV(\mathbb{B})} \frac{n(x_n + y_n)^2 - |x - \overline{y}|^2}{|x - \overline{y}|^{n+2}}$$

gdje je $V(\mathbb{B})$ zapremina jedinične lopte u $\mathbb{R}^n$. Ovaj izraz je dobijen kao frakcioni izvod proširenog Puasonovog jezgra a izvođenje ove reprezentacije reprodukujućeg jezgra se može pronaći i u [19]. Težinsko harmonijsko Bergmanovo jezgro na $\mathbb{H}$ se može, takođe, predstaviti preko frakcionih izvoda proširenog Puasonovog jezgra. Izvođenje eksplicitne formule za ovo jezgro se može pronaći u [80]. Prošireno Puasonovo jezgro $P(x,y)$ na gornjem poluprostoru je

$$P_x(y) := P(x,y) = \frac{2}{nV(\mathbb{B})} \frac{x_n + y_n}{|x - \overline{y}|^n}$$

gdje je $x \in \mathbb{H},\ y \in \overline{\mathbb{H}}, \overline{y} = (y', -y_n)$. Bergmanovo jezgro $R_\gamma(x,y)$ se predstavlja preko Puasonovog jezgra,

$$R_\gamma(x,y) = C_\gamma \mathcal{D}^{\gamma+1} P_x(y) = C_\gamma \int_0^\infty t^{\lceil\gamma\rceil-\gamma-1} D^{\lceil\gamma\rceil+1} P(x,(y',y_n+t))dt,$$

gdje posljednja jednakost važi jer je frakcioni izvod funkcije iz b_γ^p, za $s > 0$ definisan sa

$$\mathcal{D}^s u(y) = \frac{1}{\Gamma(\lceil s\rceil - s)} \int_0^\infty t^{\lceil s\rceil-s-1} D^{\lceil s\rceil} u(y', y_n + t)dt.$$

U [80] je data i procjena izvoda Bergmanovog jezgra i to u Teoremi 3.7. Naime za $\gamma > -1$, $s > -n - \gamma$ i multi-indeks β važi

$$|D_x^\beta \mathcal{D}_{x_n}^s R_\gamma(x,y)| \leq \frac{C}{|x-\overline{y}|^{n+\alpha+|\beta|+s}}.$$

Specijalno, važi

$$|R_\gamma(x,y)| \leq \frac{C}{|x-\overline{y}|^{n+\gamma}}.$$

Slične procjene važe i za Bergmanovo jezgro na opštijem domenu; to će se vidjeti u glavi 4.

Jevtić i Pavlović su u [71] proučavali harmonijske Bergmanove funkcije na jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^n$. Spomenućemo neke od rezultata koje su dobili: Za Bergmanovo jezgro $R_\gamma(x,y)$ Bergmanove projekcije P_γ prostora $L^2(\mathbb{B}, dm_\gamma)$ na Bergmanov prostor $b^2(\mathbb{B}, dm_\gamma)$ važi procjena

$$|R_\gamma(x,y)| = O(\frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}),\ x \in \mathbb{B},\ y \in \partial\mathbb{B}.$$

Bergmanova projekcija je ograničena za $1 < p < \infty$. Oni su odredili i dualne prostore harmonijskog Bergmanovog prostora $b^p(\mathbb{B}, dm_\gamma)$ za $p > 0$ i $\gamma > -1$. Težinska Lebegova mjera dm_γ koja se pojavljuje u gore spomenutim prostorima je definisana sa $dm_\gamma(y) = c_\gamma(1-|y|^2)^\gamma dm(y)$, gdje je c_γ konstanta izabrana tako da je $m_\gamma(\mathbb{B}) = 1$. Za $p > 0$ i $\gamma > -1$, prostor $L^p(\mathbb{B}, dm_\gamma)$ je prostor svih mjerljivih funkcija za koje je

$$\|f\|_{L^p_\gamma}^p := \int_{\mathbb{B}} |f(y)|^p dm_\gamma(y) < +\infty.$$

U [136] je predstavljeno jednostavno izvođenje eksplicitne formule za reprodukujuće harmonijsko Bergmanovo jezgro na lopti u Euklidovom prostoru. Takođe, harmonijske Bergmanove funkcije na jediničnoj lopti su proučavane u [134], 2008. godine. Novije rezultate u vezi sa procjenama harmonijskog reprodukujućeg jezgra na jediničnoj lopti, u kontekstu proširenja (generalizacije) teoreme procjene jezgra, dobio je Avetsiyan početkom 2023. u [17]. To mu je omogućilo da dobije ograničenost dvoparametarskog operatora Bergmanovog tipa na prostorima sa mješovitom normom i Besovim prostorima za odgovarajuće parametre prostora. Ne postoje eksplicitne formule za Bergmanovo jezgro na opštijim ograničenim oblastima sa glatkom granicom. Međutim, poznate su procjene harmonijskog Bergmanovog jezgra i to u beztežinskom i težinskom slučaju. Procjene beztežinskog Bergmanovog jezgra dobijene su u [74] (Teorema 1.1), 2001. godine. Ovdje ćemo formulisati teoremu koja daje procjene Bergmanovog jezgra i njegovih izvoda.

Teorema 1.8.1 ([74]). *Neka je Ω oblast sa glatkom granicom u $\mathbb{R}^n$. Za multi-indekse a i b postoji konstanta $C_{a,b}$ takva da*

$$|D_x^a D_y^b R(x,y)| \leq \frac{C_{a,b}}{D(x,y)^{n+|a|+|b|}}, \; x, y \in \overline{\Omega}.$$

Štaviše, za neku konstantu C važi

$$|R(x,x)| \geq \frac{C}{r(x)^n}, \; x \in \Omega.$$

Za dobijanje glavnih rezultata ove disertacije, biće potrebne procjene težinskog Bergmanovog jezgra. Engliš je 2015. godine dobio veoma delikatne procjene opštijih jezgara. Naime, dao je kompletan opis graničnog ponašanja Puasonovog jezgra i harmonijskog Bergmanovog jezgra na ograničenim oblastima sa glatkom granicom. Ovaj rezultat je u nekom smislu analogan sličnom opisu analitičkog Bergmanovog jezgra na strogo pseudo-konveksnim oblastima koji je dao Fefferman (vidjeti [47]) te mu je za ovaj rezultat dodijeljena i Fieldsova medalja. Engliš je za dobijanje ovih procjena koristio Boutet de Monvelov račun pseudodiferencijalnih graničnih operatora. On je zapravo opisao graničnu singularnost opšteg potencijala, traga ili singularnog Grinovog operatora iz tog računa. Ovaj opis uključuje harmonijska težinska Bergmanova jezgra $H_\omega(x,y)$ na Ω u odnosu na težine $\omega \in C^\infty(\Omega)$ koja imaju isti red iščezavanja u svim tačkama granice (t.j. $\omega(x) = r(x)^\gamma g(x)$, gdje je $r(x) = d(x, \partial\Omega)$, $\gamma > -1$ i $g \in C^\infty(\Omega)$ pozitivna funkcija na Ω), što će biti od značaja u glavama 3 i 4, specijalno slučaj kada je $g(x) = 1$. Ovdje ćemo navesti Englišov rezultat (Korolar 12 iz [46]) obzirom na to da nam njegov rezultat omogućava da generalizujemo [65] u smislu karakterizacije Karlesonovih mjera za težinske prostore sa mješovitom normom i dobijanja rezultata o ograničenosti Bergmanove projekcije na ovim prostorima. Zapravo ćemo trebati specijalan slučaj ovog Englišovog rezultata, procjenu samog Bergmanovog jezgra i gradijenta Bergmanovog jezgra.

Za ograničenu oblast Ω u $\mathbb{R}^n$ sa glatkom granicom, za $\epsilon > 0$ dovoljno malo, preslikavanje $\pi : \partial\Omega \times (-\epsilon, +\epsilon) \to \mathbb{R}^n$, $\pi(\zeta, r) = \zeta + r\mathbf{n}_\zeta$, gdje je $\mathbf{n}_\zeta$ jedinični unutrašnji vektor normale u $\zeta \in \partial\Omega$, je difeomorfizam. Označimo njegovu sliku sa $\Pi\epsilon$, i definišimo preslikavanje $y \to \tilde{y} : \Pi_\epsilon \to \Pi_\epsilon$ sa $\widetilde{\pi(\zeta, r)} = \pi(\zeta, -r)$ (refleksija u odnosu na granicu $\partial\Omega$).

Teorema 1.8.2 ([46]). *Neka je Ω ograničena oblast u $\mathbb{R}^n$ sa glatkom granicom i A singularni Grinov operator klase nula i reda γ na $\overline{\Omega}$ (vidjeti 7-8 str. iz [46]). Onda je Švarcovo jezgro k_A operatora A klase C^∞ izvan $\Pi_\epsilon \times \Pi_\epsilon$, dok na $\Pi_\epsilon \times \Pi_\epsilon$ zadovoljava*

$$k_A(x,y) = |\omega|^{-n-\gamma} F(x, y, |\omega|, \frac{\omega}{|\omega|}) + G(x,y) \ln |\omega|$$

ako je $\gamma \in \mathbb{Z}$ *i* $\gamma > -n$;

$$k_A(x,y) = F(x,y,|\omega|,\frac{\omega}{|\omega|}) + G(x,y)\ln|\omega|$$

sa funkcijom G *koja iščezava na red* $-n-\gamma$ *u* $x = \tilde{y}$, *ako je* $\gamma \in \mathbb{Z}$ *i* $\gamma \leq -n$; *i*

$$k_A(x,y) = |\omega|^{-n-\gamma} F(x,y,|\omega|,\frac{\omega}{|\omega|}) + G(x,y),$$

ako $\gamma \notin \mathbb{Z}$, *gdje je* $\omega = x - \tilde{y}$ *i* $F \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \overline{R^+} \times S^{n-1}), G \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$.

Ova teorema opisuje granično ponašanje Švarcovog jezgra singularnog Grinovog operatora. Teorema 14 iz [46] je blago pojačanje Korolara 12 (tj. ove teoreme) za specijalan slučaj singularnog Grinovog operatora, naime Bergmanove projekcije i daje oblik Bergmanovog jezgra koje je Švarcovo jezgro Bergmanove projekcije. Teorema 14 opisuje Bergmanovo jezgro koristeći $|x-\tilde{y}|^n$, gdje je $\tilde{y}$ "refleksija" y-a u odnosu na granicu od Ω. U nastavku ćemo formulisati spomenutu teoremu.

Teorema 1.8.3 ([46]). *Neka je* Ω *ograničena oblast u* $\mathbb{R}^n$ *sa glatkom granicom. Harmonijsko Bergmanovo jezgro* $R(x,y)$ *je klase* C^∞ *za* (x,y) *koji su udaljeni od dijagonale granice* $\partial\Omega \times \partial\Omega$, *dok se blizu dijagonale granice* $\partial\Omega \times \partial\Omega \subset \Omega \times \Omega$, *može predstaviti u sljedećem obliku:*

$$R(x,y) = \frac{2c_n}{|x-\tilde{y}|^n} F(x,y,|x-\tilde{y}|,\frac{x-\tilde{y}}{|x-\tilde{y}|}) + G(x,y)\ln|x-\tilde{y}|,$$

gdje je $G \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $F \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \overline{R^+} \times S^{n-1}), F(x,x,0,\nu) = n\langle \nu, \nabla r(x)\rangle^2 - 1$ *za* $x \in \partial\Omega$, $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}}$.

Izraz za Bergmanovo jezgro važeći na cijelom $\Omega \times \Omega$ je takođe dobijen u [46], navodimo ga u nastavku. Jedna mogućnost je

$$R(x,y) = \frac{2c_n}{|v(x,y)|^n} F(x,y,v(x,y),\frac{v(x,y)}{|v(x,y)|}) + G(x,y)\ln|v(x,y)|,$$

gdje je $G \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$, $F \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \times \overline{R^+} \times S^{n-1}), v : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{n+1}$ je proizvoljna glatka funkcija takva da

$$v(x,y) = (\rho(x) - \rho(y), r(x), r(y)),$$

za (x,y) u nekoj maloj okolini od diag $\partial\Omega$, gdje je $\rho(x)$ tačka iz $\partial\Omega$ najbliža tački x (ρ je dobro definisano na maloj okolini od $\partial\Omega$). Dalje se $|v(x,y)|$ može zamijeniti sa $d_\Delta(x,y)$ gdje je $d_\Delta \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ takvo da je $d_\Delta > 0$ na $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \operatorname{diag}\partial\Omega$ i

$d_\Delta(x,y) = \mathrm{dist}((x,y), \mathrm{diag}\partial\Omega)$, za (x,y) u blizini diag $\partial\Omega$. Ovaj specijalan slučaj Englišovog rezultata je zapravo rezultat dobijen 2001. godine u [74] koji smo već naveli.

Pošto je težinsko Bergmanovo jezgro $R_\gamma(x,y)$ Švarcovo jezgro specijalnog Grinovog operatora (vidjeti poglavlje 7.1 iz [46]), može biti opisano koristeći Teoremu 1.8.2, slično kao beztežinsko Bergmanovo jezgro u Teoremi 1.8.3, preko $|x-\tilde{y}|^{n+\gamma}$. Opis se može dobiti čak i u opštijem slučaju težinskog Bergmanovog jezgra ali mi trebamo opis samo za slučaj težine u obliku stepena.

Primjetimo da $D(x,y) \asymp |x-\tilde{y}|$, gdje je $D(x,y) = r(x) + r(y) + |x-y|$, pa možemo procijeniti težinsko Bergmanovo jezgro ovom funkcijom kvazi-udaljenosti $D(x,y)$. Relevantne procjene su date u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.8.4. *Za $\gamma > -1,\ x, y \in \Omega$ postoji pozitivna konstanta C takva da*

$$|R_\gamma(x,y)| \leq C\frac{1}{D(x,y)^{n+\gamma}} \ \ i \ |\frac{\partial R_\gamma(y,x)}{\partial y}| \leq C\frac{1}{D(x,y)^{n+\gamma+1}}.$$

Štaviše, za neku pozitivnu konstantu C

$$|R_\gamma(x,x)| \geq C\frac{1}{r(x)^{n+\gamma}}.$$

Specijalno, za $x = y$, dobijamo

$$|R_\gamma(x,x)| \asymp \frac{1}{r(x)^{n+\gamma}}. \tag{1.15}$$

Eksplicitna formula za reprodukujuće jezgro Bergmanovog prostora analitičkih funkcija $R_\gamma(z,w)$ se može pronaći u [150] (poglavlje 4.4.). Postoji mnogo metoda u literaturi da se izračuna Bergmanovo jezgro jediničnog diska. Jedna od njih je korišćenje specijalnih ortonormalnih baza. Navodimo eksplicitnu formulu u nastavku:

$$R_\gamma(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\gamma}}. \tag{1.16}$$

Ograničenost Bergmanove projekcije iz prostora $L^p(\mathbb{U})$ na prostor $B^p(\mathbb{U})$ za $1 < p < \infty$ je poznat rezultat koji potiče još iz 1964. a prvi dokaz teoreme o ograničenosti dali su Zaharjuta i Judovic u [143] koristeći teoriju singularnih integralnih operatora. Standardni dokaz ove teoreme koristi Šurov test i dali su ga Forelli i Rudin u [51] 1974. godine i to u višedimenzionalnom slučaju tj. u slučaju jedinične lopte u $\mathbb{C}^n$. Teorema iz [51] se odnosi i na opštije operatore od Bergmanove projekcije. Kasnije su mnogi naučnici ovu teoremu proširili. Mateljević i Pavlović su 1993. dokazali da je Bergmanova projekcija ograničen operator na prostoru $L_1^p = \{f : M_1 f \in L^p(\mathbb{B})\},\ 0 < p < \infty$, $\mathbb{B}-$ jedinična lopta u $\mathbb{C}^n$, gdje je $M_1 f(w)$ integralna sredina funkcije f nad hiperboličkom loptom sa centrom u w i fiksiranog poluprečnika (specijalan slučaj prostora sa mješovitom normom), pod određenim uslovima. Naime, u [103] su dati potrebni i dovoljni uslovi da projekcija definisana u [51] bude ograničen operator. Motivacija za proširenje Forelli-Rudinove teoreme u kontekstu prostora L_1^p je bila činjenica da u slučaju kada je $0 < p < 1$, ne postoje ograničeni operatori koji slikaju L^p na B^p. Dual od L^p je trivijalan. S druge strane, za svako $z \in \mathbb{B}$, funkcional $z \to f(z)$ je neprekidan na B^p. U [38] su razmatrani Bergmnanovi prostori sa opštijim Orliczevim normama, u slučaju jediničnog diska u $\mathbb{C}$. Ovim proučavanjem je uopštena poznata teorija i što je važnije dobijeni su bolji rezultati koji rasvjetljavaju L^p situaciju. Stroethoff je 1998. u [136] dao elementaran dokaz da je harmonijska Bergmanova projekcija L^p ograničena, za $p > 1$, sličan dokazu iz [51] u slučaju analitičkog Bergmanovog jezgra.

Ograničenost (težinske) Bergmanove projekcije P_α iz prostora $L^p_\alpha(\mathbb{U})$ u težinski Bergmanov prostor analitičkih funkcija $B^p_\alpha(\mathbb{U})$ za $p \geq 1$ je takođe poznat rezultat (vidjeti npr. [150]). Procjenu (oštru) norme Bergmanove projekcije na težinskom Lebegovom prostoru L^p_α, $\alpha > -1$ na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$ je dao Zhu 2006. godine u [151]. Naime, on je pokazao da je norma Bergmanove projekcije $R_\alpha : L^p_\alpha \to B^p_\alpha$ uporediva sa $\csc \frac{\pi}{p}$ za $1 < p < +\infty$. Ovaj rezultat zapravo pokazuje koliko brzo se norma projekcije R_α mijenja kako p raste ka beskonačnosti ili kako se p smanjuje ka 1, kada je α fiksirano. Li je u [88], 2007. godine, dobio neke potrebne i dovoljne uslove za ograničenost određene klase integralnih operatora na težinskom prostoru sa mješovitom normom na otvorenoj jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$. Prostori koji se razmatraju u ovom radu za težinu imaju tzv. normalnu funkciju a operatori koji se razmatraju su sa tri parametra i oni su u specijalnom slučaju, Bergmanove projekcije.

Težinski Bergmanovi prostori na jediničnom disku sa opštijim težinama od standardne težine, uključujući određene težine koje brže radijalno opadaju (npr. težine eksponencijalnog tipa), razmatrani su u [10], 2014. godine. Date su procjene reprodukujućeg jezgra za ovu širu klasu Bergmanovih prostora te koristeći te procjene dokazana je ograničenost težinske Bergmanove projekcije na prostoru $L^p(\mathbb{U}, \omega^{\frac{p}{2}} dA)$ za $1 \leq p < \infty$, gdje je dA normalizovana površinska mjera na jediničnom disku. Takođe, dobijen je i dualni prostor za ovu klasu prostora. U [112] su prošireni rezultati iz [10] na širu klasu Bergmanovih prostora sa mješovitom normom, 2015. godine. Naime, koristeći dualnost, Park je dobio neke teoreme reprezentacije na spomenutim prostorima sa mješovitom normom za $1 < p, q < \infty$.

Ograničenost Bergmanove projekcije P_γ iz prostora $L^p_\alpha(\mathbb{U})$ u $B^p_\alpha(\mathbb{U})$ za $p \geq 1$ je poznat rezultat koji se može pronaći u [150]. Ovakav tip rezultata tj. ograničenost Bergmanove projekcije čija je težina različita od težine prostora na kome se razmatra, u slučaju opštijeg domena, biće dobijen u glavi 4. Ovdje navodimo verziju koja se odnosi na analitičke funkcije i specijalan slučaj domena -jedinični disk.

Teorema 1.8.5. *Neka je $p \geq 1, \alpha, \gamma > -1$. Onda je operator P_γ ograničena projekcija iz $L^p_\alpha(\mathbb{U})$ na $B^p_\alpha(\mathbb{U})$ ako i samo ako je $p(\gamma+1) > \alpha + 1$.*

Teorema je dokazana u [150] kao specijalan slučaj teoreme u vezi sa opštijim integralnim operatorima na L^p u glavi 3 ove knjige. Ova teorema zapravo znači da postoji beskonačno mnogo ograničenih projekcija iz prostora $L^p_\alpha(\mathbb{U})$ na $B^p_\alpha(\mathbb{U})$. Specijalan slučaj ove teoreme kada je $\gamma = \alpha$ je klasični rezultat koji smo prethodno spomenuli. Postojanje ograničenih projekcija $L^p_\alpha(\mathbb{U})$ na $B^p_\alpha(\mathbb{U})$ je veoma korisna činjenica u teoriji Bergmanovih prostora. Ovaj rezultat ne važi u slučaju Hardijevih prostora za $p = 1$. Naime, ne postoji ograničena projekcija iz prostora $L^1(\mathbb{T})$ na prostor H^1. Primjetimo da za $p \geq 1$ i $p(\gamma+1) > \alpha+1$ možemo posmatrati prostor $B^p_\alpha(\mathbb{U})$ kao količnički prostor indukovan projekcijom

$$P_\gamma : L^p_\alpha(\mathbb{U}) \to B^p_\alpha(\mathbb{U}).$$

Na osnovu teoreme o otvorenom preslikavanju norma na količničkom prostoru $B^p_\alpha(\mathbb{U})$ je ekvivalentna sa L^p normom na prostoru $L^p_\alpha(\mathbb{U})$ jer je operator P_γ ograničen i surjektivan.

Treba spomenuti da je problem ograničenosti Bergmanove projekcije na određenim prostorima holomorfnih funkcija sa mješovitom normom razmatran od strane nekoliko autora. Prije otprilike tri decenije, dovoljni uslovi za ograničenost Bergmanove projekcije na određenim težinskim prostorima funkcija sa mješovitom normom na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$ su dati u [52, 100, 70] i identifikovan je dual ovih prostora. Naime, Mateljević i Pavlović su u [100], između ostalog, pokazali da postoje ograničene projekcije iz $L^{p,q}(\varphi)$ na $H^{p,q}(\varphi)$, $1 \leq p, q \leq \infty$ gdje je φ normalna funkcija, i to u slučaju $n = 1$; odredili su i dual od prostora $H^{p,q}(\varphi)$. Jevtić je u [70] spomenute rezultate uopštio za $n \geq 1$.

U [56], dokazano je da je Bergmanov operator ograničen na težinskim prostorima holomorfnih funkcija sa mješovitom normom na jediničnoj lopti sa radijalnim težinama koje zadovoljavaju Békolléjeve uslove i dobijena je karakterizacija odgovarajućih dualnih prostora. Dovoljni uslovi za ograničenost operatora Bergmanovog tipa na određenim težinskim prostorima funkcija sa mješovitom normom na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$, za određeni raspon parametara, su dati u [121]. Avetisyan i Petrosyan su 2018. u [18] proučavali neke nove $\mathbb{C}^n$ generalizacije operatora Bergmanovog tipa koje su uveli Shields i Williams [129], a koji zavise od tzv. normalnog para težinskih funkcija. Naime, u [18] su pronađene vrijednosti parametra α za koje su ovi operatori ograničeni na prostorima sa mješovitom normom $L^{p,q}_\alpha$ na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$. Štaviše, dokazano je da su ovi operatori ograničene projekcije.

Ograničenost težinske Bergmanove projekcije na težinskim prostorima sa mješovitom normom na simetričnim tubarnim domenima je razmatrana u [37], i na homogenim Zigelovim domenima tipa II, u [107]. U [53], 2018. Gonessa je pokazao da je norma (težinske) Bergmanove projekcije na $L^{p,q}$-prostorima na gornjoj poluravni uporediva sa $\csc(\frac{\pi}{q})$, što je slično Zhuovom rezultatu iz [151] u slučaju težinskog Lebegovog prostora na jediničnoj lopti, koji smo već spomenuli. Onda je proširio ovaj rezultat na opštije domene, na homogene Zigelove domene tipa II. Calzi i Peloso su 2022. u [26] proučavali ograničenost Bergmanovih projekcija na težinskim Bergmanovim prostorima na homogenim Zigelovim domenima tipa II. Oni su posmatrali ograničenost Bergmanove projekcije na Lebegovim težinskim prostorima sa mješovitom normom. Oni su takođe proučavali slučaj "pozitivnih" Bergmanovih projekcija, integralnih operatora u kojim je Bergmanovo jezgro zamijenjeno sa svojim modulom. Ograničenost multifunkcionalnih operatora Bergmanovog tipa na simetričnim tubarnim domenima je proučavana u [12].

Naglasimo da je slučaj harmonijskih funkcija sa mješovitom normom na jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^n$ razmatran u [91] i predstavlja specijalan slučaj rezultata koji su dobijeni u [16] i [124] a koji su predstavljeni u glavi 4. Naime, u [16] i [124] su razmatrani opštiji domeni, ograničene oblasti sa glatkom granicom. Rezultati u [16] su dobijeni koristeći ekvivalentnost normi na prostorima sa mješovitom normom, dok su rezultati u [124] dobijeni bez korišćenja spomenute ekvivalentnosti, sličnim pristupom kao u [91] i [121].

1.9 Konvolucije

Bazična operacija u harmonijskoj analizi je konvolucija. O konvolucijama u apstraktnom okviru se može pronaći u [61] (glava 5). Pri dokazivanju ograničenosti Bergmanove projekcije, pojavljuje se jedna vrsta konvolucije; stoga će nam biti potrebna procjena norme konvolucije dva niza. U ovom poglavlju ćemo definisati konvoluciju u nešto opštijem obliku.

Definicija 1.9.1. Neka su f i g funkcije (kompleksno-vrijednosne) iz prostora $L^1(\mathbb{R}^n)$. Konvolucija ovih funkcija je funkcija u oznaci $f * g$ definisana sljedećom jednakošću:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.17}$$

Ako je $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ i $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ za $p \geq 1$, onda je integral dobro definisan na osnovu Helderove nejednakosti. Primjetimo da je za funkcije $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, integral iz (1.17) skoro svugdje dobro definisan i određuje mjerljivu funkciju iz $L^1(\mathbb{R}^n)$. Lako se uočava i da je $f * g = g * f$.

Analogno se može definisati i konvolucija nizova $(x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ i $(y_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ iz prostora $l^1(\mathbb{Z})$:

$$(x * y)_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_{i-j} y_j, \ i \in \mathbb{Z}.$$

Naravno, za niz $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ se može dodefinisati $x_i = 0$ za $i \leq 0, \ i \in \mathbb{Z}$.

Sljedeća teorema daje procjenu L^q norme konvolucije odgovarajućih funkcija i predstavlja specijalan slučaj Jangove konvolucione nejednakosti koja se može pronaći u [54].

Teorema 1.9.1 (Integralna nejednakost Minkovskog [54]). *Neka je* $1 \leq q \leq \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *i* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$*. Tada važi*

$$\|f * g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

Dokaz. Za $1 < q < \infty$, primjenom Helderove nejednakosti u odnosu na mjeru $|f(y)|dy$, na funkcije $y \to g(x-y)$ i 1 sa eksponentom q i $q' = \frac{q}{q-1}$ dobijamo

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||g(x-y)|dy \\
&\leq (\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q |f(y)|dy)^{\frac{1}{q}} (\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy)^{\frac{1}{q'}}.
\end{aligned}$$

Iz ove procjene se lako može dobiti i procjena L^q norme konvolucije, korišćenjem Fubinijeve teoreme:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q |f(y)|dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|dy \right)^{q-1} dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_{L^1}^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q |f(y)|dydx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\|f\|_{L^1}^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)|^q dx |f(y)|dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_{L^1}^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx |f(y)|dy)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_{L^1}^{q-1} \int_{\mathbb{R}^n} \|g\|_{L^q}^q |f(y)|dy)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_{L^1}^{q-1} \|g\|_{L^q}^q \|f\|_{L^1})^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Slučajevi $q = 1$ i $q = \infty$ su jednostavni. $\square$

Sada ćemo formulisati verziju gornje teoreme koja se odnosi na procjenu norme konvolucije nizova i koju ćemo koristiti za dokazivanje ograničenosti Bergmanove projekcije, u glavi 4.

Teorema 1.9.2. *Neka je $1 \leq q \leq \infty$, $x = (x_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ niz iz prostora $l_1(\mathbb{Z})$ i $y = (y_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ niz iz prostora $l_q(\mathbb{Z})$. Tada važi*

$$\|x * y\|_{l^q} \leq \|x\|_{l^1} \|y\|_{l^q}.$$

1.10 Dualnost

Jedan od bitnih aspekata rada je dualnost. Inače je važan princip funkcionalne analize povezati istraživanje normiranog prostora X sa istraživanjem dualnog prostora X^*. Za svaki normirani prostor X, dualnim prostorom X^* naziva se prostor svih ograničenih linearnih funkcionala na X. X^* je linearan vektorski prostor normiran sa $\|f^*\| = \sup_{\|x\|=1} |f^*(x)|$ i X^* je Banahov prostor prema Teoremi 1.5.2.

1.10.1 Duali prostora nizova

Budući da ćemo u glavi 5 razmatrati dualnost određenih prostora nizova, ovdje navodimo poznate teoreme o dualima prostora nizova koje se mogu pronaći u [11].

Teorema 1.10.1. *Svaki ograničen linearan funkcional Λ na prostoru l^1 ima reprezentaciju:*

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \ \text{za} \quad \text{svako } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^1$$

gdje je $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^\infty$ i $\|y\|_\infty = \sup_{1 \leq n < \infty} |y_n| = \|\Lambda\|$. Funkcionalom Λ na l^1, niz $y \in l^\infty$ za koji važi gornja reprezentacija, je jednoznačno određen.

Teorema 1.10.2. *Za svaki ograničen linearni funkcional Λ na prostoru l^p, gdje je $1 < p < \infty$, postoji jedinstven niz $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{p'}$ koji za Λ daje reprezentaciju:*

$$\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \ \text{za} \quad \text{svako } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p,$$

pri čemu je $\|\Lambda\| = \|y\|_{p'} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

1.10.2 Duali prostora L^p

Jedan od osnovnih rezultata u funkcionalnoj analizi je dualnost prostora L^p i $L^{p'}$ za $p > 1$ kao i to da je $(L^1)^* \cong L^\infty$. Ove rezultate ćemo navesti u sljedećim teoremama bez dokaza koje se mogu pronaći u [11] te u [89, 150] u nešto opštijem obliku.

Teorema 1.10.3. *Neka je μ mjera na skupu Ω. Ograničen linearan funkcional Λ na svakom od prostora $L^p(\Omega, \mu)$ ima za $1 < p < +\infty$ reprezentaciju*

$$\Lambda(f) = \int_\Omega f(x)\overline{\phi(x)}d\mu(x) \text{ za sve } f \in L^p(\Omega, \mu),$$

gdje je $\phi \in L^{p'}(\Omega, \mu)$ i $\|\Lambda\| = \|\phi\|_{L^{p'}(\Omega,\mu)}$. Funkcionalom Λ na $L^p(\Omega, \mu)$, funkcija $\phi \in L^{p'}(\Omega, \mu)$ za koju važi gornja reprezentacija, je jednoznačno određena.

Gornja teorema zapravo tvrdi da je $L^{p'}(\Omega, \mu)$ dual prostora $L^p(\Omega, \mu)$. Ovaj rezultat je sadržaj Teoreme 1.1 iz [150] i Teoreme 2.14 iz [89]. Specijalan slučaj ove teoreme, kada je Ω interval (a, b) a mjera μ Lebegova mjera, je Teorema 8.18 iz [11]. Slučaj $p = 1$ izdvajamo zbog dodatne (tehničke) pretpostavke da je (Ω, μ) sigma-konačan.

Teorema 1.10.4. *Neka je μ -σ konačna mjera na skupu Ω. Ograničen linearan funkcional Λ na prostoru $L^1(\Omega, \mu)$ ima reprezentaciju*

$$\Lambda(f) = \int_\Omega f(x)\overline{\phi(x)}d\mu(x) \text{ za } \text{ sve } f \in L^1(\Omega, \mu),$$

gdje je $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ i $\|\Lambda\| = \|\phi\|_{L^\infty} = \sup ess_{x\in\overline{\Omega}}|\phi(x)|$. Funkcionalom Λ na $L^1(\Omega, \mu)$, funkcija $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ je jednoznačno određena.

1.10.3 Duali Bergmanovih prostora

Navodimo teoremu o dualnosti težinskog Bergmanovog prostora analitičkih funkcija na jediničnom disku koja se može pronaći u [150] a koja slijedi iz klasičnog rezultata o dualnosti L^p prostora, Teoreme Han-Banacha o proširenju i ograničenosti projekcija P_α na $L^p_\alpha(\mathbb{U})$.

Teorema 1.10.5. *Neka je $1 < p < +\infty$, p i p' su konjugovani eksponenti i $\alpha > -1$. Tada je*

$$B^p_\alpha(\mathbb{U})^* \cong B^{p'}_\alpha(\mathbb{U}).$$

Dualnost je određena integralnom formulom:

$$\langle f, \phi\rangle = \int_\mathbb{U} f(x)\overline{\phi(x)}dm_\alpha(x)$$

gdje je $f \in B^p_\alpha(\mathbb{U})$ *i* $\phi \in B^{p'}_\alpha(\mathbb{U})$.

Dualni prostor harmonijskog Bergmanovog prostora $b^p(\mathbb{B})$, za $p > 1$ je dobijen u [136] kao posljedica ograničenosti Bergmanove projekcije. U istom radu je određeno i da je dual prostora $b^1(\mathbb{B})$, Blochov prostor $\mathcal{B}$. Duale prostora holomorfnih funkcija sa mješovitom normom na jediničnom disku $\mathbb{U}$ odredio je Taibleson u [138] za parametre prostora $1 < p, q < +\infty$. U slučaju $0 < p \leq 1,\ 1 \leq q \leq \infty$, dualne prostore je odredio Flett u [50]. Dual od $A^{p,q}_\alpha$, za $0 < p, q \leq 1$, odredio je Shapiro u [127]. Duale prostora holomorfnih funkcija sa mješovitom normom na jediničnom disku $\mathbb{U}$ su odredili Ahern i Jevtić u [6] za neke vrijednosti parametara p i q koje do tada nisu bile razmatrane, naime za $1 < q < \infty,\ p = \infty \vee p = 1$. Rezultat dualnosti je korišćen u ovom radu za računanje koeficijenata-množilaca za neke od prostora sa mješovitom normom i ispostavlja se da je teorija množilaca za ove prostore slična teoriji množilaca za H^p prostore.

U [115] je razmatran problem dualnosti prostora sa mješovitom normom $H(p, q, \varphi)$ na jediničnom disku, koji je spomenut u poglavlju 1.4 (kao uopštenje prostora $A^{p,q}_\alpha$), za $0 < p, q < +\infty$, gdje je φ takva da je $\sup \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < 1$ $(0 < t < \frac{1}{2})$. Ako je ovaj uslov na funkciju φ zadovoljen, kažemo da je φ kvazi-normalna. Ako je, dodatno, $\sup \frac{\varphi(at)}{\varphi(t)} < 1$ $(0 < t < 1)$ za neko $a > 0$ kažemo da je φ normalna funkcija. Za određene raspone parametara p i q, ovaj rezultat je bio poznat i ranije a specijalan slučaj, kada je $dm_\varphi(t) = \frac{dt}{1-t}$, je rezultat koji su dobili Mateljević i Pavlović u radu [101]. Ostali poznati rezultati dualnosti, koji su nam od interesa, su navedeni u poglavlju 1.8, obzirom da se oni dobijaju kao posljedica ograničenosti odgovarajuće Bergmanove projekcije.

1.11 Teplicovi operatori

Teplicovi [3] operatori igraju značajnu ulogu u teoriji operatora. Proučavanje Teplicovih operatora u prostorima funkcija je važan cilj za razvoj cjelokupne teorije takvih prostora. Poznavanje strukturnih svojstava ovih prostora je veoma korisno u proučavanju operatora Teplicovog tipa.

U glavi 6 se razmatraju ovi operatori na prostorima funkcija sa mješovitom normom. Ovdje ćemo ih definisati u kontekstu Hardijevih i Bergmanovih prostora. Detaljnije o Teplicovim operatorima na Hardijevim i Bergmanovim prostorima se može pronaći u [41] i [150].

Definicija 1.11.1. Neka je P projekcija prostora $L^2(\mathbb{T})$ na prostor H^2. Za $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ Teplicov operator na H^2 se definiše sa $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$, za $f \in H^2$.

[3] Otto Toeplitz, 1881.-1940., njemački matematičar koji se bavio funkcionalnom analizom. Radio je na beskonačnim linearnim i kvadratnim formama. Tokom 1930. godine razvio je opštu teoriju beskonačno dimanzionalnih prostora.

Teplicovi operatori su prvobitno proučavani kao operatori na prostoru $l^2(\mathbb{N})$, 1964. u [24]. Naime, posmatrala se ortonormalna baza $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ prostora H^2 i matrica Teplicovog operatora u odnosu na ovu bazu. Ako je φ funkcija iz $L^\infty(\mathbb{T})$ sa Furijeovim koeficijentima $\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi e_{-n} dt$ onda je matrica $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ operatora T_φ i u odnosu na bazu $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ određena sa

$$a_{m,n} = \langle T_\varphi e_n, e_m\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi e_{n-m} dt = \hat{\varphi}(m-n).$$

Dakle matrica T_φ po dijagonali ima konstante. Takva matrica se zove Teplicova matrica. Može se pokazati da ako matrica definiše ograničen operator onda su njeni dijagonalni elementi Furijeovi koeficijenti funkcije iz $L^\infty(\mathbb{T})$. Slično se može definisati i Teplicov operator na težinskom Bergmanovom prostoru na jediničnom disku (vidjeti [150]). Za datu funkciju $\varphi \in L^\infty(\mathbb{U})$ Teplicov operator T_φ na $B^2_\gamma(\mathbb{U})$ se definiše sa $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$, za $f \in B^2_\gamma(\mathbb{U})$. Kako Bergmanova projekcija P_γ ima normu 1 na prostoru $B^2_\gamma(\mathbb{U})$, za normu Teplicovog operatora važi $\|T_\varphi\| \le \|\varphi\|_\infty$. U poglavlju 1.8 smo vidjeli da se operator Bergmanove projekcije P_γ definiše sa $P_\gamma f(x) = \int_\Omega R_\gamma(x,y) f(y) dm_\gamma(y)$. Obzirom na to da se ovdje radi o slučaju jediničnog diska u kojem imamo eksplicitnu formulu za Bergmanovo jezgro, Bergmanova projekcija se može predstaviti sa

$$P_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{U}} \frac{f(y)}{(1-\overline{y}x)^{2+\gamma}} dm_\gamma(y).$$

Sada se Teplicov operator može predstaviti na sljedeći način:

$$T_\varphi f(x) = \int_{\mathbb{U}} \frac{\varphi(y) f(y)}{(1-\overline{y}x)^{2+\gamma}} dm_\gamma(y).$$

T_φ očigledno zavisi i od težine γ. U nastavku ćemo navesti neke osobine Teplicovog operatora koje slijede iz same definicije.

Propozicija 1.11.1. *Pretpostavimo da su a i b kompleksni brojevi i φ i ϕ ograničene funkcije na $\mathbb{U}$. Onda*

- $T_{a\varphi+b\phi} = aT_\varphi + bT_\phi$
- $T_{\overline{\varphi}} = T^*_\varphi$
- $T_\varphi \ge 0$ *ako je* $\varphi \ge 0$

Štaviše, ako je $\varphi \in H^\infty$ onda važi i

- $T_\phi T_\varphi = T_{\phi\varphi}$.

Teplicov operator na $B^2_\gamma(\mathbb{U})$ se može definisati i za konačne mjere μ na otvorenom jediničnom disku $\mathbb{U}$. Naime, ako je μ konačna kompleksna Borelova mjera na $\mathbb{U}$ definišemo operator

$$T : H^\infty \to H(\mathbb{U})$$

integralnom formulom

$$T_\mu f(x) = \int_{\mathbb{U}} R_\gamma(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Ako postoji pozitivna konstanta C takva da:

$$\int_{\mathbb{U}} |T_\mu f|^2 dm_\gamma \leq C \int_{\mathbb{U}} |f|^2 dm_\gamma$$

za svako $f \in H^\infty$, onda kažemo da je operator T_μ ograničen na Bergmanovom prostoru $B^2_\gamma(\mathbb{U})$. Ako konačna mjera μ ima kompaktan nosač u $\mathbb{U}$, onda operator T_μ nije samo ograničen, nego i kompaktan. O ograničenosti i kompaktnosti operatora T_μ na prostoru funkcija sa mješovitom normom, biće riječi u glavi 6. Ako je operator T_μ ograničen onda je *Berezinova transformacija* operatora data sa

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_\mu f(x) = \langle T_\mu k_{\gamma,x}, k_{\gamma,x}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{R_\gamma(x,x)}} \langle T_\mu k_{\gamma,x}, R_{\gamma,x}\rangle \\
&= \frac{T_\mu k_{\gamma,x}(x)}{\sqrt{R_\gamma(x,x)}} = \frac{1}{\sqrt{R_\gamma(x,x)}} \int_{\mathbb{U}} R_\gamma(x,y) k_{\gamma,x}(y) d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{U}} \frac{|R_\gamma(x,y)|^2}{R_\gamma(x,x)} d\mu(y), \ \ x \in \mathbb{U}
\end{aligned}$$

gdje je

$$k_{\gamma,x}(y) = \frac{R_\gamma(x,y)}{\sqrt{R_\gamma(x,x)}}$$

L^2-normalizovano reprodukujće jezgro i $R_{\gamma,x}(y) = R_\gamma(x,y)$. Opštije koristićemo gornju integralnu formulu da definišemo Berezinovu transformaciju proizvoljne konačne mjere μ i označavaćemo ju sa $\tilde{\mu}$. Naime, Berezinova transformacija konačne Borelove mjere μ se definiše sa

$$\tilde{\mu}(x) = \int_{\mathbb{U}} \frac{|R_\gamma(x,y)|^2}{R_\gamma(x,x)} d\mu(y), \ \ x \in \mathbb{U}.$$

U glavi 6 radimo sa opštijim domenima - ograničenim oblastima sa glatkom granicom Ω pa za potrebe te glave analogno definišemo i Berezinovu transformaciju konačne

Borelove mjere μ na Ω :

$$\tilde{\mu}(x) = \int_\Omega \frac{|R_\gamma(x,y)|^2}{R_\gamma(x,x)} d\mu(y),\ x \in \Omega.$$

Takođe, za potrebe glava 3 i 6, za datu konačnu Borelovu mjeru μ na Ω i $\delta \in (0,1)$, definišemo funkciju usrednjenja

$$\hat{\mu}_{\delta,\gamma}(x) = \frac{\mu(E_\delta(x))}{m_\gamma(E_\delta(x))} \asymp \frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}}, x \in \Omega,$$

gdje je $E_\delta(x) = \{y \in \Omega : |y-x| < \delta r(x)\}$ i $r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. U sljedećoj lemi navodimo osobinu funkcije usrednjenja $\hat{\mu}_{\delta,\gamma}$, koja suštinski dolazi iz [30] (Lema 3.2 iz [30]). Koristimo ovaj rezultat u glavi 3.

Lema 1.11.2 ([30]). *Neka je $\delta_1, \delta_2 \in (0,1)$ i $\gamma > -1$. Onda postoje konstante $C_{\delta_1,\delta_2,\gamma,n}$ takve da*

1. $\mu(E_{\delta_1}(x)) \leq \frac{C_{\delta_1,\delta_2,\gamma,n}}{m_\gamma(E_{\delta_1}(x))} \int_{E_{\delta_1}(x)} \mu(E_{\delta_2}(y)) dm_\gamma(y)$

2. $\hat{\mu}_{\delta_1,\gamma}(x) \leq \frac{C_{\delta_1,\delta_2,\gamma,n}}{m_\gamma(E_{\delta_1}(x))} \int_{E_{\delta_1}(x)} \hat{\mu}_{\delta_2,\gamma}(y) dm_\gamma(y)$

za svaku mjeru $\mu \geq 0$ i $x \in \Omega$.

Dakle, lako izvodimo sljedeći zaključak:

Korolar 1.11.3. *Neka je μ Borelova mjera na Ω i $\gamma > -1$. Onda za svako $0 < \delta_1, \delta_2 < 1$, postoji konstanta $C = C(\delta_1, \delta_2, \gamma, n)$ takva da je*

$$\sup_{x\in\Omega} \hat{\mu}_{\delta_1,\gamma}(x) \leq C \sup_{x\in\Omega} \hat{\mu}_{\delta_2,\gamma}(x), \qquad x \in \Omega.$$

Dakle, ako je $\hat{\mu}_{\delta_0,\gamma}(x)$ ograničena (ili teži ka 0 kada $x \to \Gamma$) za neko $\delta_0 \in (0,1)$, onda je $\hat{\mu}_{\delta,\gamma}$ ograničena (ili teži ka 0 kada $x \to \Gamma$) za svako $\delta \in (0,1)$.

Za potrebe glave 6 definišemo Teplicov operator na prostoru svih ograničenih funkcija $h^\infty(\Omega) = h(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Za datu konačnu Borelovu mjeru μ, definišemo Teplicov operator sa simbolom μ na $h^\infty(\Omega)$ sa

$$T_{\mu,\gamma} f(x) = \int_\Omega R_\gamma(x,y) f(y) d\mu(y).$$

Kako je jezgro R_γ glatko na $(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}) \setminus \{(\zeta,\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\}$(rezultat iz [46] o kome je bilo riječi u poglavlju 1.8), gornji integral je konvergentan za svako x iz Ω. Pošto je $R_\gamma(x,y)$

harmonijsko po x, vidimo da $T_{\mu,\gamma}$ slika $h^\infty(\Omega)$ u $h(\Omega)$. Ako je iz konteksta jasno o kojoj težini γ se radi, pišemo samo T_μ umjesto $T_{\mu,\gamma}$. Ako je $d\mu(x) = r(x)^\gamma dm(x) = dm_\gamma(x)$, onda je Teplicov operator $T_{\mu,\gamma}$ Bergmanova projekcija P_γ.

U nastavku navodimo teoremu o ograničenosti Teplicovog operatora na Bergmanovom prostoru analitičkih funkcija na jediničnom disku, koja se može pronaći u [150](Teorema 7.5.); ograničenost Teplicovog operatora je opisana koristeći Berezinovu transformaciju i mjeru Karlesona. Takođe, kompaktnost Teplicovog operatora je okarakterisana koristeći nestajuću mjeru Karlesona.

Teorema 1.11.4 ([150]). *Pretpostavimo da je μ konačna pozitivna Borelova mjera μ na $\mathbb{U}$. Onda su sljedeća tvrđenja ekvivalentna*

- T_μ *je ograničen operator na* $B^2_\gamma(\mathbb{U})$
- $\tilde{\mu}$ *je ograničena funkcija*
- μ *je Karlesonova mjera za* $B^2_\gamma(\mathbb{U})$.

Budući da su u fokusu ove disertacije harmonijske funkcije i rezultat za prostore harmonijskih funkcija sa mješovitom normom za opštije domene je dobijen u glavi 6, u nastavku navodimo i analognu teoremu za Bergmanov (beztežinski) prostor harmonijskih funkcija na ograničenoj oblasti Ω sa glatkom granicom. Ova teorema je jedan od rezultata iz [30].

Teorema 1.11.5 ([30]). *Neka je $\mu \geq 0$ i $1 < p < +\infty$. Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni*

- T_μ *je ograničen operator* $T_\mu : b^p(\Omega) \to b^p(\Omega)$
- μ *je Karlesonova mjera za prostor* $b^p(\Omega)$.

Takođe, u [30] (Teorema 3.12.) navedena je karakterizacija kompaktnog pozitivnog Teplicovog operatora na Bergmanovom prostoru pomoću nestajuće Karlesonove mjere za taj prostor.

Teorema 1.11.6 ([30]). *Neka je $\mu \geq 0$ i $1 < p < +\infty$. Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni*

- T_μ *je kompaktan operator* $T_\mu : b^p(\Omega) \to b^p(\Omega)$
- μ *je nestajuća Karlesonova mjera za prostor* $b^p(\Omega)$.

Za kompleksnu mjeru μ na otvorenom jediničnom disku, Teplicov operator T_μ koji djeluje na određene Hilbertove prostore koji uključuju Hardijeve prostore i težinske Bergmanove prostore analitičkih funkcija su razmatrani u [96]; dobijeni su uslovi koje treba da zadovolje ovakvi operatori da bi pripadali tzv. Schattenovoj klasi operatora. Luecking je najvjerovatnije prvi uveo Teplicove operatore T_μ sa mjerom kao simbolom, gdje je, između ostalog opisao Schattenove klase Teplicovih operatora $T_\mu : B^2_\alpha \to B^2_\alpha$. Teplicovi operatori na Bergmanovim prostorima na ograničenim simetričnim oblastima su proučavani u [148]. Naime, ograničenost i kompaktnost operatora T_μ je okarakterisana koristeći mjere Karlesona i nestajuće mjere Karlesona. Teplicov operator na Fockovom prostoru sa pozitivnom mjerom kao simbolom je proučavan 2010. godine u [69]. Naime, Isralowitz i Zhu su okarakterisali pozitivne Borelove mjere μ za koje je T_μ ograničen (ili kompaktan, Schattenove klase) na F^2. Ograničenost i kompaktnost operatora T_μ, za pozitivnu mjeru na $\mathbb{C}^n$, definisanog na uopštenim Bargmann–Fockovim prostorima holomorfnih funkcija su okarakterisani u [125], 2012. godine. Schuster i Varolin su dobili da na uopštenom Fockovom prostoru $F^p(\varphi)$ sa $1 < p < \infty$, T_μ je ograničen (ili kompaktan) ako i samo ako je μ Fock-Carlesonova (ili iščezavajuća Fock-Carlesonova) mjera. Dobijena je karakterizacija Teplicovog operatora T_φ, gdje je φ funkcija na jediničnom disku (ili na njegovoj granici), za ograničene harmonijske simbole, što je dovelo da proučavanja Teplicovog operatora na prostorima Dirichletovog tipa u [29]. Teplicovi operatori na opštijim Fockovim prostorima su proučavani u [66], 2014. Hu i Lv su okarakterisali pozitivne Borelove mjere μ na $\mathbb{C}^n$ za koje je T_μ ograničen (ili kompaktan) operator koji prostor $F^p(\varphi)$ preslikava u $F^q(\varphi)$, i to za $0 < p, q < +\infty$. Teplicovi operatori sa radijalnim simbolima na težinskim Bergmanovim prostorima na jediničnoj lopti u $\mathbb{C}^n$ su proučavani u [55]. U [135], 1998. godine je dat odgovor na pitanje za koje $\varphi \in L^\infty(\mathbb{B})$ je operator T_φ kompaktan na Bergmanovom prostoru $B^2_\gamma(\mathbb{B})$. Naime, kompaktnost Teplicovog operatora je opisana preko ponašanja tzv. Berezinove transformacije simbola, što je bilo korisno za karakterizaciju kompaktnosti Teplicovog operatora sa pozitivnim simbolima u [96, 148]. Algebarske osobine Teplicovih operatora na Bergmanovim prostorima polianalitičkih funkcija na jediničnom disku su proučavane u [36]. Generalizacija uobičajenog Teplicovog operatora na Bergmanovom prostoru za konačnu mjeru na jediničnom disku je dobijena u [137]. Karakterizacija kompaktnih operatora na analitičkim težinskim Bergmanovim prostorima (za određeni raspon parametara) koristeći Teplicovu algebru i Berezinovu transformaciju je data u [105]. Teplicovi operatori na težinskim Bergmanovim prostorima indukovanim regularnim težinama su razmatrani u [130], 2018. godine.

U [145], 2019. godine, su razmatrani Teplicovi operatori koji djeluju na težinski Blochov prostor $\mathcal{B}^\alpha$ funkcija na jediničnom disku kompleksne ravni, koji čine analitičke funkcije za koje je $\sup_{z\in\mathbb{U}}(1-|z|^2)^\alpha|f'(z)| < +\infty$ gdje je težina $\alpha > 0$. Wang i Zhou su 2021. u [142] opisali ograničene i kompaktne Teplicove operatore između različitih "tent" prostora Hardijevog tipa na jediničnoj lopti preko Karlesonovih mjera. Zhang, Wang i Hu su 2022. u [146] opisali ograničene i kompaktne Teplicove operatore T_μ iz jednog Bergmanovog prostora $B^p_\varphi(\mathbb{U})$ u drugi $B^q_\varphi(\mathbb{U})$ za $0 < p, q < +\infty$, koristeći (iskrivljene) mjere Karlesona. Takođe je okarakterisana Schattenova klasa Teplicovih operatora na A^2_φ. Jedan od novijih rezultata (iz 2023. godine) u vezi sa Teplicovim operatorima je dobijen u [23], u kontekstu težinskih Bergmanovih prostora na otvorenom jediničnom disku, čije težine zadovoljavaju Littlewood–Paleyeve procjene.

Čini se da su prostori harmonijskih funkcija u manjoj mjeri proučavani, stoga se u glavi 6 bavimo proučavanjem Teplicovog operatora na prostoru harmonijskih funkcija sa mješovitom normom. Teplicovi operatori između harmonijskih Bergmanovih prostora su razmatrani u [31]. U [40], karakterizacija ograničenih i kompaktnih Teplicovih operatora koji prevode jedan harmonijski Bergman-Besov prostor na jediničnoj lopti u $\mathbb{R}^n$ u drugi, preko mjera Karlesona i nestajućih mjera Karlesona, je dobijena; takođe, dati su uslovi da Teplicov operator pripada Schattenovoj klasi operatora. Teplicovi operatori na (beztežinskim) prostorima harmonijskih funkcija sa mješovitom normom su proučavani u [65]. Napomenimo i da se o Teplicovim operatorima u kontekstu spektralne teorije može pronaći u monografiji [116] (glava 3).

2. Neke bitne osobine harmonijskih funkcija i prostori harmonijskih funkcija sa mješovitom normom

U ovoj glavi ćemo predstaviti neke poznate osobine harmonijskih funkcija koje ćemo koristiti prilikom dokazivanja pomoćnih i glavnih rezultata disertacije. Osim poznate osobine srednje vrijednosti za harmonijske funkcije i njenih posljedica, navodimo i princip maksimuma te se bavimo integralnim sredinama $M_p(f, r)$, navodeći njihovu bitnu osobinu "kvazi-monotonosti" za $1 < p < \infty$ i odgovarajuću osobinu kada je $0 < p < 1$. Takođe, u ovoj glavi ćemo definisati i nekoliko prostora funkcija sa mješovitom normom, kao glavnih objekata istraživanja.

2.1 Osobine harmonijskih funkcija

U prvoj teoremi ovog poglavlja navodimo osobinu srednje vrijednosti harmonijske funkcije i dajemo njen dokaz.

Teorema 2.1.1. *Ako je $u \in h(\Omega)$ i $\overline{B}(x, r) \subset \Omega$, onda je $u(x)$ jednako srednjoj vrijednosti funkcije u na granici lopte $B(x, r)$ tj. na $S(x, r)$. Preciznije*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_S u(x + \rho\zeta) d\sigma(\zeta), \ 0 < \rho < r \\ &= \frac{1}{AreaS(x, r)} \int_{S(x,r)} u d\sigma. \end{aligned}$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da je $n > 2$. Bez smanjenja opštosti možemo raditi sa jediničnom loptom, tj. staviti da je $B(x, r) = \mathbb{B}$. Fiksirajmo $\epsilon \in (0, 1)$. Primjenjujući Grinov identitet (vidjeti 1.4 iz poglavlja 1.2) kada je $\Omega = W_\epsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \epsilon < |x| < 1\}$

i $v(x) = |x|^{2-n}$ te osobine dilatacije i translacije dobijamo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{W_\epsilon} (u\Delta v - v\Delta u)dm = \int_{\partial W_\epsilon} (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)d\sigma \\
&= \int_S (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)d\sigma - \int_{\epsilon S} (uD_{\mathbf{n}}v - vD_{\mathbf{n}}u)d\sigma \\
&= (2-n)\int_S ud\sigma - (2-n)\epsilon^{1-n}\int_{\epsilon S} ud\sigma - \int_S D_{\mathbf{n}}ud\sigma + \epsilon^{2-n}\int_{\epsilon S} D_{\mathbf{n}}ud\sigma.
\end{aligned}$$

Na osnovu (1.5) posljednja dva integrala koja se pojavljuju sa desne strane gornje jednakosti su nula pa dobijamo da je

$$(2-n)\int_S ud\sigma - (2-n)\epsilon^{1-n}\int_{\epsilon S} ud\sigma = 0$$

što je ekvivalentno sa

$$\int_S ud\sigma = \epsilon^{1-n}\int_{\epsilon S} ud\sigma$$

tj.

$$\int_S ud\sigma = \int_S u(\epsilon\zeta)d\sigma(\zeta).$$

Puštajući da ϵ teži ka nuli i koristeći neprekidnost od u u nuli dobijamo $\omega_{n-1}u(0) = \int_S ud\sigma$, što je i trebalo dokazati. U slučaju kada je $n = 2$, koristimo funkciju $\ln|x|$ umjesto funkcije $|x|^{2-n}$ i dokaz se sprovodi na isti način. □

Harmonijske funkcije imaju osobinu srednje vrijednosti i u odnosu na zapreminsku mjeru. Prije formulacije analogne teoreme, navodimo formulu za prelazak na polarne koordinate prilikom integracije po $\mathbb{R}^n$. Ako je f mjerljiva, integrabilna funkcija na $\mathbb{R}^n$, tada važi:

$$\frac{1}{nm(\mathbb{B})}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dm(y) = \int_0^\infty r^{n-1}\int_S f(r\zeta)d\sigma(\zeta)dr. \tag{2.1}$$

Sada ćemo navesti zapreminsku verziju teoreme o srednjoj vrijednosti.

Teorema 2.1.2. *Ako je $u \in h(\Omega)$ i $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$, onda je $u(x)$ jednako srednjoj vrijednosti funkcije u na lopti $B(x,r)$. Preciznije*

$$u(x) = \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} u(y)dm(y)$$

Dokaz. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $B(x,r)=\mathbb{B}$. Prelaskom na polarne koordinate tj. primjenom formule (2.1) za $f=u\chi_B$ i primjenom Teoreme 2.1.1 dobijamo:

$$\frac{1}{m(\mathbb{B})}\int_{\mathbb{B}} u(y)dm(y)=\int_0^1 nr^{n-1}\int_S u(r\zeta)d\sigma(\zeta)dr=u(x)r^n|_0^1=u(x)$$

čime smo dokazali teoremu. □

Posljedica gore navedenih osobina je da harmonijske funkcije ne mogu imati izolovane nule.

Korolar 2.1.3. *Ako je u harmonijska funkcija i $u(a)=0$, onda a nije izolovana nula funkcije u.*

Dokaz. Neka u realno-vrijednosna funkcija na Ω i $r>0$ takvo da je $\overline{B}(a,r)\subset\Omega$. Na osnovu Teoreme 2.1.1 imamo:

$$\int_{\partial B(a,r)} u(y)d\sigma(y)=0$$

što znači da je $u(y)=0$ za $y\in\partial B(a,r)$ ili u mora uzimati i pozitivne i negativne vrijednosti na $\partial B(a,r)$, pa u tom slučaju zbog povezanosti $\partial B(a,r)$, u mora imati nulu na granici lopte $B(a,r)$. □

Bitna posljedica osobine srednje vrijednosti harmonijskih funkcija je da su one određene svojim vrijednostima na otvorenom podskupu domena. Preciznije, važi sljedeće tvrđenje:

Teorema 2.1.4 (Princip identiteta)**.** *Neka je $f\in h(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ i $f=0$ na otvorenom podskupu od Ω. Tada je $f=0$ na cijelom domenu Ω.*

U nastavku uvodimo širu klasu funkcija, subharmonijske funkcije. Prije formalne definicije subharmonijske funkcije, recimo nešto o motivaciji uvođenja ovog pojma. Analog Laplasijana za funkcije jedne promjenljive je operator $\frac{d^2}{dx^2}$. Dakle analog harmonijskih funkcija na $\mathbb{R}$ je nula prostor ovog operatora a to su linearne funkcije. Konveksna funkcija f realne promjenljive je ona čiji grafik zadovoljava sljedeću osobinu: Ako su $(a,f(a))$ i $(b,f(b))$ dvije tačke na grafiku funkcije f, onda grafik funkcije f na intervalu $[a,b]$ leži ispod tetive koja spaja te dvije tačke. Subharmonijske funkcije su analog konveksnih funkcija u teoriji funkcija više promjenljivih pri čemu je grafik harmonijske funkcije zamjena za dio prave tj. grafika linearne funkcije a lopta u $\mathbb{R}^n$ je zamjena za interval. Slika operatora $\frac{d^2}{dx^2}$ kada on djeluje na konveksne funkcije je skup nenegativnih realnih brojeva. Analogno, Laplasijan subharmonijske funkcije je nenegativan.

Definicija 2.1.1. Za funkciju $u : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ kažemo da je subharmonijska funkcija na Ω ako je:

1. poluneprekidna odozgo na Ω i

2. za svako $x \in \Omega$ postoji R tako da je $\overline{B}(x, R) \subset \Omega$ i važi

$$u(x) \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)dm(y), \text{ za svaku loptu } \overline{B}(x,r) \subset \Omega, \ 0 < r \leq R.$$

Subharmonijske funkcije se mogu opisati na više načina. Često ćemo u nastavku koristiti sljedeći način identifikacije subharmonijske funkcije.

Propozicija 2.1.5. *Za funkciju $u \in C^2(\Omega)$ važi: u je subharmonijska $\Leftrightarrow \Delta u \geq 0$.*

Ako je f harmonijska funkcija onda je $|f|^p$ subharmonijska funkcija za $p \geq 1$. Ovo tvrdjenje se dobija primjenom Jensenove integralne nejednakosti i osobine srednje vrijednosti harmonijske funkcije preciznije Teoreme 2.1.2. Budući da će se spomenuta subharmoničnost koristiti više puta u nastavku, navodimo ovu osobinu u okviru sljedeće propozicije.

Propozicija 2.1.6. *Ako je f harmonijska na Ω onda je $|f|^p$ subharmonijska za svako $p \geq 1$.*

Primjetimo da se Propozicija 2.1.6 u slučaju $p \geq 2$ može dokazati i korišćenjem Propozicije 2.1.5 i Leme 1.2.1.

Teorema 2.1.7 (Strogi princip maksimuma [89]). *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i povezan. Neka je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ subharmonijska i*

$$F := \sup\{f(x) : x \in \Omega\} < +\infty.$$

Onda postoje dvije mogućnosti. Ili važi

1. *$f(x) < F$ za svako $x \in \Omega$ ili*

2. *$f(x) = F$ za svako $x \in \Omega$.*

Ako je f superharmonijska, onda se sup *mijena sa* inf *i znak nejednakosti u 1 se obrće. Ako je f harmonijska, onda f ne postiže niti supremum, niti infinum osim ako je f konstanta.*

Dokaz. Treba da dokažemo da ako je $f(y) = F$ za neko $y \in \Omega$, onda je $f(x) = F$ za svako $x \in \Omega$. Neka je $B \subset \Omega$ lopta sa centrom u y. Kako je funkcija f subharmonijska, to važi:

$$m(B)F \leq \int_B f(x)dm(x) \leq \int_B Fdm(x) = m(B)F,$$

pa je $F(x) = f$ za skoro svako $x \in B$. Izaberimo proizvoljnu tačku $x \in B$. Postoji niz x_j u B koji konvergira ka x takav da je $f(x_j) = F$. Kako je f odozgo poluneprekidna, imamo da je

$$F = \lim_{j\to\infty} f(x_j) \leq f(x) \leq F,$$

pa je $f(x) = F$. Dakle, zaključujemo da je $f(x) = F$, za svako $x \in B$.

Sada neka je x proizvoljna tačka iz Ω i C neprekidna kriva koja povezuje y sa x (koja postoji jer je Ω povezan). Ova kriva može biti definisana neprekidnom funkcijom $c : [0,1] \to \Omega$ za koju je $c(0) = y$ i $c(1) = x$. Neka je

$$T = \max_{f(c(t))=F} t. \tag{2.2}$$

Ova vrijednost postoji zbog neprekidnosti funkcije c i poluneprekidnosti funkcije f. Dokazaćemo da je $T = 1$, što će značiti da je $f(x) = F$. Naime, ako je $0 \leq T < 1$, onda postoji lopta $B_T \subset \Omega$ sa centrom u $c(T) \in \Omega$ (jer je Ω otvoren). Na osnovu razmatranja u prethodnom pasusu, $f(z) = F$ za svako $z \in B_T$. Zbog neprekidnosti funkcije c, postoji $s > T$ takvo da $c(s) \in B_T$, pa je $f(c(s)) = F$ što je kontradikcija sa (2.2). □

Navedimo i slabi princip maksimuma.

Teorema 2.1.8 (Slabi princip maksimuma [89])**.** *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i povezan. Neka je $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ poluneprekidna odozgo, subharmonijska na Ω i*

$$F := \sup\{f(x) : x \in \partial\Omega\} < +\infty.$$

Onda važi

$$f(x) \leq F \text{ za svako } x \in \Omega.$$

Ako je $0 < p < 1$ i f harmonijska funkciija onda $|f|^p$ ima subharmonijsko ponašanje i predstavlja zamjenu za subharmoničnost funkcije $|f|^p$ kada je $p \geq 1$. Ovo je klasičan rezultat koji je dokazan u [48] (Lemma 2, sekcija IV.9). Navodimo ga u okviru sljedeće propozicije.

Propozicija 2.1.9 (Subharmonijsko ponašanje [48])**.** *Ako je $f \in h(\Omega)$ i $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$, onda za $p > 0$ važi:*

$$|f(x)|^p \leq \frac{C_p}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dm(y). \tag{2.3}$$

Dokaz. U slučaju kada je $p \geq 1$, prema Propoziciji 2.1.6 funkcija $|f|^p$ je subharmonijska tj. važi nejednakost (2.3) sa $C_p = 1$. Ostaje da dokažemo slučaj kada je $0 < p < 1$. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $B(x, r) = \mathbb{B}$ i $\int_{\mathbb{B}} |f(y)|^p dm(y) = 1$. Sa ovim pretpostavkama nejednakost (2.3) se svodi na

$$|f(x)|^p \leq C_p \tag{2.4}$$

pa je dovoljno dokazati ovu nejednakost. Uvedimo oznaku

$$M_p(f, \rho) = \left(\int_{S_\rho} |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}, \ 0 < \rho < 1$$

i

$$M_\infty(f, \rho) = \sup_{S_\rho} |f(\zeta)|$$

gdje je S_ρ sfera poluprečnika ρ. Takođe možemo pretpostaviti da je $M_\infty(f, \rho) \geq 1$, za svako $0 < \rho < 1$, jer inače ne bismo imali šta dokazati. Pošto je $0 < p < 1$, očigledna je nejednakost

$$M_1(f, \rho) \leq (M_p(f, \rho))^p (M_\infty(f, \rho))^{1-p}, \ 0 < \rho < 1. \tag{2.5}$$

Na osnovu standardnih procjena Puasonovog jezgra za loptu važi

$$f(y) = \frac{\rho^2 - |y|^2}{\rho \omega_{n-1}} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{|y - \zeta|^n}$$

za $y \in B_\rho$ pa za $0 \leq |y| = s < \rho$ važi

$$|f(y)| \leq \frac{\rho^2 - s^2}{\rho \omega_{n-1}} \int_{S_\rho} \frac{f(\zeta) d\sigma(\zeta)}{(\rho - s)^n} = \frac{\rho + s}{\rho(\rho - s)^{n-1} \omega_{n-1}} \int_{S_\rho} |f(\zeta)| d\sigma(\zeta).$$

Zato je

$$\sup_{S_s} |f(y)| \leq (1 + \frac{s}{\rho})(1 - \frac{s}{\rho})^{1-n} M_1(f, \rho) \leq 2(1 - \frac{s}{\rho})^{1-n} M_1(f, \rho)$$

za $0 < s < \rho$. Dakle, kada je $0 < s < \rho$ imamo sljedeću procjenu

$$M_\infty(f, s) \leq 2(1 - \frac{s}{\rho})^{1-n} M_1(f, \rho). \tag{2.6}$$

Sada uzmimo da je $s = \rho^a$, gdje je $a > 1$. Kasnije ćemo izabrati a dovoljno blisko 1. Iz (2.5) i (2.6) dobijamo

$$M_\infty(f, \rho^a) \leq 2(1 - \frac{\rho^a}{\rho})^{1-n} (M_p(f, \rho))^p (M_\infty(f, \rho))^{1-p}.$$

Nakon logaritmovanja te integracije gornje nejednakosti u odnosu na $\frac{d\rho}{\rho}$ dobijamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log\left(M_\infty(f,\rho^a)\right)\frac{d\rho}{\rho} \le C_a + p\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log(M_p(f,\rho))\frac{d\rho}{\rho} + (1-p)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log(M_\infty(f,\rho))\frac{d\rho}{\rho}.$$

Prvi integral u sumi s desne strane nejednakosti je ograničen konstantom jer je

$$\int_0^1 M_p^p(f,\rho)\rho^{n-1}d\rho \le 1$$

po pretpostavci (uslov normalizacije), pa dobijamo

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log\left(M_\infty(f,\rho^a)\right) \le C_a' + (1-p)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log(M_\infty(f,\rho))\frac{dr}{r}.$$

Dalje dobijamo

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{1}{2^a}}^{1} \log\left(M_\infty(f,\rho)\right)\frac{d\rho}{\rho} \le C_a' + (1-p)\int_{\frac{1}{2}}^{1} \log(M_\infty(f,\rho))\frac{d\rho}{\rho}. \tag{2.7}$$

S druge strane, pošto je $M_\infty(f,\rho) \ge 1$, imamo da je

$$\int_{\frac{1}{2^a}}^{1} \log\left(M_\infty(f,\rho)\right)\frac{d\rho}{\rho} \ge \int_{\frac{1}{2}}^{1} \log(M_\infty(f,\rho))\frac{d\rho}{\rho}.$$

Izaberimo a blisko 1 takvo da je $\frac{1}{a} > 1-p$. Sada iz (2.7) dobijamo da je

$$\int_{\frac{1}{2^a}}^{1} \log\left(M_\infty(f,\rho)\right)\frac{dr}{r} \le C_p',$$

pa za bar jedno ρ_0 je $M_\infty(f,\rho_0) \le C_p$ tj. $\sup_{S_{\rho_0}} |f(\zeta)| \le C_p$. Konačno, na osnovu principa maksimuma dobijamo da važi (2.4). $\square$

U nastavku ćemo se baviti integralnim sredinama neprekidnih funkcija definisanih na oblasti Ω, u oznaci $M_p(f,r)$, koje se definišu analogno sa definicijom integralnih sredina neprekidnih funkcija na jediničnom disku u poglavlju 1.4. Naime, za $0 < p < \infty$ i $0 < r \le \epsilon$ i definišuću funkciju ρ uvedimo veličinu

$$M_p(f,r,\rho) = \left\{\int_{\Gamma_{r,\rho}} |f(\zeta)|^p d\sigma_{r,\rho}(\zeta)\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{2.8}$$

sa očiglednom modifikacijom u slučaju $p = +\infty$. Ako je jasno o kojoj definišućoj funkciji se radi, pisaćemo samo $M_p(f,r)$ (umjesto $M_p(f,r,\rho)$), Γ_r (umjesto $\Gamma_{r,\rho}$) i σ_r (umjesto $\sigma_{r,\rho}$). Biramo definišuću funkciju $r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ i posmatrajmo integralne sredine $M_p(f,r)$ gdje je f harmonijska funkcija, $1 \leq p < \infty$, $0 < r \leq \epsilon$. Dokazaćemo njihovu osobinu koja će se dalje koristiti za dokazivanje teoreme o ekvivalenciji normi na prostorima sa mješovitom normom. Iz teorije analitičkih Hardijevih prostora na jediničnom disku, poznato je da su odgovarajuće integralne sredine monotone funkcije od r−a i to rastuće, za svako $p > 0$. Budući da razmatramo harmonijski slučaj i to znatno opštije domene, integralne sredine neće imati ovu osobinu za $0 < p < 1$ dok će za $1 \leq p < \infty$ imati osobinu "kvazi-monotonosti". Zbog glatkosti granice $\partial\Omega$, postoji $\epsilon > 0$ koje zavisi od definišuće funkcije od Ω takvo da je projekcija $\pi : \Omega \setminus \Omega_\epsilon \to \partial\Omega$ dobro definisano i glatko preslikavanje. Takođe, za $0 \leq r \leq \epsilon$, restrikcija $\pi|_{\partial\Omega_r}$ je bijektivno preslikavanje i svako $\zeta \in \partial\Omega_r$ se može predstaviti na sljedeći način

$$\zeta = \pi(\zeta) + r\mathbf{n}_{\pi(\zeta)}$$

gdje je $\mathbf{n}_\eta$ jedinični unutrašnji vektor normale na $\partial\Omega$ u $\eta \in \partial\Omega$. U sljedećoj teoremi navodimo bitnu osobinu integralnih sredina harmonijskih funkcija koja se prvi put pojavljuje kod Steina 1972. (vidjeti [133]). Ovdje će biti dokazana koristeći pristup iz [106].

Teorema 2.1.10 ([106]). *Neka je $1 < p < \infty$ i $f \in h(\Omega)$ nekonstantna funkcija. Tada postoji pozitivna konstanta C, koja zavisi samo od definišuće funkcije od Ω, takva da*

$$M_p(f,r) \leq CM_p(f,s), \text{ za } 0 < s < r \leq \epsilon. \tag{2.9}$$

Dokaz. Neka je

$$\tilde{M}_p(f,r)^p = \int_{\partial\Omega} |f(\eta + r\mathbf{n}_\eta)|^p d\sigma(\eta) \tag{2.10}$$

Dokazaćemo prvo da su ovako definisane funkcije $\tilde{M}_p(f,r)$ od $0 < r \leq \epsilon$, opadajuće funkcije i to posmatrajući njihov izvod.

Pošto je $(|f|^2 + \delta)^{\frac{p}{2}} \in C^2$, gdje je $0 < \delta < 1$, koristeći Grinov identitet (1.4) dobijamo

$$\int_{\Omega_r} (\Delta|f(x)|^2 + \delta)^{\frac{p}{2}} dm(x) = \int_{\Gamma_r} D_{\mathbf{n}}(|f(\zeta)| + \delta)^{\frac{p}{2}} d\sigma_r(\zeta). \tag{2.11}$$

Sada koristeći bijektivno preslikavanje $\pi|_{\Gamma_r}$, dobijamo vezu između integrala po Γ_r i $\partial\Omega$:

$$\int_{\Gamma_r} D_{\mathbf{n}}|f(\zeta)|^p d\sigma_r(\zeta) \leq C \int_{\partial\Omega} D_{\mathbf{n}}|f(\eta + r\mathbf{n}_\eta))|^p d\sigma(\eta) \tag{2.12}$$

za neku pozitivnu konstantu C. Pošto je

$$D_{\mathbf{n}}|f(\eta + r\mathbf{n}_\eta))|^p = -\frac{d}{ds}|f(\eta + s\mathbf{n}_\eta))|^p|_{s=r},$$

imamo

$$\int_{\partial\Omega} D_{\mathbf{n}}|f(\eta + r\mathbf{n}_\eta))|^p d\sigma(\eta) = -\frac{d}{dr}\int_{\partial\Omega} |f(\eta + r\mathbf{n}_\eta))|^p d\sigma(\eta). \tag{2.13}$$

Sada iz (2.12) i (2.13) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Gamma_r} D_{\mathbf{n}}(|f(\zeta)|^2+\delta)^{\frac{p}{2}} d\sigma_r(\zeta) &= \int_{\Gamma_r} D_{\mathbf{n}}|f(\zeta)|^p d\sigma_r(\zeta)\\ &\le -C\frac{d}{dr}\int_{\partial\Omega}|f(\eta + r\mathbf{n}_\eta))|^p d\sigma(\eta). \end{aligned}\tag{2.14}$$

Pošto se jednostavnim računom, kao u dokazu Leme 1.2.1 dobija

$$\begin{aligned}\Delta(|f|^2+\delta)^{\frac{p}{2}} &= \frac{p}{2}(\frac{p}{2}-1)(|f|^2+\delta)^{\frac{p}{2}-2}|\nabla(|f|^2+\delta)|^2 + \frac{p}{2}(|f|^2+\delta)^{\frac{p}{2}-1}\Delta(|f|^2+\delta)\\ &\ge p(|f|^2+\delta)^{\frac{p}{2}-2}[(p-1)|f|^2+\delta]|\nabla f|^2, \end{aligned}\tag{2.15}$$

na osnovu Fatuove leme imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0}\int_{\Omega_r}(\Delta|f(x)|^2+\delta)^{\frac{p}{2}} dm(x) &\ge \int_{\Omega_r}\liminf_{\delta\to 0}(\Delta|f(x)|^2+\delta)^{\frac{p}{2}} dm(x)\\ &\ge \int_{\Omega_r} p(p-1)|f|^{p-2}\Delta|f(x)|^2 dm(x). \end{aligned}\tag{2.16}$$

Dakle, iz (2.11) i (2.14) se dobija sljedeća nejednakost

$$\frac{d}{dr}\int_{\partial\Omega}|f(\eta + r\mathbf{n}_\eta))|^p d\sigma(\eta) \le -\frac{1}{C}\int_{\Omega_r} p(p-1)|f|^{p-2}\Delta|f(x)|^2 dm(x), \tag{2.17}$$

čime smo dokazali da je $\tilde{M}_p(f,r)$ opadajuća funkcija od r-a za $1 < p < \infty$. Štaviše, ove funkcije su strogo opadajuće. Naime ako bi za neko $0 < r_0 \le \epsilon$ bilo $\frac{d}{dr}\tilde{M}_p(f,r_0) = 0$, onda bi zbog (2.17) moralo da važi $\nabla f = \mathbf{0}$ na Ω_{r_0}, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Kada smo dokazali da su $\tilde{M}_p(f,r)$ opadajuće funkcije, lako se može dokazati da su $M_p(f,r)$ kvazi-opadajuće kada je $0 < r \le \epsilon$. Naime, koristićemo projekciju $\pi|_{\Omega_r}$ i smjenu u integralu $\pi(\zeta) = \eta$ prilikom koje će nam biti potrebna determinanta Jakobijana $J\pi^{-1}|_{\Gamma_r} \asymp 1$. Dakle, za $0 < s < r \le \epsilon$ važi sljedeće:

$$\begin{aligned}M_p(f,r)^p &= \int_{\Gamma_r}|f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) = \int_{\Gamma_r}|f(\pi(\zeta) + r\mathbf{n}_{\pi(\zeta)})|^p d\sigma(\zeta)\\ &\asymp \int_{\partial\Omega}|f(\eta + r\mathbf{n}_\eta)|^p d\sigma(\eta) \le \int_{\partial\Omega}|f(\eta + s\mathbf{n}_\eta)|^p d\sigma(\eta) \le CM_p^p(f,s). \qquad \square \end{aligned}$$

U slučaju kada je $0 < p < 1$, integralne sredine $M_p(f,r)$ nemaju ovu osobinu, ali imaju osobinu koja će biti navedena u sljedećem tvrđenju. Ovo tvrđenje je poznat rezultat iz [64] (Lema 3). Dokazaćemo ga koristeći sličan pristup.

Teorema 2.1.11 ([64])**.** *Neka je $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$ i $f \in h(\Omega)$. Tada postoje konstante c_1 i c_2, $\frac{1}{2} < c_1 < 1 < c_2 < \frac{3}{2}$ takve da važi*

$$M_p^q(f,r) \leq \frac{C}{r}\int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^q(f,s)ds, \tag{2.18}$$

za $0 < r < \epsilon/c_2$, gdje C zavisi samo od p, q i Ω.

Dokaz. Pošto je $\nabla r(x) \neq \mathbf{0}$ na $\partial\Omega$ i $\partial\Omega$ je kompaktan skup, možemo izabrati $\epsilon > 0$ dovoljno malo da postoji konstanta δ, $0 < \delta < 1$ takva da je $0 < \delta \leq |\nabla r(x)| < \frac{1}{\delta}$ kada $x \in \Omega$, $r(x) < \epsilon$. Ako je $0 < r < \epsilon$, primjetimo da za $x \in \Gamma_r$ $(r(x) = r)$ imamo $B(x, \frac{\delta r}{2}) \subset \Omega$. Važi i strožija inkluzija:

$$B(x, \frac{\delta r}{2}) \subset \{y : \ (1 - \frac{\delta}{2})r < r(y) < (1 + \frac{\delta}{2})r\} := S(r). \tag{2.19}$$

Naime, ako $y \in B(x, \frac{\delta r}{2})$, $x \in \Gamma_r$, onda je $(1-\frac{\delta}{2})r < r(y) < (1+\frac{\delta}{2})r$. Kako je $0 < \delta < 1$, očigledno je $\frac{1}{2} < 1 - \frac{\delta}{2} < 1$ i $1 < 1 + \frac{\delta}{2} < \frac{3}{2}$. Uvedimo oznake $c_1 = 1 - \frac{\delta}{2}$ i $c_2 = 1 + \frac{\delta}{2}$. Dokazaćemo nejednakost (2.18) u nekoliko koraka.

- Prvo ćemo razmatrati slučaj $p = \infty$. Kako je $\overline{B}(x, \frac{\delta r}{2}) \in \Omega$ i $q > 0$ možemo koristiiti Propoziciju 2.1.9 da dobijemo

$$|f(x)|^q \leq \frac{C_q}{r^n}\int_{B(x,\frac{\delta r}{2})} |f(y)|^q dm(y). \tag{2.20}$$

  Sada na osnovu (2.19) važi

$$\begin{aligned} M_\infty^q(f,r) &\leq \sup_{x\in\Gamma_r} \frac{C_q}{r^n}\int_{S(r)} |f(y)|^q \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})} dm(y) \\ &\leq \frac{C_q}{r^n}\int_{c_1 r}^{c_2 r} M_\infty^q(f,s)ds \int_{\Gamma_r} \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})} d\sigma(y) \\ &\leq C r^{-n} r^{n-1} \int_{c_1 r}^{c_2 r} M_\infty^q(f,s)ds = \frac{C}{r}\int_{c_1 r}^{c_2 r} M_\infty^q(f,s)ds. \end{aligned}$$

- Sada razmatramo slučaj kada je $0 < p \leq q < \infty$. Ponovo ćemo koristiti Propoziciju 2.1.9 i (2.19). Važe sljedeće nejednakosti:

$$\int_{\Gamma_r} |f(x)|^p d\sigma_r(x) \leq \frac{C_p}{r^n}\int_{\Gamma_r}\int_{S(r)} |f(y)|^p \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})} dm(y) d\sigma_r(x)$$

$$= \frac{C_p}{r^n} \int_{S(r)} |f(y)|^p dm(y) \int_{\Gamma_r} \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})} d\sigma_r(x)$$
$$\leq C_p r^{-n} r^{n-1} \int_{S(r)} |f(y)|^p dm(y) = \frac{C_p}{r} \int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^p(f,s) ds.$$

Dakle, imamo nejednakost:

$$M_p^p(f,r) \leq \frac{C_p}{r} \int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^p(f,s) ds. \tag{2.21}$$

Ako je $p = q$ onda smo dokazali nejednakost (2.18). Ako je $p < q$, tada je $\frac{q}{p} > 1$. Stepenovanjem nejednakosti (2.21) sa $\frac{q}{p}$ i primjenom Helderove nejednakosti sa konjugovanim eksponentima $\frac{q}{p}$ i $\frac{q}{q-p}$, u odnosu na mjeru $r^{-1}ds$, dobijamo

$$M_p^q(f,r) \leq C \left(r^{-1} \int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^q(f,s) ds \right)^{\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p}} \left(r^{-1} \int_{c_1 r}^{c_2 r} ds \right)^{\frac{q-p}{q} \cdot \frac{q}{p}}$$
$$= \frac{C}{r} \int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^q(f,s) ds.$$

- Ostaje da dokažemo nejednakost (2.18) u slučaju $p > q > 0$. Tada je $\frac{p}{q} > 1$. U ovom slučaju ćemo osim Propozicije 2.1.9 i inkluzije (2.19) koristiti integralnu nejednakost Minkovskog i Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima $\frac{p}{q}$ i $\frac{p}{p-q}$ u odnosu na mjeru $d\sigma_s$. Naime, izvodimo sljedeće nejednakosti:

$$M_p^q(f,r) = \left(\int_{\Gamma_r} (|f(x)|^q)^{\frac{p}{q}} d\sigma_r(x) \right)^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq \left[\int_{\Gamma_r} \left(\frac{C_q}{r^n} \int_{B(x,\frac{\delta r}{2})} |f(y)|^q dm(y) \right)^{\frac{p}{q}} d\sigma_r(x) \right]^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq \frac{C}{r^n} \left[\int_{\Gamma_r} \left(\int_{c_1 r}^{c_2 r} ds \int_{\Gamma_s} |f(y)|^q \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})}(y) d\sigma_s(y) \right)^{\frac{p}{q}} d\sigma_r(x) \right]^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq \frac{C}{r^n} \int_{c_1 r}^{c_2 r} \left[\int_{\Gamma_r} d\sigma_r(x) \left(\int_{\Gamma_s} |f(y)|^q \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})}(y) d\sigma_s(y) \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{q}{p}} ds$$
$$\leq \frac{C}{r^n} \int_{c_1 r}^{c_2 r} ds \left[\int_{\Gamma_r} d\sigma_r(x) \left(\int_{\Gamma_s} |f(y)|^p \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})} d\sigma_s(y) \right) \left(\int_{\Gamma_s} \chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})}(y) d\sigma_s(y) \right)^{\frac{p-q}{q}} \right]^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq Cr^{-n}r^{(n-1)\frac{p-q}{p}}\int_{c_1 r}^{c_2 r} ds\left(\int_{\Gamma_r}|f(y)|^p d\sigma_r(y)\cdot\int_{\Gamma_r}\chi_{B(x,\frac{\delta r}{2})}(y)d\sigma_r(x)\right)^{\frac{q}{p}}$$
$$\leq Cr^{-n}r^{(n-1)(1-\frac{q}{p})}r^{(n-1)\frac{q}{p}}\int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^q(f,s)ds = \frac{C}{r}\int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^q(f,s)ds.$$

□

Bez dokaza navodimo još jednu lemu u vezi sa integralnim sredinama, koja se može pronaći u [64] (Lema 4) a koju ćemo koristiti u glavi 3, za dokazivanje Teoreme 3.1.1.

Lema 2.1.12 ([64]). *Neka je* $0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$ *i* $\beta > -1$. *Onda za* $f \in h(\Omega)$ *važi:*

$$M_\infty^q(f,\epsilon) \leq C\int_0^\epsilon r^\beta M_p^q(f,r)dr.$$

2.2 Definicije prostora funkcija sa mješovitom normom

Prvo ćemo definisati prostor $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ koji je glavni objekat istraživanja. Definišimo mjeru $d\lambda$ on $(0,\epsilon)$ sa $d\lambda(r) = \frac{dr}{dist(\partial\Omega_{r,\rho},\partial\Omega)}$. Za $f \in h(\Omega)$, gdje je Ω ograničena oblast (vidjeti poglavlje 1.1) sa glatkom granicom, stavimo

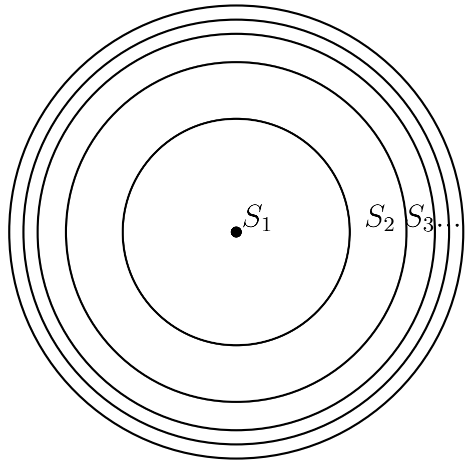
$$\|f\|^*_{B_\alpha^{p,q,\rho}} = \left\{\int_0^\epsilon (\operatorname{dist}(\partial\Omega_{r,\rho},\partial\Omega))^{\alpha q-1}M_p^q(f,r,\rho)dr\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{2.22}$$

gdje je $\alpha > 0,\ 0 < p \leq \infty,\ 0 < q < \infty$. Interesuje nas prostor sa mješovitom normom

$$B_\alpha^{p,q,\rho}(\Omega) = \{f \in h(\Omega) : \|f\|^*_{B_\alpha^{p,q,\rho}} < \infty\}.$$

Prostor $B_\alpha^{p,q,\rho}(\Omega)$ je nezavisan od izbora definišuće funkcije od Ω i bilo koje dvije različite definišuće funkcije povlače ekvivalentne norme. Prema tome, fiksiramo definišuću funkciju ρ i jednostavno pišemo $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ umjesto $B_\alpha^{p,q,\rho}(\Omega)$. Naime, biramo definišuću funkciju $r(x) = \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. Takođe ćemo izostavljati donji indeks ρ i pisati $\Omega_r, \partial\Omega_r, d\sigma_r$ i $M_p(f,r)$ umjesto $\Omega_{r,\rho}, \partial\Omega_{r,\rho}, d\sigma_{r,\rho}$ i $M_p(f,r,\rho)$ redom, ako nema dvosmislenosti. Takođe, označavaćemo $\partial\Omega_r$ sa Γ_r zbog jednostavnosti notacije. $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ je Banahov prostor za $1 \leq p \leq \infty$ i $1 \leq q < \infty$. Primjetimo da je

$$\operatorname{dist}(\Gamma_r,\partial\Omega) = \inf_{\zeta\in\Gamma_r}\operatorname{dist}(\zeta,\partial\Omega) = r,$$



Slika 2.1: Dekompozicija oblasti Ω

pa prema tome, možemo koristiti ekvivalentnu normu

$$\|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha} = \int_0^\epsilon r^{\alpha q-1} M_p^q(f,r)dr. \tag{2.23}$$

Modifikacija norme u slučaju $q = +\infty$ je standardna. Ova klasa prostora uključuje težinske Bergmanove prostore: $b^p_\gamma(\Omega) = B^{p,p}_{(\gamma+1)/p}(\Omega)$, $\gamma > -1$, $0 < p < \infty$.

Sada definišemo prostor funkcija sa mješovitom normom koji se sastoji od Lebeg mjerljivih funkcija. Koristićemo dekompoziciju oblasti Ω. Neka je $r_0 = \max\{r(x) : x \in \Omega\} > 0$ i stavimo da je $r_j = \frac{r_0}{2^j}$ za svako $j \in \mathbb{N}$. Za $j \in \mathbb{N}$, stavimo

$$S_j = \{x \in \Omega : r_j < r(x) \leq r_{j-1}\}.$$

Očigledno je $\Omega = \cup_{j=1}^\infty S_j$. Primjetimo da u specijalnom slučaju kada je $n = 2$ i $\Omega = \mathbb{U}$, skupovi S_j predstavljaju prstene jediničnog diska koji se sužavaju kako $j \to \infty$. Naime, tada je

$$S_j = \{x \in \mathbb{U} : 1 - \frac{1}{2^{j-1}} < |x| \leq 1 - \frac{1}{2^j}\},\ j = 1, 2, ...$$

i dekompozicija diska je prikazana na slici.

Koristeći konstante c_1 i c_2 iz Teoreme 2.1.11 definišemo skupove

$$\tilde{S}_j = \{x \in \Omega : c_1^2 r_j < r(x) \leq c_2^2 r_{j-1}\}. \tag{2.24}$$

Jasno je da je $S_j \subset \tilde{S}_j$, pa možemo skupove $\tilde{S}_j$ posmatrati kao povećanje skupova S_j. Skupovi S_j su naravno disjunktni, skupovi $\tilde{S}_j$ imaju sljedeću slabiju, ali za nas dovoljnu osobinu:

$$\tilde{S}_j \subset \cup_{k=-2}^{2} S_{j+k} \tag{2.25}$$

i $\tilde{S}_j \cap S_l = \emptyset$ za $|j-l| > 2$.

Za datu Borelovu mjeru μ na Ω, pozitivne i fiksirane konačne p i q, definišemo $L^{p,q}(\Omega, d\mu)$ kao skup svih Borel-mjerljivih funkcija f na Ω takvih da je

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mu)} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p d\mu(x) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Drugim riječima, ako stavimo

$$a_j(f) = \left(\int_{S_j} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} 2^{j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})},$$

onda $\|f\|_{L^{p,q}(\mu)} = \|a_j(f)\|_{l^q}$.

Takođe, definišemo $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ za $\alpha > 0$ kao skup svih Lebeg mjerljivih funkcija f na Ω takvih da

$$\|f\|_{L^{p,q}_\alpha} = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-\alpha q)} \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Za $0 < p < \infty$ i $q = \infty$, definišemo $L^{p,\infty}_\alpha(\Omega)$ kao prostor svih Lebeg mjerljivih funkcija f na Ω takvih da

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\alpha} = \sup_{j\geq 1} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{1}{p}} 2^{j(\frac{1}{p}-\alpha)} < \infty.$$

Jasno je da se ove definicije proširuju i na slučaj $p = +\infty$ na standardan način.

U nastavku definišemo prostor sa mješovitom normom $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$ koristeći (kvazi) normu iz prostora $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Naime, prostor $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$ je prostor svih Lebeg mjerljivih funkcija na Ω, koje iščezavaju na Ω_ϵ ($f = 0$ na Ω_ϵ), takvih da je integral iz (2.23) konačan tj. imamo (kvazi) normu na ovom prostoru

$$\|f\|_{\tilde{L}^{p,q}_\alpha} = \left\{ \int_0^\epsilon r^{\alpha q-1} M_p^q(f,r) dr \right\}^{1/q}. \tag{2.26}$$

Ovaj prostor ne uključuje $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, pa ćemo posmatrati direktnu sumu ovog prostora sa drugim prostorom koji definišemo u nastavku. Za $0 < s < +\infty$, označićemo sa $\tilde{L}^s(\Omega)$ prostor Lebeg mjerljivih funkcija na Ω koje iščezavaju na $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$, takve da $\int_{\Omega_\epsilon} |f(x)|^s dm(x) < +\infty$. Stavimo $\tilde{L}^{p,q,s}_\alpha(\Omega) = \tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega) \oplus \tilde{L}^s(\Omega)$, što znači da za svaku funkciju $f \in \tilde{L}^{p,q,s}_\alpha(\Omega)$, važi $\|f\|_{\tilde{L}^{p,q,s}_\alpha} = \|f\chi_{\Omega\setminus\Omega_\epsilon}\|_{\tilde{L}^{p,q}_\alpha} + \|f\chi_{\Omega_\epsilon}\|_{\tilde{L}^s}$. Sada imamo $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \subset \tilde{L}^{p,q,s}_\alpha(\Omega)$. Vidjećemo u glavi 4 da je Bergmanova projekcija ograničen operator iz $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$ u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, pod određenim uslovima na parametre, i takođe je kompaktan operator iz $\tilde{L}^s(\Omega)$ u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, što su glavni rezultati iz [124].

3. Karlesonove mjere za težinske prostore sa mješovitom normom

U ovoj glavi, dokazujemo teoreme utapanja Karlesonovog tipa za težinske prostore sa mješovitom normom $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$, definisane na glatkim ograničenim oblastima $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Naglašavamo da ćemo imati utapanje u prostore sa mješovitom normom $L^{p,q}(\Omega,\mu)$, za razliku od uobičajenog slučaja utapanja u $L^p(\Omega,\mu)$. Teorema utapanja iz poglavlja 3.1 predstavlja glavni rezultat iz [123], dok je teorema koja se odnosi na kompaktno utapanje iz 3.2, jedan od rezultata dobijenih u okviru zajedničkog rada sa mentorom, koji je pod recenzijom. U ovoj glavi predstavljamo i ostale pomoćne rezultate iz [123] koji vode ka glavnoj teoremi utapanja, kao i pomoćne rezultate iz spomenutog rada pod recenzijom. Dobijeni rezultati su motivisani člankom [65]. Jedan od rezultata dobijenih u tom radu je karakterizacija Karlesonovih mjera za (netežinske) prostore sa mješovitom normom. Generalizujemo te rezultate dopuštajući težine u obliku stepena. Novina je korišćenje reprezentacije težinskog Bergmanovog jezgra, koju je dobio Engliš, nakon publikacije [65], vidjeti [46].

3.1 Mjere Karlesona za prostore $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$

Sada ćemo formulisati i dokazati teoremu o ekvivalenciji određenih normi na prostorima sa mješovitom normom.

Teorema 3.1.1. *Neka je $1 < p, q < \infty$ i $\alpha > 0$. Onda imamo*

$$\|f\|^q_{B_\alpha^{p,q}} \asymp \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \Big]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p} - \beta - 1)}, \qquad f \in h(\Omega),$$

gdje je $\beta = \alpha q - 1$.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti osobinu integralnih sredina harmonijskih funkcija navedenu u Teoremi 2.1.10. Neka je J prirodan broj takav da $r_J > \epsilon$ i $r_{J+1} \le \epsilon$, gdje je, kao i u poglavlju 2.2, $r_j = \frac{r_0}{2^j}$ za $j = 1, 2, \ldots$. Stavimo da je $\Omega_J = \{x \in \Omega : r(x) \geq r_{J+1}\}$. Primjetimo da $r_j \to 0$ kada $j \to \infty$. Sada koristeći (2.23) imamo

$$\begin{aligned} \|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha} &= \int_0^\epsilon r^\beta M_p^q(f,r)dr \\ &= \int_{r_{J+1}}^\epsilon r^\beta M_p^q(f,r)dr + \sum_{j=J+2}^{\infty} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr \end{aligned} \tag{3.1}$$

Prvo ćemo procijeniti beskonačnu sumu $\sum_{j=J+2}^{\infty} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr$ procjenjujući svaki član sume. Koristeći (2.9) dva puta, za $j \geq J+2$ imamo

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr &\leq C M_p^q(f,r_j) \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta dr \\ &= C\left(M_p^p(f,r_j)\frac{r_0^{(\beta+1)\frac{p}{q}}}{2^{j(\beta+1)\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C\left(\int_{r_{j+1}}^{r_j} M_p^p(f,r) r^{(\beta+1)\frac{p}{q}-1}dr\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C 2^{(j+1)(\frac{q}{p}-(\beta+1))}\left(\int_{r_{j+1}}^{r_j}\int_{\Gamma_r}|f(\zeta)|^p d\sigma_r(\zeta)dr\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leq C\left[\int_{S_{j+1}}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{(j+1)(\frac{q}{p}-1-\beta)}. \end{aligned}$$

Stoga, sumacija po j nam daje

$$\sum_{j=J+2}^{\infty}\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr \leq C\sum_{j=J+3}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1-\beta)}.$$

Takođe, koristeći (2.9) dva puta, slično dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr &\geq C M_p^q(f,r_{j-1}) \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta dr \\ &= C\left(M_p^p(f,r_{j-1})\frac{r_0^{(\beta+1)\frac{p}{q}}}{2^{(j-1)(\beta+1)\frac{p}{q}}}\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\geq C\left(\int_{r_{j-1}}^{r_{j-2}} M_p^p(f,r) r^{(\beta+1)\frac{p}{q}-1}dr\right)^{\frac{q}{p}} \end{aligned}$$

$$\geq C\left[\int_{S_{j-1}}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{(j-1)(\frac{q}{p}-\beta-1)},$$

gdje gornje nejednakosti važe za $j = J+3, J+4, ...$ Dakle, imamo

$$\sum_{j=J+2}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1-\beta)} \leq C\sum_{j=J+3}^{\infty}\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr.$$

Sada ćemo procijeniti $\int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^\beta M_p^q(f,r)dr$. Dobijamo

$$\begin{aligned}\int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^\beta M_p^q(f,r)dr &\leq C r_{J+1}^\beta \sup_{\Omega_J}|f(x)|^q\\ &\leq C r_{J+1}^\beta \sum_{j=1}^{J+1}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\ &\leq C\sum_{j=1}^{J+1}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1-\beta)},\end{aligned}$$

koristeći definicije skupova Ω_J i $S_j,\ j = 1, ..., J+1$ i subharmoničnost od $|f|^p$. S druge strane, koristeći princip maksimuma modula, imamo

$$\sum_{j=1}^{J+1}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1-\beta)} \leq C\sup_{\Omega_J}|f(x)|^q \leq C\sup_{\Omega_\epsilon}|f(x)|^q \leq$$

$$\leq C\sup_{\Gamma_\epsilon}|f(x)|^q = CM_\infty^q(f,\epsilon) \leq C\int_0^\epsilon r^\beta M_p^q(f,r)dr.$$

Koristili smo Lemu 2.1.12 da dobijemo posljednju nejednakost.

□

Primjetimo da $r(x)^\gamma \asymp 2^{-j\gamma}$ na S_j, za $j\in\mathbb{N}$ i $\gamma\in\mathbb{R}$, pa je suma iz Teoreme 3.1.1 samjerljiva sa

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm_\gamma(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)},$$

gdje je $\gamma = \beta\frac{p}{q} = p(\alpha-\frac{1}{q})$ i $dm_\gamma(x) = r(x)^\gamma dm(x)$, kao prije. Naglasimo da ćemo koristiti β da označimo $\alpha q - 1$ i u ostatku glave.

Primjetimo da je suma u Teoremi 3.1.1 zapravo $\|f\|^q_{L^{p,q}_\alpha}$.

Teorema takođe važi za $0 < p, q < \infty$ i može biti dokazana u ovom opštijem slučaju koristeći nejednakost iz Teoreme 2.1.11, umjesto (2.9). Dalja modifikacija dokaza, potrebna u slučaju $0 < p, q < \infty$, je korišćenje subharmonijskog ponašanja $|f|^p$ kao zamjene za subharmoničnost, koja više ne važi za $0 < p < 1$. Naime, može se koristiti Propozicija 2.1.9. Opštija teorema i modifikovan dokaz će kasnije biti navedeni. Za sada nam je dovoljna Teorema 3.1.1.

Za $x, y \in \Omega$, neka je $D(x, y) = r(x)+r(y)+|x-y|$. Granično ponašanje harmonijskog Bergmanovog jezgra se može najefikasnije opisati ovom funkcijom kvazi-udaljenosti. Sljedeća lema je dokazana u [65]. Koristimo ju da dobijemo Propoziciju 3.1.4 koja je potrebna da dobijemo vitalne procjene test funkcija f_x, vidjeti Lemu 3.1.5 dolje. Takođe ju koristimo za dokazivanje ograničenosti Bergmanove projekcije u sljedećoj glavi.

Lema 3.1.2 (vidjeti [65])**.** *Za svako $s > n-1$, postoji konstanta C (koja zavisi od s) takva da za svako $x \in \Omega$ i $0 < r \leq \epsilon$*

$$\int_{\Gamma_r} \frac{d\sigma_r(y)}{D(x,y)^s} \leq \frac{C}{(r(x)+r)^{s-(n-1)}}$$

Dokaz. Za $b > 0$ i proizvoljno $x \in \Omega$ važi $\int_{\Gamma_r \cap B(x,b)} d\sigma_r(y) \leq Cb^{n-1}$. Osim toga, ako je $a > 0$ i $|x-y| \geq a$, onda je $\frac{1}{(r(x)+r+|x-y|)^s} \leq \frac{1}{(r(x)+r+a)^s}$. Sada dobijamo da je za $0 < a < b$

$$\int_{\Gamma_r \cap \{y : a \leq |x-y| < b\}} \frac{1}{(r(x)+r+|x-y|)^s} d\sigma_r(y) \leq \frac{C}{(r(x)+r+a)^s} b^{n-1}.$$

Predstavimo granicu Γ_r kao $\Gamma_r = (\Gamma_r \cap B(x, r(x)+r)) \cup (\Gamma_r \cap B^C(x, r(x)+r))$ gdje je $B^C(x, r(x)+r) = \{y : |y-x| \geq r(x)+r\}$- komplement lopte sa centrom u x i poluprečnikom $r(x)+r$. Sada napravimo podjelu ovog komplementa na disjunktne podskupove tj. predstavimo ga kao beskonačnu uniju

$$B^C(x, r(x)+r) = \cup_{j=1}^{\infty} \{y : 2^{j-1}(r(x)+r) \leq |y-x| < 2^j(r(x)+r)\}.$$

Sada, imajući u vidu da je $D(x,y) = r(x)+r(y)+|x-y| \geq r(x)+r$ za $y \in \Gamma_r$, dobijamo procjenu

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_r} \frac{d\sigma_r(y)}{D(x,y)^s} \\ &= \int_{\Gamma_r \cap B(x, r(x)+r)} \frac{d\sigma_r(y)}{D(x,y)^s} + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{y : 2^{j-1}(r(x)+r) \leq |y-x| < 2^j(r(x)+r)\}} \frac{d\sigma_r(y)}{D(x,y)^s} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{(r(x)+r)^s}(r(x)+r)^{n-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C(2^j(r(x)+r))^{n-1}}{(r(x)+r+2^{j-1}(r(x)+r))^s} \\
&\leq \frac{C}{(r(x)+r)^s}(r(x)+r)^{n-1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{C(2^j(r(x)+r))^{n-1}}{(2^{j-1}(r(x)+r))^s} \\
&= \frac{C}{(r(x)+r)^{s-(n-1)}} + \frac{C}{(r(x)+r)^{s-(n-1)}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j(n-1)}}{2^{(j-1)s}} \\
&= \frac{C}{(r(x)+r)^{s-(n-1)}} + \frac{C2^s}{(r(x)+r)^{s-(n-1)}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j(s-(n-1))}} \\
&= \frac{C}{(r(x)+r)^{s-(n-1)}}.
\end{aligned}
$$

Posljednja jednakost važi jer je red koji se prethodno pojavljuje geometrijski red čija je suma konačna. $\square$

Procjene harmonijskog Bergmanovog jezgra na glatkim ograničenim domenima u $\mathbb{R}^n$ su date u [74]. Međutim, mi trebamo opštije procjene težinskog harmonijskog Bergmanovog jezgra na ograničenim domenima u $\mathbb{R}^n$ sa glatkom granicom, kao što smo ranije napomenuli u poglavlju 1.8. Preciznije, u nastavku ćemo koristiti Propoziciju 1.8.4. Neka je

$$E_\delta(x) = \{y \in \Omega : |y-x| < \delta r(x)\}, \text{ za } x \in \Omega \text{ i } 0 < \delta < 1,$$

kao u poglavlju 1.11. Specijalno, iz Propozicije 1.8.4, za $x = y$ dobijamo da je

$$|R_\gamma(x,x)| \asymp \frac{1}{r(x)^{n+\gamma}}. \tag{3.2}$$

Takođe, primjetimo da ako $\delta \in (0,1)$, onda imamo

$$(1-\delta)r(x) < r(y) < (1+\delta)r(x) \tag{3.3}$$

za $x \in \Omega$ i $y \in E_\delta(x)$. Sada ćemo formulisati i dokazati težinski analog Leme 2.3 iz [30].

Lema 3.1.3. *Postoji* $\delta_0 \in (0,1)$ *tako da* $|R_\gamma(x,y)| \asymp \frac{1}{r(x)^{n+\gamma}}$ *za* $x \in \Omega$ *i* $y \in E_{\delta_0}(x)$.

Dokaz. Za $y \in E_\delta(x)$, $0 < \delta < 1$, imamo

$$|R_\gamma(y,x) - R_\gamma(x,x)| \leq |y-x| \max\left\{ \left|\frac{\partial R_\gamma(y,x)}{\partial y}\right| : y \in \overline{E_\delta(x)} \right\}$$

$$\leq C\delta r(x) \max\left\{\frac{1}{D(x,y)^{n+\gamma+1}} : y \in \overline{E_\delta(x)}\right\},$$

gdje smo koristili Propoziciju 1.8.4. Primjetimo da $D(x,y) = r(x)+r(y)+|x-y| \geq r(x)$ pa imamo

$$|R_\gamma(y,x) - R_\gamma(x,x)| \leq \frac{C\delta}{r(x)^{n+\gamma}}. \tag{3.4}$$

Stoga, možemo izabrati $\delta = \delta_0 > 0$ tako da, koristeći obrnutu nejednakost trougla i (3.2), imamo

$$\begin{aligned}
|R_\gamma(y,x)| &= |R_\gamma(x,x) - (R_\gamma(x,x) - R_\gamma(y,x))| \\
&\geq |R_\gamma(x,x)| - \frac{C\delta_0}{r(x)^{n+\gamma}} \\
&\geq \frac{C}{r(x)^{n+\gamma}}, \qquad y \in E_{\delta_0}(x).
\end{aligned}$$

Procjena odozgo je posljedica Propozicije 1.8.4 i nejednakosti (3.3). $\square$

Sljedeća propozicija je o oštrim procjenama integralne sredine Bergmanovog jezgra. Verzija bez težine ove teoreme je data u [65].

Propozicija 3.1.4. *Za* $p > \frac{n-1}{n+\gamma}$, *imamo*

$$M_p(R_\gamma(\cdot,x),r) \leq C(r(x)+r)^{\frac{n-1}{p}-(n+\gamma)}$$

i eksponent na desnoj strani je najbolji mogući.

Dokaz. Imamo $|R_\gamma(y,x)| \leq \frac{C}{D(x,y)^{n+\gamma}}$ i $|R_\gamma(x,x)| \asymp r(x)^{-(n+\gamma)}$ za svako $x, y \in \Omega$. Onda, pošto je $p(n+\gamma) > n-1$, možemo koristiti Lemu 3.1.2 sa $s = p(n+\gamma)$ da dobijemo

$$\begin{aligned}
M_p^p(R_\gamma(\cdot,x),r) &= \int_{\Gamma_r} |R_\gamma(y,x)|^p d\sigma_r(y) \\
&\leq C \int_{\Gamma_r} \frac{d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{p(n+\gamma)}} \\
&\leq \frac{C}{(r(x)+r)^{p(n+\gamma)-(n-1)}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Uzimajući $p - ti$ korijen dobijamo željenu nejednakost. Dokažimo da je eksponent na desnoj strani najbolji mogući. Imamo $|R_\gamma(y,x)| \geq \frac{C}{r(x)^{n+\gamma}}$, za $y \in E_\delta(x)$ i neko δ fiksirano iz Leme 3.1.3. Sada za $x \in \Gamma_r$ imamo

$$M_p^p(R_\gamma(\cdot,x),r) \geq \int_{\Gamma_r \cap E_\delta(x)} |R_\gamma(y,x)|^p d\sigma_r(y)$$

$$\geq \int_{\Gamma_r \cap E_\delta(x)} \frac{C}{r(x)^{p(n+\gamma)}} d\sigma_r(y) \geq \frac{C}{r(x)^{p(n+\gamma)-(n-1)}},$$

što znači da je eksponent najbolji mogući. □

Sljedeća lema je o procjeni norme test funkcije koja će se koristiti u dokazu glavnog rezultata u ovom poglavlju.

Lema 3.1.5. *Neka je* $1 < p, q < \infty,\ \alpha > 0,\ \alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ *i* $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q})$*. Neka je za* $x \in \Omega$*, funkcija* $f_x : \Omega \to \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$f_x(y) = \frac{R_\gamma(y,x)}{R_\gamma(x,x)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)}}}.$$

Onda f_x *pripada prostoru funkcija* $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$*, štaviše* $\|f_x\|^q_{B^{p,q}_\alpha} \leq C$*, gdje je* C *nezavisno od* $x \in \Omega$*.*

Dokaz. Primjetimo da za $1 < p, q < \infty,\ n \geq 2$ imamo

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p(n+\gamma)} - \frac{1}{q(n+\gamma)} > 0.$$

Naime, izraz sa lijeve strane nejednakosti se može predstaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{n+\gamma} - \frac{1}{n+\gamma} + \frac{1}{p(n+\gamma)} - \frac{1}{q(n+\gamma)} \\
&= 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{n+\gamma}\left(1 - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{n+\gamma}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{n+\gamma}\right) + \frac{1}{n+\gamma}\left(1 - \frac{1}{q}\right).
\end{aligned}$$

Kako je pretpostavka $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ekvivalentna sa $\gamma > -1$, to je $1 - \frac{1}{n+\gamma} > 0$, pa su oba sabirka u gornjem izrazu pozitivna.

Iz definicije f_x vidimo da $f_x \in h(\Omega)$ i

$$|f_x(y)|^p = \frac{|R_\gamma(y,x)|^p}{|R_\gamma(x,x)|^{p-1+\frac{1}{(n+\gamma)}-\frac{p}{q(n+\gamma)}}}.$$

Pošto je $p > 1$, imamo $p > 1 - \frac{\gamma+1}{n+\gamma} = \frac{n-1}{n+\gamma}$, pa možemo koristiti Propoziciju 3.1.4 i procjenu (3.2) da zaključimo

$$M_p(f_x, t) \leq \frac{Cr(x)^{n+\gamma-\frac{n+\gamma}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}{(r(x)+t)^{n+\gamma-\frac{n}{p}+\frac{1}{p}}}$$

i

$$\|f_x\|^q_{B^{p,q}_{\alpha}} \leq C\int_0^{\epsilon} \frac{Cr(x)^{(n+\gamma)q-\frac{(n+\gamma)q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{(r(x)+t)^{(n+\gamma)q-\frac{qn}{p}+\frac{q}{p}}} t^{\beta} dt \leq C,$$

gdje je C nezavisno od x. □

Trebaćemo još neke leme. Prva je o pokrivanju Ω i esencijalno dolazi iz [109] a druga se može pronaći u [65].

Lema 3.1.6 (vidjeti [109])**.** *Ako* $0 < \delta < 1$, *onda postoji niz* $\{a_k\}$ *u* Ω *koji zadovoljava sljedeći uslove*

1. $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} E_{\frac{\delta}{3}}(a_k)$
2. *Postoji prirodan broj* N *takav da svaka tačka iz* Ω *pripada najviše* N *skupova* $E_{\delta}(a_k)$.

Dokaz. Pošto je $r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ ograničena neprekidna funkcija, postoji $a_1 \in \Omega$ takvo da

$$r(a_1) = \max_{x\in\Omega} r(x) = r_0.$$

Neka su $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ tačke koje su već izabrane za formiranje traženog niza. Tačka a_k se bira tako da važi

$$r(a_k) = \max_{x\in\Omega\setminus\cup_{i<k}E_{\frac{\delta}{3}}(a_i)} r(x).$$

Nastavljajući ovaj postupak, konstruišemo željeni niz za čije članove važi $a_k \notin E_{\frac{\delta}{3}}(a_j)$, $k \neq j$. Naime, za tako konstruisan niz važi 1 zbog ograničenosti skupa Ω. Uslov 2 znači da svaka lopta $E_{\delta}(a_j)$ presjeca najviše konačno mnogo lopti iz niza $\{E_{\delta}(a_k)\}$, najviše N lopti. Identifikujmo taj prirodan broj N, tj. dokažimo da zaista postoji. Prvo primjetimo da se lopte $E_{\frac{\delta}{6}}(a_k)$, $k = 1, 2, ...$ ne presjecaju, tj. da su u parovima disjunktne. Neka lopta $E_{\delta}(a_j)$ presjeca p lopti iz niza $\{E_{\delta}(a_k)\}$. Posmatrajmo p odgovarajućih lopti iz niza $\{E_{\frac{\delta}{6}}(a_k)\}$; označimo ih sa $E_1, E_2, ..., E_p$. One se ne presjecaju i sve su sadržane u $E_{\delta}(a_j)$. Sada imamo da je

$$p = \frac{m(\cup_{i=1}^{p} E_i)}{(\frac{\delta}{6}r(x))^n V(\mathbb{B})} \leq \frac{m(E_{\delta}(a_j))}{(\frac{\delta}{6}r(x))^n V(\mathbb{B})} = 6^n.$$

Dakle, identifikovali smo prirodan broj $N = 6^n$ koji zavisi samo od dimenzije prostora $\mathbb{R}^n$. □

Navedena lema o pokrivanju je jedna od osnovnih lema o pokrivanju, lema Wienerovog tipa. Pregled geometrijskih aspekata različitih tipova lema o pokrivanju i neke primjene su dati u [84]. Primjetimo da $a_k \to \partial\Omega$, kada $k \to \infty$.

Lema 3.1.7 (vidjeti [65]). *Ako je $0 < \delta < 1$, onda postoji prirodan broj $N = N(\delta)$ takav da za $x \in S_k,\ k = 1, 2, ...,$*

$$E_\delta(x) \subset \cup_{j=k-N}^{k+N} S_j$$

gdje je $S_j = \emptyset$ ako je $j \leq 0$.

Dokaz. Za dato $0 < \delta < 1$, fiksirajmo N tako da $1-\delta > \frac{r_0}{2^N}$. Neka je $x \in S_k$ i $y \in E_\delta(x)$. Onda za svako $\zeta \in \partial\Omega$, na osnovu nejednakosti trougla imamo

$$r(y) \leq |y-\zeta| \leq |y-x| + |x-\zeta| < \delta r(x) + |x-\zeta|.$$

Sada uzimajući infinum po svim $\zeta \in \partial\Omega$ dobijamo

$$r(y) \leq (1+\delta)r(x) \leq (1+\delta)\frac{r_0}{2^{k-1}} < \frac{r_0}{2^{k-2}}.$$

Slično dobijamo nejednakosti:

$$r(y) \geq r(x) - |x-y| > (1-\delta)r(x) > (1-\delta)\frac{r_0}{2^k} > \frac{r_0}{2^{k+N}}.$$

Dakle, za $y \in E_\delta(x),\ x \in S_k$ imamo da je

$$\frac{r_0}{2^{k+N}} < r(y) < \frac{r_0}{2^{k-2}}$$

pa je

$$E_\delta(x) \subset \cup_{j=k-N}^{k+N} S_j,$$

što je i trebalo pokazati. □

Primjetimo da je $N = 1$ ako je δ dovoljno malo.
Neka je $\{a_k\}$ niz iz Leme 3.1.6. Onda imamo, za $f \in h(\Omega)$

$$r(a_k)^\gamma \max_{x \in \overline{E}_{\frac{\delta}{3}}(a_k)} |f(x)|^p m(E_{\frac{\delta}{3}}(a_k)) \leq C \int_{E_\delta(a_k)} |f(y)|^p r(y)^\gamma dm(y) \tag{3.6}$$

gdje smo koristili subharmoničnost od $|f|^p$ i (3.3).

Sada možemo dokazati glavnu teoremu u ovom poglavlju koja povezuje uslov Karlesonovog tipa za prostor funkcija $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ sa utapanjem $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ u $L^{p,q}(\Omega, d\mu)$.

Teorema 3.1.8. *Neka je* $1 < p, q < \infty$, $\alpha > 0$, $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $0 < \delta < 1$ *i neka je* μ *Borelova mjera na* Ω. *Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

1. *Mjera* μ *zadovoljava uslov Karlesonovog tipa*
$$\mu(E_\delta(x)) \leq Cr(x)^{n+\gamma}, \quad x \in \Omega, \tag{3.7}$$
gdje je $\gamma = \beta\frac{p}{q} = p(\alpha - \frac{1}{q})$.

2. *Imamo neprekidno utapanje* $B_\alpha^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$.

Dokaz. Pretpostavimo da $B_\alpha^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$. Fiksirajmo $x \in \Omega$ i izaberimo test funkciju
$$f_x(y) = \frac{R_\gamma(y,x)}{R_\gamma(x,x)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)}}}, \; y \in \Omega$$
iz Leme 3.1.5. Na osnovu te leme, postoji konstanta C, nezavisna od x, takva da $\|f_x\|^q_{B_\alpha^{p,q}} \leq C$. Prema Lemi 3.1.3, postoji $\delta_0 \in (0,1)$ tako da $|R_\gamma(x,y)| \asymp \frac{1}{r(x)^{n+\gamma}}$, za $x \in \Omega$ i $y \in E_{\delta_0}(x)$. Takođe, možemo pretpostaviti da $x \in S_k$ i koristiti (3.3) i Lemu 3.1.7 da dobijemo
$$\begin{aligned}
\left[\frac{\mu(E_{\delta_0}(x))}{r(x)^{n+\gamma}}\right]^{\frac{q}{p}} &= \left[\int_{E_{\delta_0}(x)} r(x)^{-(n+\gamma)} d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} \\
=&\left[\int_{E_{\delta_0}(x)} r(x)^{-(n+\gamma)p} r(x)^{(n+\gamma)p} r(x)^{\frac{p}{q}-1} r(x)^{1-\frac{p}{q}} r(x)^{-(n+\gamma)} d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} \\
\asymp&\left[\int_{E_{\delta_0}(x)} |f_x(y)|^p r(y)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} \\
\leq& C \sum_{j=k-N}^{k+N} \left[\int_{S_j} |f_x(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \\
\leq& C \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{S_j} |f_x(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \leq C\|f_x\|^q_{B_\alpha^{p,q}} \leq C.
\end{aligned}$$

Dakle, $\frac{\mu(E_{\delta_0}(x))}{r(x)^{n+\gamma}}$ je ograničen konstantom, prema tome $\frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}}$ je takođe ograničen za svako $0 < \delta < 1$ (Korolar 1.11.3) što znači da (3.7) važi. Obrnuto, pretpostavimo da mjera μ zadovoljava uslov Karlesonovog tipa (3.7). Bez smanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je δ dovoljno malo tako da $N = 1$ u Lemi 3.1.7. Za $j \in \mathbb{N}$, stavimo $K_j = \{k \in \mathbb{N} : E_{\frac{\delta}{3}}(a_k) \cap S_j \neq \emptyset\}$, gdje je $\{a_k\}$ niz iz Leme 3.1.6. Onda $S_j \subset \cup_{k \in K_j} E_{\frac{\delta}{3}}(a_k)$, posljednju uniju označavamo sa E_j. Imamo $m(E_\delta(x)) \asymp r(x)^n$. Koristeći ovo zajedno sa (3.6), dobijamo

$$\begin{aligned}
\|f\|^q_{L^{p,q}(\mu)} &= \sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p d\mu(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{E_j}|f(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{K_j}\max_{y\in\overline{E}_{\frac{\delta}{3}}(a_k)}|f(y)|^p \mu(E_{\frac{\delta}{3}}(a_k))\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{K_j}\max_{y\in\overline{E}_{\frac{\delta}{3}}(a_k)}|f(y)|^p r(a_k)^\gamma m(E_{\frac{\delta}{3}}(a_k))\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left[\sum_{K_j}\int_{E_\delta(a_k)}|f(y)|^p r(y)^\gamma dm(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\sum_{j=2}^{\infty}\left[\int_{\{y\in\Omega: r_{j+2}<r(y)\leq r_{j-2}\}}|f(y)|^p dm_\gamma(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f(y)|^p dm_\gamma(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \asymp \|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha},
\end{aligned}$$

gdje posljednji odnos važi zbog Teoreme 3.1.1 i napomene nakon nje. □

Teorema 3.1.8 će važiti i za veći raspon parametara p i q, ako se postavi dodatni uslov na težinu α. Da bismo došli do tog zaključka, prvo primjetimo da Teorema 3.1.1 važi za $0 < p, q < +\infty$, što smo uočili i nakon same formulacije Teoreme 3.1.1. Ovdje ćemo i formulisati i dokazati teoremu koja predstavlja proširenje Teoreme 3.1.1.

Teorema 3.1.9. *Neka je* $0 < p, q < \infty$ *i* $\alpha > 0$. *Onda imamo*

$$\|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha} \asymp \sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)}, \qquad f \in h(\Omega),$$

gdje je $\beta = \alpha q - 1$.

Dokaz. Neka je J prirodan broj takav da $r_J > \epsilon$ i $r_{J+1} \leq \epsilon$, gdje je, kao i prije, $r_j = \frac{r_0}{2^j}$ za $j = 1, 2, \ldots$. Stavimo $\Omega_J = \{x \in \Omega : r(x) \geq r_{J+1}\}$. Sada imamo

$$\|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha} = \int_0^\epsilon r^\beta M_p^q(f, r)dr$$

$$= \int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr + \sum_{j=J+2}^{\infty} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr. \tag{3.8}$$

Prvo ćemo procijeniti beskonačnu sumu $\sum_{j=J+2}^{\infty} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr$ procjenjujući svaki član u sumi. Koristeći procjene iz Teoreme 2.1.11, dobijamo

$$\begin{aligned} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr &\leq C \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta-1} \int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^q(f,s)dsdr \\ &\leq C \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta-1} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} M_p^q(f,s)dsdr \\ &= C \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \left(\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta-1} dr \right) M_p^q(f,s)ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Za $\beta = 0$, dobijamo $\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta-1}dr = \int_{r_j}^{r_{j-1}} \frac{dr}{r} = \ln r_{j-1} - \ln r_j = \ln \frac{r_{j-1}}{r_j} = \ln 2$. Za $\beta \neq 0$, dobijamo $\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta-1}dr = \frac{r^{\beta}}{\beta}\big|_{r_j}^{r_{j-1}} = \frac{r_{j-1}^{\beta} - r_j^{\beta}}{\beta} = r_j^{\beta} \frac{2^{\beta}-1}{\beta} = C\left(\frac{r_0}{2^j}\right)^{\beta}$, gdje konstanta C zavisi od β. U oba slučaja, (3.9) daje

$$\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr \leq C(\frac{r_0}{2^j})^{\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} (M_p^p(f,s))^{\frac{q}{p}} ds. \tag{3.10}$$

Ako je $p = q$, onda $C(\frac{r_0}{2^j})^{\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} (M_p^p(f,s))^{\frac{q}{p}} ds \leq C 2^{-j\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \int_{\Gamma_t} |f(\zeta)|^p d\sigma_t(\zeta)dt$, što zajedno sa (3.10) daje procjenu

$$\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr \leq C 2^{-j\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \int_{\Gamma_t} |f(\zeta)|^p d\sigma_t(\zeta)dt.$$

Ako je $p \neq q$, koristimo Teoremu 2.1.11 ponovo da dobijemo

$$\begin{aligned} C(\frac{r_0}{2^j})^{\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} (M_p^p(f,s))^{\frac{q}{p}} ds &\leq C 2^{-j\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \left(\frac{1}{s} \int_{c_1 s}^{c_2 s} M_p^p(f,t)dt \right)^{\frac{q}{p}} ds \\ &\leq C 2^{-j\beta} \int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \left(\frac{1}{s} \int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} M_p^p(f,t)dt \right)^{\frac{q}{p}} ds \\ &= C 2^{-j\beta} \left(\int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} M_p^p(f,t)dt \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} s^{-\frac{q}{p}} ds \right) \\ &\leq C 2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)} \left(\int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} \int_{\Gamma_t} |f(\zeta)|^p d\sigma_t(\zeta)dt \right)^{\frac{q}{p}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Koristeći (3.10), (3.11) i osobinu (2.25) skupova $\tilde{S}_j$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr &\le C2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)} \left(\int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} \int_{\Gamma_t} |f(\zeta)|^p d\sigma_t(\zeta) dt \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)} \left(\int_{\tilde{S}_j} |f(x)|^p dm(x) \right)^{\frac{q}{p}} \\
&\le C2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)} \left[\sum_{k=-2}^{2} \int_{S_{j+k}} |f(x)|^p dm(x) \right]^{q/p} \\
&\le C2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)} \sum_{k=-2}^{2} \left(\int_{S_{j+k}} |f(x)|^p dm(x) \right)^{q/p},
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

za svako $0 < p, q < +\infty$. Sada ćemo procijeniti $\int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr$. Dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr &\le C r_{J+1}^{\beta} \sup_{\Omega_J} |f(x)|^q \\
&\le C r_{J+1}^{\beta} \sum_{j=1}^{J+1} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \\
&\le C \sum_{j=1}^{J+1} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1-\beta)},
\end{aligned}
$$

koristeći definicije skupova Ω_J i $S_j,\ j = 1, ..., J+1$ i subharmonijsko ponašanje funkcije $|f|^p$ (Propozicija 2.1.9). Sumacija po j daje:

$$
\int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr + \sum_{j=J+2}^{\infty} \int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,r)dr \le C \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)}.
$$

Sada dokažimo obrnutu nejednakost. Za $j \ge J+2$ i $p \ne q$ koristeći nejednakost (2.18) iz Teoreme 2.1.11 dva puta, dobijamo:

$$
\begin{aligned}
2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)} \left[\int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{q}{p}} &= \left[2^{j(1-\beta\frac{p}{q}-\frac{p}{q})} \int_{S_j} |f(x)|^p dm(x) \right]^{\frac{q}{p}} \\
&\le \left[\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\frac{p}{q}(1+\beta)-1} M_p^p(f,r)dr \right]^{\frac{q}{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left[\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\frac{p}{q}(1+\beta)-1}\frac{1}{r}\int_{c_1 r}^{c_2 r} M_p^p(f,s)dsdr\right]^{\frac{q}{p}} \\
&\leq \left[\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\frac{p}{q}(1+\beta)-2}\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} M_p^p(f,s)dsdr\right]^{\frac{q}{p}} \\
&= \left[\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^{\frac{p}{q}(1+\beta)-2}dr\right]^{\frac{q}{p}}\left[\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} M_p^p(f,s)ds\right]^{\frac{q}{p}} \\
&= C r_j^{1+\beta-\frac{q}{p}}\left[\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \left(M_p^q(f,s)\right)^{\frac{p}{q}} ds\right]^{\frac{q}{p}} \qquad (3.13) \\
&\leq C r_j^{1+\beta-\frac{q}{p}}\left[\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \left(\frac{1}{s}\int_{c_1 s}^{c_2 s} M_p^q(f,t)dt\right)^{\frac{p}{q}} ds\right]^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C r_j^{1+\beta-\frac{q}{p}}\left[\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} \left(\frac{1}{s}\int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} M_p^q(f,t)dt\right)^{\frac{p}{q}} ds\right]^{\frac{q}{p}} \\
&= C r_j^{1+\beta-\frac{q}{p}}\left[\int_{c_1 r_j}^{c_2 r_{j-1}} s^{-\frac{p}{q}}ds\right]^{\frac{q}{p}}\cdot\int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} M_p^q(f,t)dt \\
&\asymp C r_j^{1+\beta-\frac{q}{p}} r_j^{-1+\frac{q}{p}}\cdot\int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} M_p^q(f,t)dt \\
&\asymp \int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} r^{\beta} M_p^q(f,t)dt.
\end{aligned}
$$

Ako je $p = q$, jednostavnije se dobije

$$
2^{j(-\beta)}\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x) \leq \int_{c_1^2 r_j}^{c_2^2 r_{j-1}} r^{\beta} M_p^p(f,t)dt.
$$

Osim toga, koristeći princip maksimuma modula, imamo

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{J+1}\left[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1-\beta)} \leq C\sup_{\Omega_J}|f(x)|^q \leq C\sup_{\Omega_\epsilon}|f(x)|^q \\
&\leq C\sup_{\Gamma_\epsilon}|f(x)|^q = C M_\infty^q(f,\epsilon) \leq C\int_0^\epsilon r^{\beta} M_p^q(f,r)dr.
\end{aligned}
$$

Koristili smo Lemu 2.1.12 da dobijemo posljednju nejednakost. Sumacija po j sada daje:

$$\begin{aligned}&\int_{r_{J+1}}^{\epsilon} r^\beta M_p^q(f,r)dr + \sum_{j=J+2}^{\infty}\int_{r_j}^{r_{j-1}} r^\beta M_p^q(f,r)dr\\ &\geq C\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\int_{S_j}|f(x)|^p dm(x)\Big]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-\beta-1)},\end{aligned}$$

gdje posljednja nejednakost važi zbog (2.25). □

Teorema utapanja 3.1.8 važi za širi raspon parametara p i q ako nametnemo dodatni uslov na težinu α. Prvo formulišemo verziju Leme 3.1.5 sa nešto drugačijim pretpostavkama na parametre. Isti dokaz može da se sprovede.

Lema 3.1.10. *Neka je $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > 0$, $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\alpha > \frac{n-1-pn}{p^2} + \frac{1}{q}$ i $(p-1)\alpha > \frac{n}{p} - n + \frac{p}{q} - \frac{1}{p}$. Neka je za $x \in \Omega$, funkcija $f_x : \Omega \to \mathbb{R}$ definisana sa*

$$f_x(y) = \frac{R_\gamma(y,x)}{R_\gamma(x,x)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)}}}. \tag{3.14}$$

Onda f_x pripada prostoru funkcija $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, štaviše $\|f_x\|^q_{B^{p,q}_\alpha} \leq C$, gdje je C nezavisno od $x \in \Omega$.

Dokaz. Pretpostavka $(p-1)\alpha > \frac{n}{p} - n + \frac{p}{q} - \frac{1}{p}$ je ekvivalentna sa nejednakošću

$$1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p(n+\gamma)} - \frac{1}{q(n+\gamma)} > 0$$

i $\alpha > \frac{n-1-pn}{p^2} + \frac{1}{q}$ je ekvivalentno sa $p > \frac{n-1}{n+\gamma}$. Dakle, isti dokaz (kao i dokaz Leme 3.1.5) se može sprovesti sa ovim pretpostavkama. □

Ako pažljivo pogledamo dokaz Teoreme 3.1.8, vidimo da važi sljedeća teorema.

Teorema 3.1.11. *Neka je $0 < p, q < \infty$, $\alpha > 0$, $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\alpha > \frac{n-1-pn}{p^2} + \frac{1}{q}$ i $(p-1)\alpha > \frac{n}{p} - n + \frac{p}{q} - \frac{1}{p}$. Neka je $0 < \delta < 1$ i μ Borelova mjera na Ω. Onda su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

1. *Mjera μ zadovoljava uslov Karlesonovog tipa*

$$\mu(E_\delta(x)) \leq Cr(x)^{n+\gamma}, \quad x \in \Omega, \tag{3.15}$$

gdje je $\gamma = \beta\frac{p}{q} = p(\alpha - \frac{1}{q})$.

2. *Imamo neprekidno utapanje* $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$.

Uvedimo Karlesonovu normu

$$\|\mu\|_{Car} := \sup \frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}}.$$

Za Karlesonovu mjeru μ imamo procjenu sa obje strane

$$c_{\Omega,p,q,\alpha}\|\mu\|_{Car} \leq \|Id\|_{B^{p,q}_\alpha \to L^{p,q}(\mu)} \leq C_{\Omega,p,q,\alpha}\|\mu\|_{Car} \tag{3.16}$$

tj.

$$\|\mu\|_{Car} \asymp \|Id\|_{B^{p,q}_\alpha \to L^{p,q}(\mu)},$$

što je jasno iz dokaza Teoreme 3.1.8.

3.2 Iščezavajuće mjere Karlesona

U ovom poglavlju se bavimo karakterizacijom iščezavajućih Karlesonovih mjera, čiji smo koncept uveli u poglavlju 1.7. Ovdje se bavimo Karlesonovim mjerama za prostore harmonijskih funkcija sa mješovitom normom $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Glavni rezultat u ovom poglavlju je teorema utapanja u kojoj se radi o kompaktnom utapanju odgovarajućih prostora.

Definicija 3.2.1. Mjera μ se naziva iščezavajuća Karlesonova mjera za $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ ako je utapanje $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$ kompaktno.

Prije formulacije i dokaza glavne teoreme navodimo nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 3.2.1. *Svaki ograničen niz* (f_k) *iz* $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ *ima lokalno uniformno konvergentan podniz.*

Dokaz. Neka je Ω_0 kompaktno sadržan poddomen od Ω. Funkcija rastojanja $r(x)$ je ograničena odozgo i od nule odvojena na Ω_0, onda je isto tačno za $r(x)^{\alpha q-1}$. Stavljajući $t = \min(p, q)$ lako izvodimo da restrikcije $\varphi_k = f_k|_{\Omega_0}$ formiraju ograničen niz u beztežinskom Bergmanovom prostoru $b^t(\Omega_0)$ i prema tome postoji lokalno uniformno konvergentan podniz φ_{k_j}. Dokazali smo da postoji podniz od f_k koji konvergira lokalno uniformno u Ω_0. Pošto je Ω_0 proizvoljan kompaktno sadržan poddomen od Ω, dokaz se kompletira koristeći Kantorov dijagonalni proces. $\square$

Lema 3.2.2. *Ako Borelova mjera* μ *na* Ω *ima kompaktan nosač* $K \subset \Omega$*, onda je prirodno utapanje* $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$ *kompaktan operator.*

Dokaz. Pretpostavimo da je (f_k) ograničen niz u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Onda na osnovu Leme 3.2.1, postoji podniz f_{k_j} koji konvergira lokalno uniformno na Ω ka f, specijalno na K. Dakle, $f_{k_j} \to f$ u $L^{p,q}(\mu)$. □

Lema 3.2.3. *Neka je za svako $x \in \Omega$, f_x test funkcija iz Leme 3.1.10. Ako $x_j \in \Omega$ zadovoljava $x_j \to \partial\Omega$, onda $\lim_{j\to\infty} f_{x_j}(y) = 0$ lokalno uniformno po $y \in \Omega$.*

Dokaz. Na osnovu Propozicije 1.8.4, $|R_\gamma(x,x)| \asymp \frac{1}{r(x)^{n+\gamma}}$ za svako $x \in \Omega$ tj. $\frac{1}{|R_\gamma(x,x)|} \asymp r(x)^{n+\gamma}$. Specijalno, pošto je $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p(n+\gamma)} - \frac{1}{q(n+\gamma)} > 0$, imamo

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{R_\gamma(x_j,x_j)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)}}} = 0. \tag{3.17}$$

Takođe imamo da je $R_\gamma(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \{(\zeta,\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\})$ (vidjeti [46] ili poglavlje 1.8). Ovo implicira da za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$, postoji konstanta $C = C(K, (x_j)_{j=1}^\infty)$ takva da

$$|R_\gamma(y,x_j)| \le C, \ j = 1,2,..., \ y \in K. \tag{3.18}$$

Onda (3.17), (3.18) i (3.14) implicira

$$\lim_{j\to\infty} f_j(y) = 0 \text{ lokalno uniformno po } y \in \Omega. \tag{3.19}$$

□

Lema 3.2.4. *Neka je $0 < p,q < \infty$, $\alpha > 0$, $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\alpha > \frac{n-1-pn}{p^2} + \frac{1}{q}$ i $(p-1)\alpha > \frac{n}{p} - n + \frac{p}{q} - \frac{1}{p}$. Neka je za svako $x \in \Omega$, f_x test funkcija iz Leme 3.1.10. Onda postoji konstanta $0 < \delta_0 < 1$ takva da za svako $0 < \delta \le \delta_0$ postoji konstanta $C = C(p,q,\alpha,\Omega,\delta)$ takva da važi*

$$\|f_x \chi_{E_\delta(x)}\|^p_{L^{p,q}(\mu)} \ge C \frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}}, \qquad x \in \Omega. \tag{3.20}$$

Dokaz. Na osnovu Leme 3.1.3, imamo da postoji $\delta_0 \in (0,1)$ takvo da $|R_\gamma(x,y)| \ge \frac{C}{r(x)^{n+\gamma}}$, za svako $y \in E_{\delta_0}(x)$. Dakle, koristeći (3.14), dobijamo

$$\begin{aligned} |f_x(y)| &\ge \frac{Cr(x)^{(n+\gamma)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)})}}{r(x)^{n+\gamma}} \\ &= Cr(x)^{-\frac{n+\gamma}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

za svako $y \in E_\delta(x)$. Dakle, $|f_x(y)|^p \geq Cr(x)^{1-\frac{p}{q}} r(x)^{-(n+\gamma)}$. Neka je N prirodan broj iz Leme 3.1.7 koji odgovara δ_0. Za $x \in \Omega$ i $0 < \delta \leq \delta_0$ koristeći (3.3), imamo:

$$\begin{aligned}
\|f_x \chi_{E_\delta(x)}\|^q_{L^{p,q}(\mu)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\int_{S_j \cap E_\delta(x)} |f_x(y)|^p d\mu(y) \Big]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \\
&= \sum_{|j-k| \leq N} \Big[\int_{S_j \cap E_\delta(x)} |f_x(y)|^p d\mu(y) \Big]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \\
&\geq C \sum_{|j-k| \leq N} \Big[\int_{S_j \cap E_\delta(x)} |f_x(y)|^p r(y)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(y) \Big]^{\frac{q}{p}} \\
&\geq C \cdot C_{N,p/q} \Big[\sum_{|j-k| \leq N} \int_{S_j \cap E_\delta(x)} |f_x(y)|^p r(y)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(y) \Big]^{\frac{q}{p}} \\
&= C \Big[\int_{E_\delta(x)} |f_x(y)|^p r(y)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(y) \Big]^{\frac{q}{p}} \\
&\geq C \Big[\int_{E_\delta(x)} r(x)^{1-\frac{p}{q}} r(x)^{-(n+\gamma)} r(x)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(y) \Big]^{\frac{q}{p}} \\
&= C \Big[\int_{E_\delta(x)} \frac{d\mu(y)}{r(x)^{n+\gamma}} \Big]^{\frac{q}{p}} = C \Big[\frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}} \Big]^{\frac{q}{p}},
\end{aligned}$$

gdje smo k izabrali tako da je $x \in S_k$. Ovim smo dokazali (3.20), za $0 < \delta \leq \delta_0$. $\square$

Sljedeća teorema utapanja je glavni rezultat ovog poglavlja i predstavlja težinski analog Teoreme 2.4 iz [65]. Opisuje iščezavajuće Karlesonove mjere za prostore $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Teorema 3.2.5. *Neka je $0 < p, q < \infty$, $\alpha > 0$, $\alpha > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\alpha > \frac{n-1-pn}{p^2} + \frac{1}{q}$ i $(p-1)\alpha > \frac{n}{p} - n + \frac{p}{q} - \frac{1}{p}$. Neka je $0 < \delta < 1$ fiksirano i μ Borelova mjera na Ω. Onda je μ iščezavajuća Karlesonova mjera za $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ ako i samo ako*

$$\lim_{x \to \Gamma} \frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}} = 0 \tag{3.21}$$

gdje je $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q})$.

Dokaz. Pretpostavimo da (3.21) važi. Stavimo da je $\overline{\Omega}_r = K_r$, $0 < r < r_0$. Možemo predstaviti mjeru μ kao

$$\mu = \mu \chi_{K_r} + \mu \chi_{\Omega \setminus K_r} = \mu^0_r + \mu^1_r$$

i slično funkciju f iz $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ kao

$$f = f \chi_{K_r} + f \chi_{K_r^c} = f^0_r + f^1_r.$$

Uslov (3.21) je ekvivalentan sa

$$\lim_{r\to 0}\|\mu_r^1\|_{Car}=0.$$

Prema tome za dato $\eta>0$ možemo izabrati $0<\rho_0<r_0$ tako da $\|\mu_r^1\|_{Car}<\eta$ za svako $0<r\le\rho_0$. Fiksirajmo takvo r. Neka je B zatvorena jedinična lopta u $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ i neka je B_r^0 skup svih funkcija f_r^0 gdje je $f\in B$ i slično neka je B_r^1 skup svih funkcija f_r^1 gdje je $f\in B$. Na osnovu Leme 3.2.2, skup B_r^0 je kompaktan u $L^{p,q}(\Omega,d\mu)$ i svako $g=f_r^1$ u B_r^1 (gdje je $f\in B$) zadovoljava

$$\|g\|_{L^{p,q}(\Omega,d\mu)}=\|f\|_{L^{p,q}(\Omega,d\mu_r^1)}\le C_{\Omega,p,q,\alpha}\|\mu_r^1\|_{Car}\le C_{\Omega,p,q,\alpha}\eta.$$

Dakle B, kao podskup od $L^{p,q}(\Omega,d\mu)$, je sadržan u $C_{\Omega,p,q,\alpha}\eta$ okolini od kompaktnog skupa B_r^0. Pošto je $\eta>0$ proizvoljno, ovim smo dokazali kompaktnost B u $L^{p,q}(\Omega,d\mu)$.

Sada ćemo dokazati obrnut smjer. Prvo ćemo dokazati da (3.21) važi za fiksirano $0<\delta\le\delta_0$, gdje je δ_0 konstanta iz Leme 3.2.4. Pretpostavimo $B_\alpha^{p,q}(\Omega)\hookrightarrow L^{p,q}(\Omega,d\mu)$ je kompaktno ali (3.21) ne važi. Onda postoji $\lambda>0$ i niz (x_j) u Ω takav da $r(x_j)\to 0$ i

$$\frac{\mu(E_\delta(x_j))}{r(x_j)^{n+\gamma}}\ge\lambda>0.$$

Neka su $f_j(y)=f_{x_j}(y)$ test funkcije iz Leme 3.1.10. Onda na osnovu Leme 3.2.3, $\lim_{j\to\infty}f_j(y)=0$ lokalno uniformno po $y\in\Omega$. Pošto je operator utapanja $B_\alpha^{p,q}(\Omega)\hookrightarrow L^{p,q}(\Omega,d\mu)$ kompaktan, postoji podniz niza (f_j), konvergentan u $L^{p,q}(\mu)-$ (kvazi) normi, koji je takođe s.s. konvergentan i konvergira ka nuli zbog (3.19). S druge strane, na osnovu Leme 3.2.4, imamo da

$$\|f_j\|_{L^{p,q}(\mu,E_\delta(x_j))}\ge(C\lambda)^{\frac{1}{p}}>0.$$

Dakle, dobili smo kontradikciju i tako imamo $\lim_{x\to\Gamma}\frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}}=0$, za fiksirano $0<\delta\le\delta_0$, gdje je δ_0 konstanta iz Leme 3.2.4. Na osnovu Korolara 1.11.3, imamo da je $\lim_{x\to\Gamma}\frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}}=0$, za svako $0<\delta<1$. □

U sljedećoj teoremi, karakterišemo iščezavajuće mjere Karlesona koristeći uniformno ograničene nizove.

Teorema 3.2.6. *Neka je μ pozitivna Borelova mjera na Ω i $0<p,q<\infty$, $\alpha>0$, $\alpha>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$, $\alpha>\frac{n-1-pn}{p^2}+\frac{1}{q}$ i $(p-1)\alpha>\frac{n}{p}-n+\frac{p}{q}-\frac{1}{p}$. Onda*

$$\lim_{x\to\partial\Omega}\hat{\mu}_{\delta,\gamma}(x)=0 \text{ za svako (ili neko) fiksirano } \delta\in(0,1) \tag{3.22}$$

ako i samo ako

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f_k(x)|^p d\mu(x)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}\right\}^{\frac{1}{q}} = 0 \tag{3.23}$$

za svaki ograničen niz $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ *u* $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ *koji konvergira ka nuli uniformno na svakom kompaktnom podskupu od* Ω.

Dokaz. Neka su za $x \in \Omega$, f_x test funkcije iz Leme 3.1.10. Onda na osnovu Leme 3.1.10, $\|f_x\|_{B_\alpha^{p,q}} \leq C$ i prema Lemi 3.2.3, $\lim_{k\to\infty} f_{x_k}(y) = 0$ lokalno uniformno na svakom kompaktnom podskupu od Ω, za svaki niz $x_k \to \partial\Omega$. Pretpostavimo da (3.23) važi i stavimo da je $f_k = f_{x_k}$. Slično odgovarajućem dijelu dokaza Teoreme 3.1.8 (koristeći Lemu 3.1.3, (3.3) i Lemu 3.1.7), postoji δ_0 takvo da

$$(\hat{\mu}_{\delta_0,\gamma}(x_k))^{\frac{q}{p}} \leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{S_j}|f_k(y)|^p d\mu(y)\right)^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \to 0, \text{ kada } k\to\infty.$$

Sada koristeći Korolar 1.11.3, dobijamo (3.22), za svako $\delta \in (0,1)$.

Obrnuto, pretpostavimo $\lim_{x\to\partial\Omega}\hat{\mu}_{\delta,\gamma}(x) = 0$ za neko $0 < \delta < 1$. Ponovo, koristimo sličan pristup kao u dokazu Teoreme 3.1.8. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je δ dovoljno malo. Ovo znači da za svako $\eta > 0$, postoji $K \in \mathbb{N}$ takvo da

$$\hat{\mu}_{\delta,\gamma}(a_k) < \eta, \text{ za } k > K,$$

gdje je $\{a_k\}$ niz iz Leme 3.1.6. Pošto je δ dovoljno malo, u Lemi 3.1.7, $N = 1$. Za $j \in \mathbb{N}$, stavimo

$$K_j = \{k \in \mathbb{N} : E_{\frac{\delta}{3}}(a_k) \cap S_j \neq \emptyset\}.$$

Primjetimo da je

$$\lim_{j\to\infty}\min\{k : k \in K_j\} = \infty,$$

što znači da postoji $J \in \mathbb{N}$ takvo da $\min\{k : k \in K_j\} > K$ za $j > J$. Takođe imamo $S_j \subset \cup_{k\in K_j} E_{\frac{\delta}{3}}(a_k)$. Sada za svaki ograničen niz $(f_l)_l$ iz $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ koji konvergira ka nuli uniformno na svakom kompaktnom podskupu od Ω, kada $l \to \infty$, koristeći subharmonijsko ponašanje od $|f|^p$ (Propozicija 2.1.9) i Lemu 3.1.6 imamo

$$\sum_{j=J+1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f_l(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=J+1}^{\infty}\left[\sum_{K_j}\max_{y\in \overline{E}_{\frac{\delta}{3}}(a_k)}|f_l(y)|^p\mu(E_{\frac{\delta}{3}}(a_k))\right]^{\frac{q}{p}}2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\eta^q\sum_{j=J+1}^{\infty}\left[\sum_{K_j}\max_{y\in \overline{E}_{\frac{\delta}{3}}(a_k)}|f_l(y)|^p r(a_k)^{\gamma}m(E_{\frac{\delta}{3}}(a_k))\right]^{\frac{q}{p}}2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\eta^q\sum_{j=J+1}^{\infty}\left[\sum_{K_j}\int_{E_\delta(a_k)}|f_l(y)|^p r(y)^{\gamma}dm(y)\right]^{\frac{q}{p}}2^{j(\frac{q}{p}-1)}\\
&\leq C\eta^q A\sum_{j=J+1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f_l(y)|^p dm_{\gamma}(y)\right]^{\frac{q}{p}}2^{j(\frac{q}{p}-1)}\leq C\eta^q\|f\|^q_{B^{p,q}_{\alpha}}\leq C\eta^q.
\end{aligned}
$$

Osim gornje nejednakosti, imamo da je $\cup_{j=1}^{J}\overline{S_j}$ kompaktan podskup od Ω, pa f_l konvergira uniformno ka nuli na tom skupu i

$$
\lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{J}\left[\int_{S_j}|f_l(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}}2^{j(\frac{q}{p}-1)}=0.
$$

Konačno imamo

$$
\lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\int_{S_j}|f_l(y)|^p d\mu(y)\right]^{\frac{q}{p}}2^{j(\frac{q}{p}-1)}=0.
$$

$\square$

4. Bergmanove projekcije

Ograničenost Bergmanove projekcije na harmonijskim prostorima sa mješovitom normom na glatkim ograničenim oblastima u $\mathbb{R}^n$ su dokazali Hu i Lv u [65]. Dokaz se oslanja na ekvivalenciju normi na prostorima sa mješovitom normom. Kao posljedicu, oni su odredili duale ovakvih prostora. Generalizovaćemo ove rezultate na slučaj težinskih prostora sa mješovitom normom, gdje je težina u obliku stepena, vidjeti Teoreme 4.1.1 i 5.1.1. Opšta šema dokaza predstavljenog u [65] za beztežinski slučaj funkcioniše i u težinskom slučaju, međutim, potrebne su delikatne procjene težinskog Bergmanovog jezgra koje je dobio Engliš u [46]. Ove procjene se koriste da se dokaže ograničenost težinske Bergmanove projekcije P_γ koja djeluje na težinski Lebegov prostor $L^p(\Omega, dm_\lambda(x))$ (vidjeti Teoremu 4.0.4), nakon čega se korišćenjem ekvivalencije normi na odgovarajućim prostorima i uočavanjem određene konvolucije, te primjenom konvolucione nejednakosti, dokazuje ograničenost projekcije i na težinskom prostoru sa mješovitom normom $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Dakle, u ovoj glavi ćemo dokazati da je Bergmanova projekcija ograničen operator na prostoru $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, ali i na prostoru koji je usko povezan sa $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, prostoru $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Ovi rezultati su dobijeni u okviru radova [16] i [124].

Pošto je

$$\|f\|_{L^{p,q}_\alpha} \asymp \|a_j(f)\|_{l^q}, \quad \text{gdje je} \quad a_j(f) = \left(\int_{S_j} |f(x)|^p r(x)^{\alpha p - 1} dm(x) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.1}$$

lako izvodimo sljedeću lemu.

Lema 4.0.1. *Ako je $0 < p < +\infty$ i $\alpha > 0$, onda $L^{p,p}_\alpha(\Omega) = L^p_{\alpha p - 1}(\Omega)$ i dvije (kvazi) norme na tom prostoru su ekvivalentne.*

Drugi prostor funkcija sa mješovitom normom na kojem ćemo posmatrati djelovanje Bergmanove projekcije je prostor $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, definisan u poglavlju 2.2, sa (kvazi) normom koja se koristi i za definisanje prostora $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Sljedeća lema je elementarna, koristi se za dokazivanje ograničenosti Bergmanove projekcije na prostoru $\tilde{L}^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$.

Lema 4.0.2. *Neka je* $s_1,\ s_2 > 0$ *i* $0 < r \leq \epsilon$. *Onda*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{\rho^{s_1-1}d\rho}{(r+\rho)^{s_2}} \leq \begin{cases} C, & s_2 < s_1 \\ C\ln(1+\frac{\epsilon}{r}), & s_2 = s_1 \\ \frac{C}{r^{s_2-s_1}}, & s_2 > s_1 \end{cases}$$

Dokaz. Pvo primjetimo da $\frac{1}{(r+\epsilon)^{s_2}} < \frac{1}{\epsilon^{s_2}}$ i $\rho^{s_1} \leq (r+\rho)^{s_1}$, pošto je $s_2 > 0$ i $s_1 > 0$. Koristeći parcijalnu integraciju dobijamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\epsilon} \frac{\rho^{s_1-1}d\rho}{(r+\rho)^{s_2}} &= \frac{1}{(r+\epsilon)^{s_2}} \cdot \frac{\epsilon^{\alpha q}}{s_1} + \frac{s_2}{s_1}\int_0^{\epsilon} \frac{\rho^{s_1}}{(r+\rho)^{s_2+1}}d\rho \\ &\leq C_1 + C_2\int_0^{\epsilon}(r+\rho)^{s_1-(s_2+1)}d\rho. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sada za $s_2 < s_1$, $0 < r, \rho \leq \epsilon$, računamo integral iz (4.2) i dobijamo njegovu gornju granicu

$$\frac{1}{s_1-s_2}((r+\epsilon)^{s_1-s_2} - r^{s_1-s_2}) < \frac{(2\epsilon)^{s_1-s_2}}{s_1-s_2}.$$

Prema tome, u ovom slučaju imamo da je gornja granica za $\int_0^{\epsilon} \frac{\rho^{s_1-1}d\rho}{(r+\rho)^{s_2}}$ konstanta koja zavisi od $s_1,\ s_2$ i ϵ.
Za $s_1 = s_2$, imamo $\int_0^{\epsilon}(r+\rho)^{s_1-(s_2+1)}d\rho = \ln\frac{r+\epsilon}{r}$.
Ostaje da dobijemo željenu nejednakost za $s_2 > s_1$. Naime, za $s_2 > s_1$, izraz (4.2) postaje

$$C_1 + C_2r^{s_1-s_2}\Big(\big(1+\frac{\epsilon}{r}\big)^{s_1-s_2} - 1\Big) \leq C_1 + C_2r^{s_1-s_2}\big(2^{s_1-s_2}-1\big) \leq \frac{C}{r^{s_2-s_1}}. \quad \square$$

Sjedeća lema koja daje procjenu integrala po domenu Ω se koristi za dokazivanje ograničenosti Bergmanove projekcije na prostoru $L^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Može se pronaći u [65].

Lema 4.0.3 ([65])**.** *Za* $\gamma > -1$, $t < 1$ *i* $\gamma + t > 0$, *postoji konstanta* C *takva da*

$$\int_{\Omega} \frac{dm(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}r(y)^t} \leq \frac{C}{r(x)^{\gamma+t}}.$$

Dokaz. Lema se dokazuje primjenom Leme 3.1.2 iz glave 3 i Leme 4.0.2.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{dm(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}r(y)^t} &\asymp \int_0^{r_0} \rho^{-t}\int_{\Gamma_\rho} \frac{d\sigma_\rho(y)d\rho}{D(x,y)^{n+\gamma}} \\ &\leq \int_0^{r_0} \frac{C\rho^{-t}}{(r(x)+\rho)^{\gamma+1}}d\rho \leq \frac{C}{r(x)^{\gamma+t}}. \end{aligned} \quad \square$$

Sljedeća teorema sadrži bitan rezultat o ograničenosti Bergmanove projekcije P_γ koja djeluje na težinski Lebegov prostor $L^p_\lambda(\Omega)$.

Teorema 4.0.4. *Pretpostavimo $\gamma > -1$, $1 \leq p < +\infty$ i $\lambda > -1$ zadovoljava nejednakost*

$$\mu_0 = \frac{\lambda - \gamma}{p} < \min\left(\frac{1+\lambda}{p}, \frac{1+\gamma}{p'}\right) = \mu_1. \tag{4.3}$$

Onda je P_γ ograničen linearan operator na prostoru $L^p_\lambda(\Omega)$.

Dokaz. Pošto

$$(P_\gamma f)(x) = \int_\Omega R_\gamma(x,y) r(y)^{\gamma-\lambda} f(y) dm_\lambda(y), \qquad x \in \Omega, \tag{4.4}$$

težinska Bergmanova projekcija P_γ je integralni operator sa jezgrom

$$K_\lambda(x,y) = R_\gamma(x,y) r(y)^{\gamma-\lambda},$$

kada se posmatra kao operator koji djeluje na $L^p_\lambda(\Omega)$.

Slučaj $1 < p < +\infty$.

U ovom slučaju $\mu_1 > 0$ i možemo fiksirati $s > 0$ u intervalu (μ_0, μ_1). Koristićemo Šurov test, sa pomoćnom funkcijom $h(x) = r(x)^{-s}$. Pošto su uslovi $sp' - \gamma < 1$ i $sp' > 0$ zadovoljeni po pretpostavci (4.3) možemo koristiti Propoziciju 1.8.4 i Lemu 4.0.3 da dobijemo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |K_\lambda(x,y)| h(y)^{p'} dm_\lambda(y) &= \int_\Omega |R_\gamma(x,y)| r(y)^{\gamma-\lambda} r(y)^{-sp'+\lambda} dm(y)\\ &\leq C \int_\Omega \frac{dm(y)}{D(x,y)^{n+\gamma} r(y)^{sp'-\gamma}} \leq C r(x)^{-sp'}\\ &= C h(x)^{p'}.\end{aligned}$$

Takođe, prema (4.3), uslovi $sp - \lambda < 1$ i $\gamma + sp - \lambda > 0$ su zadovoljeni pa možemo koristiti Propoziciju 1.8.4 i Lemu 4.0.3 da dobijemo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |K_\lambda(x,y)| h(x)^p dm_\lambda(x) &= \int_\Omega |R_\gamma(x,y)| r(y)^{\gamma-\lambda} r(x)^{-sp+\lambda} dm(x)\\ &\leq C r(y)^{\gamma-\lambda} \int_\Omega \frac{dm(x)}{D(x,y)^{n+\gamma} r(x)^{sp-\lambda}}\\ &\leq C r(y)^{\gamma-\lambda} r(y)^{\lambda-sp+\gamma}\\ &= C h(y)^p.\end{aligned}$$

Prethodne dvije procjene pokazuju da su uslovi za primjenu Šurovog testa zadovoljeni. Dakle, P_γ je ograničen na $L^p_\lambda(\Omega)$.

Slučaj $p = 1$.

Sada je $\mu_1 = 0$ i $\gamma > \lambda$. Ponovo koristeći Propoziciju 1.8.4 i Lemu 4.0.3, dobijamo

$$
\begin{aligned}
\|P_\gamma f\|_{L^1_\lambda} &= \int_\Omega \left| \int_\Omega K_\lambda(x,y) f(y) dm_\lambda(y) \right| dm_\lambda(x) \\
&\le \int_\Omega \left(\int_\Omega |R_\gamma(x,y)| r(y)^{\gamma-\lambda} |f(y)| dm_\lambda(y) \right) dm_\lambda(x) \\
&\le C \int_\Omega r(y)^{\gamma-\lambda} |f(y)| \left(\int_\Omega \frac{dm(x)}{D(x,y)^{n+\gamma} r(x)^{-\lambda}} \right) dm_\lambda(y) \\
&\le C \int_\Omega r(y)^{\gamma-\lambda} |f(y)| r(y)^{\lambda-\gamma} dm_\lambda(y) \\
&= C\|f\|_{L^1_\lambda}.
\end{aligned}
$$
□

Dva specijalna slučaja, $p = 1$ i $\lambda = \gamma$, gornje teoreme, posebno vrijedi spomenuti. To ćemo uraditi u okviru sljedećeg korolara.

Korolar 4.0.5. *Neka je* $\gamma > -1$. *Onda je* P_γ *ograničen linearan operator iz* $L^p_\gamma(\Omega)$ *u* $b^p_\gamma(\Omega)$, *za svako* $1 < p < +\infty$. *Takođe, za* $-1 < \lambda < \gamma$, P_γ *je ograničen linearan operator iz* $L^p_\lambda(\Omega)$ *u* $b^p_\lambda(\Omega)$, *za svako* $1 \le p < +\infty$.

4.1 Bergmanova projekcija koja djeluje na $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$

Sada možemo formulisati i dokazati jednu od dvije glavne teoreme ove glave, a koja predstavlja glavni rezultat iz [16].

Teorema 4.1.1. *Neka je* $1 \le p, q < \infty$, $\alpha > 0$ *i stavimo da je* $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q})$. *Pretpostavimo da je* $\gamma > \alpha - 1$. *Ako je* $p \le q$, *onda je* P_γ *ograničena projekcija iz* $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ *na* $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. *Takođe, ako je* $p > q$ *i* $\gamma \ge 1$ *tj.* $\alpha \ge \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *onda je* P_γ *ograničena projekcija iz* $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ *na* $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Dokaz. Iz pretpostavke da je $\gamma > \alpha - 1$ vidimo da $\lambda = \alpha p - 1$ zadovoljava uslov (4.3) Teoreme 4.0.4. Pošto μ_0 i μ_1 iz (4.3) zavise neprekidno od λ, slijedi da postoji $\eta > 0$ takvo da $\delta = \lambda + \eta$ i $\zeta = \lambda - \eta$ takođe zadovoljavaju ovaj uslov. Dakle, prema prethodnoj teoremi, imamo

$$\|P_\gamma f\|_{L^p_\delta} \le C\|f\|_{L^p_\delta}, \qquad f \in L^p_\delta(\Omega)$$

i

$$\|P_\gamma f\|_{L^p_\zeta} \le C\|f\|_{L^p_\zeta}, \qquad f \in L^p_\zeta(\Omega).$$

Specijalno, ako $f \in L^p_\delta(\Omega)$ i $\mathrm{supp}(f) \subset S_j$, onda

$$\int_{S_k} |P_\gamma f(x)|^p r(x)^{\alpha p-1} 2^{-\eta k} dm(x) \le C \int_{S_j} |f(x)|^p r(x)^{\alpha p-1} 2^{-\eta j} dm(x),$$

za svako $k \in \mathbb{Z}$. Ako $f \in L^p_\zeta(\Omega)$ i $\mathrm{supp}(f) \subset S_j$, onda za svako $k \in \mathbb{Z}$ imamo

$$\int_{S_k} |P_\gamma f(x)|^p r(x)^{\alpha p-1} 2^{\eta k} dm(x) \le C \int_{S_j} |f(x)|^p r(x)^{\alpha p-1} 2^{\eta j} dm(x).$$

Neka je $f \in L^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Pošto je Ω disjunktna unija traka S_j, $f = \sum_j f\chi_{S_j}$. Prvo pretpostavimo da je suma konačna tj. $f\chi_{S_j} \neq 0$, samo za konačno mnogo $j \ge 1$. Koristeći nejednakost Minkovskog i gornje dvije nejednakosti, dobijamo

$$\begin{aligned}
\|(P_\gamma f)\chi_{S_k}\|_{L^p_{\alpha p-1}} &= \|(\sum_j P_\gamma(f\chi_{S_j}))\chi_{S_k}\|_{L^p_{\alpha p-1}} \\
&\le \sum_j \|(P_\gamma(f\chi_{S_j}))\chi_{S_k}\|_{L^p_{\alpha p-1}} \\
&\le C_1 \sum_{j\le k} 2^{\frac{-\eta(k-j)}{p}} \|f\chi_{S_j}\|_{L^p_{\alpha p-1}} + C_2 \sum_{j>k} 2^{\frac{\eta(k-j)}{p}} \|f\chi_{S_j}\|_{L^p_{\alpha p-1}}. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Za $j \in \mathbb{Z}$, neka je $x_j = 2^{-\frac{\eta|j|}{p}}$ i

$$y_j = \begin{cases} \|f\chi_{S_j}\|_{L^p_{\alpha p-1}}, & j \ge 1 \\ 0, & j < 1. \end{cases}$$

Sada za dva niza $X = \{x_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ i $Y = \{y_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ definišemo konvoluciju $X * Y$ kao niz $Z = \{z_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, gdje je

$$z_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-j)y(k).$$

Ovo je klasična konvolucija Y-a sa nizom $W = \{x_{-j}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$, stoga možemo primijeniti standardnu procjenu norme konvolucije nizova, navedenu u Teoremi 1.9.2. Primjetimo da je

$$\|(P_\gamma f)\chi_{S_k}\|_{L^p_{\alpha p-1}} \asymp 2^{-k(\alpha-\frac{1}{p})}\|(P_\gamma f)\chi_{S_k}\|_{L^p}$$

i

$$\|f\chi_{S_j}\|_{L^p_{\alpha p-1}} \asymp 2^{-j(\alpha-\frac{1}{p})}\|f\chi_{S_j}\|_{L^p}.$$

Sada, nejednakost (4.5) možemo izraziti preko konvolucije na sljedeći način:

$$\|(P_\gamma f)\chi_{S_k}\|_{L^p_{\alpha p-1}} \le C(X*Y)(k), \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{4.6}$$

Konačno, Teorema 1.9.2, (4.6) i (4.1) daju

$$\begin{aligned}\|P_\gamma f\|_{L^{p,q}_\alpha} &\le C\|a_k(P_\gamma f)\|_{l^q} = C\|\|(P_\gamma f)\chi_{S_k}\|_{L^p_{\alpha p-1}}\|_{l^q}\\ &\le C\|X\|_{l^1}\|\|f\chi_{S_j}\|_{L^p_{\alpha p-1}}\|_{l^q} \le C\|a_j(f)\|_{l^q} \le C\|f\|_{L^{p,q}_\alpha}.\end{aligned}$$

Vektorski potprostor funkcija sa kompaktnim nosačem u $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ je gust u $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, i lako slijedi da P_γ je ograničen operator iz $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Dalje pokazujemo da za neku konstantu C imamo $\|f\|_{b^t_\gamma} \le C\|f\|_{B^{p,q}_\alpha}$, gdje je $t = \min(p,q)$. Koristićemo Teoremu 3.1.9 o ekvivalenciji normi. Razmotrimo slučajeve $p\le q$ i $p>q$ razdvojeno.

Slučaj $p\le q$. U ovom slučaju $t=p$. Pošto $\frac{q}{p}-1\ge 0$ i $2^{j(\frac{q}{p}-1)}\ge 1$ za $j\in\mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned}\|f\chi_{S_j}\|^q_{L^t_\gamma} &= \left(\int_{S_j}|f(x)|^p dm_\gamma(x)\right)^{\frac{q}{p}}\\ &\le \left(\int_{S_j}|f(x)|^p dm_\gamma(x)\right)^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} = \|f\chi_{S_j}\|^q_{L^{p,q}_\alpha}.\end{aligned}$$

Prema tome, sumacijom po j se dobija $\|f\|^q_{b^t_\gamma} \le \|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha}$, za harmonijsku funkciju f.

Slučaj $p>q$. U ovom slučaju $t=q$ i $\frac{q}{p}-1\le 0$. Koristimo Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima $\frac{p}{t}$ i $\frac{p}{p-t}$ i činjenicu da je $r(x)\asymp 2^{-j}$ na S_j, da dobijemo

$$\begin{aligned}\|f\chi_{S_j}\|^t_{L^t_\gamma} &= \int_{S_j}|f(x)|^t dm_\gamma(x)\\ &\le \left(\int_{S_j}(|f(x)|^t)^{\frac{p}{t}} dm_\gamma(x)\right)^{\frac{t}{p}}\left(\int_{S_j} dm_\gamma(x)\right)^{1-\frac{q}{p}}\\ &\le C\left(\int_{S_j}|f(x)|^p dm_\gamma(x)\right)^{\frac{q}{p}} 2^{-j\gamma(1-\frac{q}{p})}\\ &\le C\left(\int_{S_j}|f(x)|^p dm_\gamma(x)\right)^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} = \|f\chi_{S_j}\|^q_{L^{p,q}_\alpha},\end{aligned}$$

gdje posljednja nejednakost važi zbog pretpostavke $\gamma \geq 1$ u ovom slučaju. Sumacija po j daje $\|f\|^q_{b^t_\gamma} \leq C\|f\|^q_{B^{p,q}_\alpha}$, za harmonijsku funkciju f.

Ovo znači da $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \subset b^t_\gamma(\Omega)$, tako da svaka funkcija $f \in B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ pripada težinskom Bergmanovom prostoru $b^t_\gamma(\Omega)$, sa datim pretpostavkama na parametre p, q i α. Sada zaključujemo da je $P_\gamma f = f$, što znači da je $P_\gamma(L^{p,q}_\alpha(\Omega)) = B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. □

Korolar 4.1.2. *Neka je $\gamma > -1$, $\alpha > 0$, $1 < q < +\infty$ i stavimo $\gamma = \alpha - 1/q$. Onda je P_γ ograničena projekcija iz $L^{1,q}_\alpha(\Omega)$ na $B^{1,q}_\alpha(\Omega)$.*

Primjetimo da korolar nije tačan za $q = 1$: onda je $\gamma = \alpha - 1$ i na osnovu Leme 4.0.1, $L^{1,1}_\alpha(\Omega) = L^1_\gamma(\Omega)$ i $B^{1,1}_\alpha(\Omega) = b^1_\gamma(\Omega)$. Međutim, P_γ nije ograničen na $L^1_\gamma(\Omega)$. Naravno, za $p = 1$ i $q = 1$ uslov $\gamma > \alpha - 1$ nije zadovoljen pošto je $\gamma = \alpha - 1$.

S druge strane, ako je $q = 1$ uslov $\gamma > \alpha - 1$ iz Teoreme 4.1.1 je ekvivalentan sa $\alpha > 1$ i $p > 1$.

Korolar 4.1.3. *Pod pretpostavkama prethodne teoreme, $h(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ je gust u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.*

Dokaz. Izaberimo $f \in B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Za $\epsilon > 0$, neka je χ_ϵ karakteristična funkcija od Ω_ϵ i stavimo $F_\epsilon = P_\gamma(f\chi_\epsilon)$. Onda $\lim_{\epsilon\to 0} f\chi_\epsilon = f$ u $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ i prema tome, koristeći Teoremu 4.1.1, dobijamo

$$f = P_\gamma(f) = P_\gamma(\lim_{\epsilon\to 0} f\chi_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} P_\gamma(f\chi_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon.$$

Posljednje dvije granice se uzimaju, prema Teoremi 4.1.1, u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ (kvazi)-normi.

Pošto je harmonijsko Bergmanovo jezgro glatka funkcija na $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \{(\xi, \xi) : \xi \in \partial\Omega\}$ (vidjeti [46] ili poglavlje 1.8), imamo $P_\gamma(\varphi) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ za funkciju sa kompaktnim nosačem φ u $L^1(\Omega)$. Dakle, $F_\epsilon \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap h(\Omega)$ i dokaz je kompletiran. □

4.2 Bergmanova projekcija na prostoru $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$

U cilju dokazivanja ograničenosti Bergmanove projekcije kao operatora koji djeluje na prostor $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, formulisaćemo i dokazati lemu koja daje procjenu integralne sredine od P_γ preko integralne sredine funkcije f.

Lema 4.2.1. *Neka je $\gamma > -1$ i $1 \leq p \leq \infty$. Onda za $f \in \tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$ imamo*

$$M_p(P_\gamma f, \rho) \leq C \int_0^\epsilon \frac{r^\gamma}{(r+\rho)^{\gamma+1}} M_p(f, r)dr, \qquad 0 < \rho \leq \epsilon.$$

Dokaz. Za $x \in \Gamma_\rho$ i $y \in \Gamma_r$ imamo $r(x) = \rho$ i $r(y) = r$. Koristeći definiciju Bergmanove projekcije P_γ i procjenu Bergmanovog jezgra R_γ, navedenu u Propoziciji 1.8.4, dobijamo

$$\begin{aligned} |P_\gamma f(x)| &\le C \int_0^\epsilon \int_{\Gamma_r} |R_\gamma(x,y)||f(y)| d\sigma_r(y) r^\gamma dr \\ &\le C \int_0^\epsilon r^\gamma dr \int_{\Gamma_r} \frac{|f(y)| d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}} = C \int_0^\epsilon \tilde{f}(r,x) r^\gamma dr, \end{aligned} \tag{4.7}$$

gdje je $\tilde{f}(r,x) = \int_{\Gamma_r} \frac{|f(y)| d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}}$. Ako je $1 < p < \infty$ koristeći Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima p i p' i Lemu 3.1.2 za $s = n + \gamma$, dobijamo

$$\begin{aligned} \tilde{f}(r,x) &\le \left(\int_{\Gamma_r} \frac{d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\Gamma_r} \frac{|f(y)|^p d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \frac{C}{(r(x)+r)^{(\gamma+1)/p'}} \left(\int_{\Gamma_r} \frac{|f(y)|^p d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Integralna nejednakost Minkovskog, gornja nejednakost i Lema 3.1.2 daju

$$\begin{aligned} &M_p(P_\gamma f, \rho) \le C \left(\int_{\Gamma_\rho} \left(\int_0^\epsilon \tilde{f}(r,x) r^\gamma dr \right)^p d\sigma_\rho(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le C \int_0^\epsilon r^\gamma \left(\int_{\Gamma_\rho} \tilde{f}(r,x)^p d\sigma_\rho(x) \right)^{\frac{1}{p}} dr \\ &\le C \int_0^\epsilon r^\gamma \left(\int_{\Gamma_\rho} \left(\frac{1}{(\rho+r)^{(\gamma+1)\frac{p}{p'}}} \int_{\Gamma_r} \frac{|f(y)|^p d\sigma_r(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}} \right) d\sigma_\rho(x) \right)^{\frac{1}{p}} dr \\ &= C \int_0^\epsilon \frac{r^\gamma}{(\rho+r)^{\frac{\gamma+1}{p'}}} \left(\int_{\Gamma_r} |f(y)|^p \int_{\Gamma_\rho} \frac{d\sigma_\rho(x)}{D(x,y)^{n+\gamma}} d\sigma_r(y) \right)^{1/p} dr \\ &\le C \int_0^\epsilon \frac{r^\gamma}{(\rho+r)^{\frac{\gamma+1}{p'}}} \left(\int_{\Gamma_r} \frac{|f(y)|^p}{(\rho+r)^{\gamma+1}} d\sigma_r(y) \right)^{1/p} dr \\ &= C \int_0^\epsilon \frac{r^\gamma}{(r+\rho)^{\gamma+1}} M_p(f,r) dr. \end{aligned}$$

Ako je $p = 1$ ili $p = \infty$, lema slijedi iz nejednakosti (4.7) i Leme 3.1.2. □

Teorema 4.2.2. *Neka je $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$. Ako je $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q}) > \alpha - 1$, onda je Bergmanova projekcija P_γ ograničen operator iz $\tilde{L}^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ u $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$.*

Dokaz. Neka su $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i γ_4 pozitivni brojevi takvi da je $\gamma + 1 = \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4$, $\alpha + \gamma_1 > \gamma_3 > \gamma_1$ i $\gamma_2 > \alpha$. Naprimjer, uzimajući dovoljno malo $\eta > 0$ i pretpostavljajući da je $\gamma_1 = \gamma + 1 - \alpha(1+\eta)$, $\gamma_2 = (1+\eta)\alpha$, $\gamma_3 = \gamma + 1 - (1-\eta)\alpha$ i $\gamma_4 = (1-\eta)\alpha$, vidimo da $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i γ_4 zadovoljavaju gornje uslove. Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i $1 < q < \infty$. Prvo ćemo dokazati

$$M_p(P_\gamma f, \rho) \leq \frac{C}{\rho^{\gamma_3 - \gamma_1}} \left(\int_0^\epsilon \frac{r^{q\gamma_2 - 1}}{(r+\rho)^{q\gamma_4}} M_p^q(f, r) dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Naime, koristeći Lemu 4.2.1, Helderovu nejednakost sa konjugovanim eksponentima q i q' i u odnosu na mjeru $\frac{dr}{r}$ i Lemu 4.0.2 sa $s_1 = \gamma_1 q'$ i $s_2 = \gamma_3 q'$, dobijamo

$$\begin{aligned}
M_p(P_\gamma f, \rho) &\leq C \int_0^\epsilon \frac{r^{\gamma_1 + \gamma_2}}{(r+\rho)^{\gamma_3 + \gamma_4}} M_p(f, r) \frac{dr}{r} \\
&\leq C \left(\int_0^\epsilon \frac{r^{\gamma_2 q}}{(r+\rho)^{\gamma_4 q}} M_p^q(f, r) \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\epsilon \frac{r^{\gamma_1 q'}}{(r+\rho)^{\gamma_3 q'}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&\leq C \left(\frac{1}{\rho^{(\gamma_3 - \gamma_1) q'}} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^\epsilon \frac{r^{\gamma_2 q}}{(r+\rho)^{\gamma_4 q}} M_p^q(f, r) \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Dakle, koristeći gornju nejednakost, osobine brojeva $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i γ_4 , Fubinijevu teoremu i Lemu 4.0.2 sa $s_2 = q\gamma_4$ i $s_1 = q(\alpha - \gamma_3 + \gamma_1)$, kada je $1 \leq p \leq \infty$ i $1 < q < \infty$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\|P_\gamma f\|^q_{B^{p,q}_\alpha} &= \int_0^\epsilon \rho^{\alpha q - 1} M_p^q(P_\gamma f, \rho) d\rho \\
&\leq C \int_0^\epsilon \frac{\rho^{\alpha q - 1}}{\rho^{q(\gamma_3 - \gamma_1)}} \left(\int_0^\epsilon \frac{r^{q\gamma_2 - 1}}{(r+\rho)^{q\gamma_4}} M_p^q(f, r) \right) d\rho \\
&= C \int_0^\epsilon \left(\int_0^\epsilon \frac{\rho^{q(\alpha - \gamma_3 + \gamma_1) - 1} d\rho}{(r+\rho)^{q\gamma_4}} \right) r^{q\gamma_2 - 1} M_p^q(f, r) dr \\
&\leq C \int_0^\epsilon \frac{r^{q\gamma_2 - 1}}{r^{q\gamma_4 - q(\alpha - \gamma_3 + \gamma_1)}} M_p^q(f, r) dr \\
&= C \int_0^\epsilon r^{q(\gamma_2 - \gamma_4) + q(\gamma_1 - \gamma_3)} r^{\alpha q - 1} M_p^q(f, r) dr \\
&= C \int_0^\epsilon r^{\alpha q - 1} M_p^q(f, r) dr = \|f\|_{\tilde{L}^{p,q}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Kada je $q = 1$, rezultat slijedi direktno iz Leme 4.2.1 i Leme 4.0.2. $\square$

Primjetimo da u prethodnoj teoremi operator P_γ nije projekcija prostora $\tilde{L}^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ u $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, pošto prostor $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ nije potprostor od $\tilde{L}^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Naime, harmonijske funkcije koje se anluliraju na otvorenom podskupu Ω_ϵ od Ω, anuliraju se i na Ω, prema teoremi jedinstvenosti za harmonijske funkcije (Teorema 2.1.4). S druge strane, prostor $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ je potprostor od $\tilde{L}^{p,q,s}_{\alpha}(\Omega)$, a naš cilj je da dobijemo operator projekcije u $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Napomenimo da je prostor $\tilde{L}^{p,q,s}_{\alpha}(\Omega)$ uveden u poglavlju 2.2. Nastojeći da dobijemo ovaj rezultat, formulišemo sljedeću propoziciju.

Propozicija 4.2.3. *Neka je* $\alpha > 0$, $1 \le p, s \le +\infty$, $1 \le q < +\infty$. *Ako je* $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q})$, *onda je Bergmanova projekcija* $P_\gamma : \tilde{L}^s(\Omega) \to B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ *kompaktan linearan operator.*

Dokaz. Prvo, pokažimo da je $P_\gamma : L^1(\Omega) \to C(\overline{\Omega}) \cap h(\Omega)$ kompaktan operator. Neka je $f \in L^1(\Omega)$ tako da $\|f\|_{L^1(\Omega)} \le 1$ i $u(x) = P_\gamma f(x)$. Onda imamo

$$\begin{aligned} |u(x)| = &|P_\gamma f(x)| = \left| \int_{\Omega_\epsilon} R_\gamma(x,y) f(y) dm_\gamma(y) \right| \\ &\le \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega_\epsilon} |R_\gamma(x,y)| r(y)^\gamma m(\Omega_\epsilon) \\ &\le C_\gamma \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}_\epsilon} |R_\gamma(x,y)| \end{aligned}$$

Imamo $R_\gamma(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \{(\zeta,\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\})$ (vidjeti [46] ili poglavlje 1.8) i $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega_\epsilon} \subset \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \{(\zeta,\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\}$, pa je $\sup_{(x,y)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}_\epsilon} |R_\gamma(x,y)|$ konstanta koja zavisi od ϵ i označavamo je sa C_ϵ. Dakle, dobijamo $|u(x)| \le C_\gamma C_\epsilon$ t. j. skup $K = P_\gamma(B)$ je ograničen podskup od $C(\overline{\Omega})$, gdje je $B = \{f \in L^1(\Omega) : \|f\|_{L^1(\Omega)} \le 1\}$.

Dokažimo da je familija $K \subset C(\overline{\Omega})$ ekvineprekidna. Za gradijent Bergmanove projekcije funkcije f imamo

$$|\nabla u(x)| \le C_\gamma \sup_{(x,y)\in\Omega\times\Omega_\epsilon} |\nabla_x R_\gamma(x,y)|.$$

Ponovo, koristeći da $R_\gamma(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \{(\zeta,\zeta) : \zeta \in \partial\Omega\})$, dobijamo željenu ekvineprekidnost.

Dakle, prema Arzelà-Ascolijevoj teoremi (poglavlje 1.6), P_γ je kompaktan operator iz $L^1(\Omega)$ u $C(\overline{\Omega}) \cap h(\Omega)$. Pošto je $s \ge 1$, prostor $\tilde{L}^s(\Omega)$ se neprekidno utapa u $L^1(\Omega)$. Osim toga, $C(\overline{\Omega}) \cap h(\Omega)$ se neprekidno utapa u $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, pa je $P_\gamma : \tilde{L}^s(\Omega) \to B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ kompaktan operator. $\square$

Primjetimo da je $P_\gamma : L^1(\Omega) \to C^k(\overline{\Omega}) \cap h(\Omega)$ kompaktan, za svako $k \in \mathbb{N}$, pošto je $\nabla^{k+1}_x R_\gamma(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega_\epsilon})$. Trebamo samo slučaj $k = 0$.

Dobijamo željeni rezultat kombinujući Teoremu 4.2.2 i Propoziciju 4.2.3, koji formulišemo u sljedećoj teoremi.

Teorema 4.2.4. *Neka je $\alpha > 0$, $1 \leq p, s \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$. Ako $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q}) > \alpha - 1$ onda je Bergmanova projekcija P_γ ograničena projekcija iz $\tilde{L}^{p,q,s}_{\alpha}(\Omega)$ u $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$.*

5. Dualnost prostora sa mješovitom normom

U ovoj glavi razmatramo dualnost prostora sa mješovitom normom, odnosno predstavljamo dio rezultata dobijenih u radu [16]. Pošto argumenti predstavljeni u [65] prolaze i u apstraktnoj situaciji, čini se da je opšti pristup ovdje prirodan. Počinjemo sa σ- konačnom mjerom μ na σ- algebri $\mathcal{M}$ na skupu X i posmatramo particiju $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j$ od X na mjerljive, u parovima disjunktne podskupove X_j. Za $j \geq 1$ možemo napraviti restrikciju mjere μ na X_j i dobiti prostor mjere $(X_j, \mathcal{M}_j, \mu_j)$, gdje je $\mathcal{M}_j = \{E \in \mathcal{M} : E \subset X_j\}$, $\mu_j(E) = \mu(E)$ za $E \in \mathcal{M}_j$. Dakle, imamo prostore $L^p(X_j, \mu_j),\ 1 \leq p \leq \infty$.

Dalje, fiksiramo niz $\omega = (\omega_j)_{j=1}^{\infty}$ strogo pozitivnih realnih brojeva i definišemo prostor nizova $l_\omega^q,\ 0 < q \leq \infty$ sa

$$\|(\zeta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{l_\omega^q} = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |\zeta_j|^q \omega_j\Big)^{\frac{1}{q}},\ 0 < q < \infty$$

$$\|(\zeta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{l_\omega^\infty} = \sup_{j \geq 1} |\zeta_j|$$

Uočimo da ako stavimo $\zeta = (\zeta_j)_{j=1}^{\infty}$, možemo pisati $\|\zeta\|_{l_\omega^q} = \|\omega^{\frac{1}{q}} \zeta\|_{l^q}$. Takođe, definišemo prostor nizova $l_\omega^{\infty,q},\ 0 < q \leq 1$ sa

$$\|(\zeta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{l_\omega^{\infty,q}} = \sup_{j \geq 1} |\zeta_j| \omega_j^{1-\frac{1}{q}}.$$

Primjetimo da je $l_\omega^{\infty,1} = l^\infty$. Za $0 < q \leq 1$, koristimo $l_{\omega,q}^{\infty}$ da označimo prostor nizova sa normom

$$\|(\zeta_j)_{j=1}^{\infty}\|_{l_{\omega,q}^{\infty}} = \sup_{j \geq 1} |\zeta_j| \omega_j^{-\frac{1}{q}}.$$

Ovi prostori nizova su Lebegovi prostori formirani u odnosu na težinsku brojačku mjeru $\nu_\omega :\ \nu_\omega(E) = \sum_{j \in E} \omega_j$ na skupu $\mathbb{N}$. Sa gornjim podacima formiramo prostor sa mješovitom normom $L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$ koji se sastoji od mjerljivih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ takvih da $f|_{X_j} \in L^p(X_j,\mu_j)$ za svako $j \geq 1$ i tako da $(\|f|_{X_j}\|_{L^p(X_j,\mu_j)})_{j=1}^{\infty}$ pripada l^q_{ω} (tj. $(\omega_j^{\frac{1}{q}}\|f|_{X_j}\|_{L^p(X_j,\mu_j)})_{j=1}^{\infty}$ pripada l^q). Koristimo $\|f\|_{p,j}$ da označimo $\|f|_{X_j}\|_{L^p(X_j,\mu_j)}$. Eksplicitno, za konačne p i q, uslov da $f \in L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$ znači da je

$$\|f\|^{\omega,\mu}_{p,q} = \left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{X_j}|f|^p d\mu\right)^{\frac{q}{p}}\omega_j\right\}^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Prostori $L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$ su Banahovi prostori za $1 \leq p,q \leq \infty$. Vektorski potprostor $L^{p,q}_{\omega,0}(X,\mu)$ koji se sastoji od svih $f \in L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$ takvih da je $f = 0$ na X_j za sve osim konačno mnogo prirodnih brojeva j, je gust u $L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$ ako je $q < +\infty$. Za $0 < q < 1$, definišemo prostor $L^{p,\infty}_{q,\omega}(X,\mu)$ koji se sastoji od mjerljivih funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ takvih da $\sup_{j\geq 1}\omega_j^{\frac{-1}{q}}\|f\|_{p,j} < +\infty$. U sljedećoj teoremi, radimo u gore opisanom apstraktnom okviru.

Teorema 5.0.1. *Pretpostavimo da je $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ i neka je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Stavimo da je $\omega'_j = \omega_j^{-\frac{q'}{q}}$. Za svaku funkciju ϕ iz $L^{p',q'}_{\omega'}(X,\mu)$ formula*

$$\Lambda_{\phi}(f) = \int_X f\phi d\mu = \sum_{j=1}^{\infty}\int_{X_j} f\phi d\mu_j$$

definiše neprekidan linearan funkcional Λ_{ϕ} na $L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$. Obrnuto, za svako $\Lambda \in (L^{p,q}_{\omega}(X,\mu))^*$ postoji jedinstvena funkcija $\phi \in L^{p',q'}_{\omega'}(X,\mu)$ takva da $\Lambda = \Lambda_{\phi}$. Štaviše, $\|\phi\| = \|\Lambda\|$.

Dokaz. Fiksirajmo ϕ iz $L^{p',q'}_{\omega'}(X,\mu)$. Onda, za f iz $L^{p,q}_{\omega}(X,\mu)$, koristeći Helderovu nejednakost za integrale, imamo

$$\left|\int_{X_j} f\phi d\mu_j\right| \leq \|f\|_{p,j}\|\phi\|_{p',j},$$

pa prema tome

$$\begin{aligned}|\Lambda_{\phi} f| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\|f\|_{p,j}\|\phi\|_{p',j} = \sum_{j=1}^{\infty}\|f\|_{p,j}\omega_j^{\frac{1}{q}}\|\phi\|_{p',j}\omega_j^{-\frac{1}{q}} \\ &\leq \Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|f\|^q_{p,j}\omega_j\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}\|\phi\|^{q'}_{p',j}\omega_j^{-\frac{q'}{q}}\Big)^{\frac{1}{q'}} = \|\phi\|^{\omega',\mu}_{p',q'}\|f\|^{\omega,\mu}_{p,q}.\end{aligned}$$

Dakle, $\Lambda_\phi \in (L^{p,q}_\omega(X,\mu))^*$, štaviše $\|\Lambda_\phi\| \le \|\phi\|^{\omega',\mu}_{p',q'}$.

Obrnuto, neka $\Lambda \in (L^{p,q}_\omega(X,\mu))^*$. Za svako $j \ge 1$ imamo neprekidan linearan funkcional Λ_j na $L^p(X_j, d\mu_j)$ dat sa $L^p(X_j, d\mu_j) \hookrightarrow L^{p,q}_\omega(X,\mu) \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}$ pa prema tome, imamo $\phi_j \in L^{p'}(X_j, d\mu_j)$ takvo da $\Lambda_j g = \int_{X_j} g\phi_j d\mu_j$ za $g \in L^p(X_j, d\mu_j)$. Dakle,

$$\Lambda f_j = \Lambda_j f_j = \int_{X_j} f_j \phi_j d\mu_j = \int_{X_j} f_j \phi_j d\mu$$

ako $f_j = 0$ izvan X_j i $f_j \in L^p(X_j, d\mu_j)$. Štaviše, $\|\Lambda_j\| = \|\phi_j\|_{p',j}$ za $j \ge 1$. Zapravo, norma od Λ_j se dostiže: postoji funkcija g_j u $L^p(X_j, d\mu_j)$ takva da $\|g_j\|_{p,j} = 1$ i $\Lambda_j g_j = \|\Lambda_j\|$. Definišemo $\phi : X \to \mathbb{C}$ stavljajući $\phi(x) = \phi_j(x)$ za $x \in X_j$. Dalje dokazujemo da ϕ pripada prostoru $L^{p',q'}_{\omega'}(X,\mu)$. Fiksirajmo prirodan broj N i stavimo

$$f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j g_j, \qquad \lambda_j \ge 0.$$

Onda $\Lambda f = \sum_{j=1}^N \lambda_j \|\phi_j\|_{p',j}$ i

$$\|f\|^{\omega,\mu}_{p,q} = \left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^q \omega_j\right)^{1/q}.$$

Sada uvodimo $\xi_j = \lambda_j \omega_j^{1/q}$, $1 \le j \le N$. Pošto je $\Lambda f \le \|\Lambda\| \|f\|^{\omega,\mu}_{p,q}$, dobijamo

$$\sum_{j=1}^{N} \xi_j \left\| \frac{\phi_j}{\omega_j^{1/q}} \right\|_{p',j} \le \|\Lambda\| \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j^q\right)^{1/q}$$

za sve skalare $\xi_1, \ldots, \xi_N \ge 0$. Prema dualnosti, vektor $(\omega_j^{-q'1/q} \|\phi_j\|_{p',j})_{j=1}^N$ u $\mathbb{R}^N$ ima q'-normu ograničenu sa $\|\Lambda\|$, što implicira da je

$$\sum_{j=1}^{N} \|\phi_j\|^{q'}_{p',j} \omega_j^{-q'/q} \le \|\Lambda\|^{q'}.$$

Puštajući da $N \to \infty$, dobijamo $\|\phi\|^{\omega',\mu}_{p',q'} \le \|\Lambda\|$. Pošto $\phi \in L^{p',q'}_{\omega'}(X,\mu)$, funkcional Λ_ϕ je neprekidan. Po konstrukciji ϕ, neprekidni linearani funkcionali Λ i Λ_ϕ se poklapaju na gustom podskupu $L^{p,q}_{\omega,0}(X,\mu)$ od $L^{p,q}_\omega(X,\mu)$, prema tome $\Lambda = \Lambda_\phi$. □

Sada razmatramo dualnost za $0 < q < 1$. Neka je $\Lambda : l^q_\omega \to \mathbb{C}$ neprekidan linearan funkcional na l^q_ω. Posmatrajmo operatore množenja $M_{\omega^{\frac{1}{q}}} : l^q_\omega \to l^q$ i $M_{\omega^{-\frac{1}{q}}} : l_q \to l^q_\omega$ koji su zapravo izometrije. Onda je kompozicija $\tilde{\Lambda} = \Lambda \circ M_{\omega^{-\frac{1}{q}}} : l^q \to \mathbb{C}$ neprekidna. Imamo da je $\Lambda = \tilde{\Lambda} \circ M_{\omega^{\frac{1}{q}}}$ i $\Lambda\zeta = \sum_{j=1}^\infty \zeta_j \omega_j^{\frac{1}{q}} \theta_j$ za neko $\theta \in l^\infty$. Ovdje smo koristili dobro poznatu činjenicu da je dual od l^q, l^∞ za svako $0 < q \leq 1$. Možemo predstaviti Λ kao $\Lambda\zeta = \sum_{j=1}^\infty \zeta_j \phi_j \omega_j$, gdje je $\phi = \omega^{\frac{1}{q}-1}\theta$. Niz ϕ je očigledno u prostoru $l^{\infty,q}_\omega$ pošto je $\|\phi\|_{l^{\infty,q}_\omega} = \sup_{j\geq 1} \omega_j^{1-\frac{1}{q}} |\phi_j| < \infty$. Dakle, $(l^q_\omega)^* \cong l^{\infty,q}_\omega$ i sparivanje je dato sa

$$\langle \zeta, \phi \rangle = \sum_{j=1}^\infty \zeta_j \phi_j \omega_j.$$

Ekvivalentno, $(l^q_\omega)^* \cong l^\infty_{\omega,q}$ i sparivanje je dato sa

$$\langle \zeta, \psi \rangle = \sum_{j=1}^\infty \zeta_j \psi_j.$$

Sada možemo formulisati teoremu dualnosti za $1 \leq p < \infty$ i $0 < q < 1$.

Teorema 5.0.2. *Pretpostavimo* $1 \leq p < \infty,\ 0 < q < 1$ *i stavimo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Za svako* $\phi \in L^{p',\infty}_{q,\omega}(X,\mu)$, *formulom*

$$\Lambda_\phi(f) = \int_X f\phi d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_{X_j} f\phi d\mu_j$$

se definiše neprekidan linearan funkcional Λ_ϕ *na* $L^{p,q}_\omega(X,\mu)$. *Obrnuto, za svako* $\Lambda \in (L^{p,q}_\omega(X,\mu))^*$, *postoji jedinstveno* $\phi \in L^{p',\infty}_{q,\omega}(X,\mu)$ *takvo da* $\Lambda = \Lambda_\phi$. *Štaviše,* $\|\phi\| = \|\Lambda\|$.

Kombinujući Teoreme 5.0.1 i 5.0.2, dobijamo dualni prostor težinskog prostora sa mješovitom normom, za $0 < q < \infty$.

Teorema 5.0.3. *Pretpostavimo da je* $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$ *i stavimo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Stavimo da je* $\omega'_j = w_j^{-\frac{q'}{q}}$, $j \in \mathbb{N}$. *Onda imamo*

$$(L^{p,q}_\omega(X,\mu))^* \cong \begin{cases} L^{p',q'}_{\omega'}(X,\mu), & 1 \leq q < \infty,\ q' = \frac{q}{q-1} \\ L^{p',\infty}_{q,\omega}(X,\mu), & 0 < q < 1. \end{cases}$$

Sada navodimo neke posljedice gore navedenih teorema. Za $X = \Omega$, $X_j = S_j$, $\mu = m$ i $\omega_j = 2^{jq(\frac{1}{p}-\alpha)}$, prostor $L^{p,q}_\omega(X,\mu)$ postaje težinski prostor sa mješovitom normom $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, pa dobijamo sljedeću posljedicu Teoreme 5.0.1.

Propozicija 5.0.4. *Za* $1 \le p, q < \infty$ *i* $0 < \alpha < 1$, *imamo* $(L^{p,q}_\alpha(\Omega))^* \cong L^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega)$ *i sparivanje je dato sa*

$$\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi dm.$$

Dokaz. Pošto je $\omega_j = 2^{jq(\frac{1}{p}-\alpha)}$, imamo

$$\omega'_j = \omega_j^{-\frac{q'}{q}} = 2^{-jq'(\frac{1}{p}-\alpha)} = 2^{jq'(\alpha-(1-\frac{1}{p'}))} = 2^{jq'(\frac{1}{p'}-(1-\alpha))}.$$

Dakle, prostor $L^{p',q'}_{\omega'}(X)$ postaje prostor $L^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega)$ u ovim postavkama. □

5.1 Dual prostora $B^{p,q}_\alpha$

U sljedećoj teoremi dobijamo dualni prostor prostora $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, za određeni raspon parametara p, q i α.

Teorema 5.1.1. *Neka je* $1 \le p < \infty$, $1 < q < \infty$, $0 < \alpha < 1$ *i* $(p-1)\alpha > \frac{p-q}{q}$. *Ako je* $p \le q$, *imamo da je* $B^{p,q}_\alpha(\Omega)^* \cong B^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega)$ *i dualnost je data sa*

$$\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi dm.$$

Takođe, ako je $p > q$ *i* $\alpha \ge \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, *imamo isti rezultat o dualnosti.*

Dokaz. Teorema 4.1.1 nam osigurava da je, pretpostavljajući određene uslove na parametre p, q i α, operator P_γ surjektivno neprekidno preslikavanje iz $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Prema tome, adjungovani operator P^*_γ je utapanje prostora $(B^{p,q}_\alpha(\Omega))^*$ u $(L^{p,q}_\alpha(\Omega))^* \cong L^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega)$. Lako se provjeri da se slika operatora P^*_γ sastoji od harmonijskih funkcija i rezultat slijedi iz $L^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega) \cap h(\Omega) = B^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega)$. □

Za $0 < q < 1$, dobijamo sljedeći rezultat dualnosti za prostor sa mješovitom normom $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$.

Propozicija 5.1.2. *Neka je* $1 \le p < \infty$, $0 < q < 1$ *i* $0 < \alpha < 1$. *Onda je* $(L^{p,q}_\alpha(\Omega))^* \cong L^{p',\infty}_{1-\alpha}(\Omega)$ *i sparivanje je dato sa*

$$\langle f, \phi \rangle = \int_\Omega f\phi dm.$$

Dokaz. U definiciji prostora $L_{q,\omega}^{p',\infty}(X,\mu)$, stavimo $X = \Omega$, $X_j = S_j$, $\mu = m$ i $\omega_j = 2^{jq(\frac{1}{p'}-\alpha)}$. Dobijamo $\omega_j^{-\frac{1}{q}} = 2^{j(\alpha-\frac{1}{p'})} = 2^{j(\alpha-(1-\frac{1}{p}))} = 2^{j(\frac{1}{p}-(1-\alpha))}$. Prema tome, u ovim postavkama dobijamo prostor $L_{1-\alpha}^{p',\infty}(\Omega)$ i rezultat je direktna posljedica Teoreme 5.0.2. □

Kombinujući Propozicije 5.0.4 i 5.1.2, dobijamo sljedeći rezultat.

Propozicija 5.1.3. *Pretpostavimo* $1 \leq p < \infty$, $0 < q < \infty$, $0 < \alpha < 1$ *i stavimo* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Onda imamo*

$$(L_\alpha^{p,q}(\Omega))^* \cong \begin{cases} L_{1-\alpha}^{p',q'}(\Omega), & 1 \leq q < \infty,\ q' = \frac{q}{q-1} \\ L_{1-\alpha}^{p',\infty}(\Omega), & 0 < q < 1. \end{cases}$$

6. Teplicov operator na prostoru $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$

U ovoj glavi se bavimo Teplicovim operatorom na prostoru $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Naime, Teplicov operator na $h^{\infty}(\Omega)$ je definisan u poglavlju 1.11. Pošto je potprostor $h^{\infty}(\overline{\Omega}) = h(\Omega) \cap C^{\infty}(\overline{\Omega})$ od $h^{\infty}(\Omega)$ gust u $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, pod određenim uslovima na parametre p, q i α (Korolar 4.1.3), operator $T_{\mu,\gamma}$ je gusto definisan na $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Primjenićemo rezultate izložene u glavama 3, 4 i 5. Rezultati izloženi u ovoj glavi predstavljaju rezultate dobijene u okviru zajedničkog rada sa mentorom, koji je pod recenzijom. U sljedećoj lemi dajemo formalnu jednakost koja se odnosi na Teplicov operator T_{μ}. Koristimo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\gamma}$ da označimo skalarni proizvod u Hilbertovom prostoru $L^2(\Omega, dm_{\gamma})$ koji očigledno zavisi od $\gamma > -1$.

Lema 6.0.1. *Neka za Borelovu mjeru $\mu \geq 0$ važi $\mu(E_{\delta}(x)) \leq Cm(E_{\delta}(x))^{1+\frac{\gamma}{n}}$ gdje je $\gamma > -1$. Onda*

$$\langle T_{\mu} f, g \rangle_{\gamma} = \int_{\Omega} f(y)\overline{g(y)} d\mu(y)$$

za $f, g \in h^{\infty}(\Omega)$.

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da je

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |R_{\gamma}(x,y)| dm_{\gamma}(x) d\mu(y) < \infty, \tag{6.1}$$

koristeći Propoziciju 1.7.5. Za $x \in \Gamma_{\rho}$ i $y \in \Gamma_r$, imamo $r(x) = \rho$ i $r(y) = r$ (tj. $y = r\zeta,\ \zeta \in \partial\Omega$), gdje je $0 < \rho, r \leq \epsilon$. Koristeći Fubinijevu teoremu, Propoziciju 1.7.5, procjenu Bergmanovog jezgra iz Propozicije 1.8.4 , Lemu 3.1.2 i Lemu 4.0.2 (slučaj $s_1 = s_2$) imamo

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |R_{\gamma}(x,y)| dm_{\gamma}(x) d\mu(y) = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |R_{\gamma}(x,y)| d\mu(y) \right) dm_{\gamma}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_\mu \int_\Omega \left(\int_\Omega |R_\gamma(x,y)| dm_\gamma(y) \right) dm_\gamma(x) \\
&\leq C_\mu \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{r(y)^\gamma dm(y)}{D(x,y)^{n+\gamma}} \right) dm_\gamma(x) \\
&\leq C_\mu \int_\Omega \left(\int_0^\epsilon r^\gamma \int_{\Gamma_r} \frac{d\sigma_r(\zeta)}{D(x,\zeta)^{n+\gamma}} dr \right) dm_\gamma(x) \\
&\leq C_{\mu,\gamma} \int_\Omega \left(\int_0^\epsilon r^\gamma \frac{dr}{(r(x)+r)^{\gamma+1}} \right) dm_\gamma(x) \\
&\leq C_{\mu,\gamma} \int_\Omega \ln(1+\frac{\epsilon}{r(x)}) r(x)^\gamma dm(x).
\end{aligned}
$$

Pošto je $\gamma > -1$, posljednji integral je konvergentan, pa smo dokazali (6.1).

Sada, prema definiciji Teplicovog operatora, imamo

$$\langle T_\mu f, g\rangle_\gamma = \int_\Omega T_\mu f(x)\overline{g(x)} dm_\gamma(x) = \int_\Omega \int_\Omega R_\gamma(x,y) f(y) d\mu(y) \overline{g(x)} dm_\gamma(x).$$

Nejednakost (6.1) nam dozvoljava da koristimo Fubinijevu teoremu da kompletiramo dokaz. Naime, koristeći reprodukujuću formulu za $\overline{g} \in b^2_\gamma(\Omega)$ i Fubinijevu teoremu, konačno dobijamo

$$\langle T_\mu f, g\rangle_\gamma = \int_\Omega f(y)\overline{g(y)} d\mu(y). \quad \square$$

U sljedećoj lemi se bavimo test funkcijama iz Leme 3.1.10 i dokazujemo pomoćno tvrđenje o njihovoj slaboj konvergenciji.

Lema 6.0.2. *Neka je $1 \leq p < \infty$, $1 < q < \infty$, $1 < \alpha < 1$, $(p-1)\alpha > \frac{p-q}{q}$ i za svako $x \in \Omega$, f_x test funkcija iz Leme 3.1.10. Takođe, neka $x_j \in \Omega$ zadovoljava $\lim_{j\to\infty} r(x_j) = 0$ (ekvivalentno $x_j \to \partial\Omega$). Ako $p \leq q$, onda f_{x_j} slabo konvergira ka 0, kada $j \to \infty$, u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Ako $p > q$ i $\alpha \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, onda imamo isto tvrđenje o slaboj konvergenciji, tj. $w - \lim_{j\to\infty} f_{x_j} = 0$ u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.*

Dokaz. Neka je $\varphi \in (B^{p,q}_\alpha(\Omega))^*$. Na osnovu rezultata o dualnosti, navedenog u Teoremi 5.1.1, imamo da je $(B^{p,q}_\alpha(\Omega))^* \cong B^{p',q'}_{\alpha'}(\Omega)$, gdje je $\alpha' = 1 - \alpha$. Dakle,

$$\int_0^\epsilon M^{q'}_{p'}(\varphi, r) r^{\alpha' q' - 1} dr < +\infty.$$

Neka je $f_j = f_{x_j}$. Koristeći Helderovu nejednakost, imamo

$$|\langle f_j, \varphi\rangle| = |\int_\Omega f_j \varphi dm| \leq C \int_0^\epsilon \left(\int_{\Gamma_r} |f_j \varphi| d\sigma_r \right) dr$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C\int_0^{\epsilon}\left(\int_{\Gamma_r}|f_j|^p d\sigma_r\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\Gamma_r}|\varphi|^{p'}d\sigma_r\right)^{\frac{1}{p'}}dr\\
&=\int_0^{\epsilon}M_p(f_j,r)M_{p'}(\varphi,r)dr\\
&=\int_0^{\epsilon}M_p(f_j,r)r^{\alpha}M_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'}\frac{dr}{r}\\
&=\int_{\delta}^{\epsilon}M_p(f_j,r)r^{\alpha}M_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'}\frac{dr}{r}+\int_0^{\delta}M_p(f_j,r)r^{\alpha}M_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'}\frac{dr}{r},
\end{aligned}
$$

gdje je $0<\delta<\epsilon$. Sada imamo

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{j\to\infty}|\langle f_j,\varphi\rangle|\\
&\leq \limsup_{j\to\infty}\int_{\delta}^{\epsilon}M_p(f_j,r)r^{\alpha}M_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'}\frac{dr}{r}+\limsup_{j\to\infty}\int_0^{\delta}M_p(f_j,r)r^{\alpha}M_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'}\frac{dr}{r}\\
&=\limsup_{j\to\infty}\int_0^{\delta}M_p(f_j,r)r^{\alpha}M_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'}\frac{dr}{r}\leq\|f_j\|_{B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)}\int_0^{\delta}M^{q'}_{p'}(\varphi,r)r^{\alpha'q'-1}dr\to 0,
\end{aligned}
$$

kada $\delta\to 0$, pošto $f_j\to 0$ uniformno na $\overline{\Omega}_{\delta}\setminus\Omega_{\epsilon}$ $(\delta\leq r(x)\leq\epsilon)$ na osnovu Leme 3.2.3. □

6.1 Ograničenost Teplicovog operatora

U ovom poglavlju dajemo karakterizaciju konačnih Borelovih mjera $\mu\geq 0$ za koje je operator T_μ ograničen. To ćemo uraditi koristeći teoremu utapanja Karlesonovog tipa za ove prostore (Teoremu 3.1.8), ograničenost Bergmanove projekcije (Teoremu 4.1.1), i rezultat o dualnosti za ove prostore (Teoremu 5.1.1).

Teorema 6.1.1. *Neka je μ konačna pozitivna Borelova mjera, $1\leq p<\infty, 1<q<\infty$, $0<\alpha<1$, $(p-1)\alpha>\frac{p-q}{q}$. Ako je $p\leq q$ onda su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

1. *$\hat{\mu}_{\delta,\gamma}$ je ograničena na Ω, za svako (ili za neko) $\delta\in(0,1)$*
2. *T_μ $(T_{\mu,\gamma})$ je ograničen na $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$. Preciznije formulisano, $T_{\mu,\gamma}=T_\mu$ ima neprekidno proširenje iz $h^\infty(\overline{\Omega})=h(\Omega)\cap C^\infty(\overline{\Omega})$ na operator koji ćemo opet označiti sa T_μ, koji je ograničen na prostoru $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$.*
3. *μ je mjera Karlesonovog tipa za $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$*

4. $\tilde{\mu}$ *je ograničena na* Ω*.*

Takođe, ako je $p > q$ *i* $\alpha \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$*, gornji uslovi su ekvivalentni.*

Dokaz. Uslovi (1) i (3) su ekvivalentni prema Teoremi 3.1.11.

Pretpostavimo da je T_μ ograničen na $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ (tj. (2) važi) i f_x je test funkcija iz Leme 3.1.10. Onda $f_x \in h(\Omega)$, $\|f_x\|_{B^{p,q}_\alpha} \leq C$ i $T_\mu f_x \in B^{p,q}_\alpha$. Koristeći subharmoničnost od $|T_\mu f_x(x)|^p$, za $p \geq 1$ i činjenicu da je $r(x) \asymp r(y)$ za $y \in E_{\frac{\delta}{3}}(x)$, dobijamo

$$\begin{aligned}
|T_\mu f_x(x)|^q &\leq \frac{C}{r(x)^{n\frac{q}{p}+\alpha q-\frac{q}{p}}} \left\{ \int_{E_{\frac{\delta}{3}}(x)} |T_\mu f_x(y)|^p r(y)^{\alpha p-1} dm(y) \right\}^{\frac{q}{p}} \\
&\leq \frac{C}{r(x)^{n\frac{q}{p}+\alpha q-\frac{q}{p}}} \left\{ \sum_{j=k-N}^{k+N} \left[\int_{S_j} |T_\mu f_x(y)|^p dm(y) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-\alpha q)} \right\} \\
&\leq \frac{C}{r(x)^{n\frac{q}{p}+\alpha q-\frac{q}{p}}} \{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_{S_j} |T_\mu f_x(y)|^p dm(y) \right]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-\alpha q)} \} \\
&\asymp \frac{C}{r(x)^{n\frac{q}{p}+\alpha q-\frac{q}{p}}} \|T_\mu f_x\|^q_{B^{p,q}_\alpha} \leq \frac{C}{r(x)^{n\frac{q}{p}+\alpha q-\frac{q}{p}}} \|f_x\|^q_{B^{p,q}_\alpha}.
\end{aligned}$$

Onda $r(x)^{n\frac{1}{p}+\alpha-\frac{1}{p}} |T_\mu f_x(x)| \leq C \|f_x\|_{B^{p,q}_\alpha} \leq C$. Koristeći definicije od T_μ i f_x i Propoziciju 1.8.4 (specijalno (1.15)), dobijamo

$$\begin{aligned}
T_\mu f_x(x) &= \int_\Omega R_\gamma(x,y) f_x(y) d\mu(y) = \int_\Omega R_\gamma(x,y) \frac{R_\gamma(x,y)}{R_\gamma(x,x)^{1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)}}} d\mu(y) \\
&\asymp r(x)^{(n+\gamma)(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{p(n+\gamma)}-\frac{1}{q(n+\gamma)})} \int_\Omega |R_\gamma(x,y)|^2 d\mu(y)
\end{aligned}$$

gdje je $\gamma = p(\alpha - \frac{1}{q})$. Izraženo preko Berezinove transformacije, ovo znači da je

$$r(x)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-\frac{n+\gamma}{p}} \tilde{\mu}(x) \asymp |T_\mu f_x(x)|.$$

Dakle

$$\tilde{\mu}(x) \asymp r(x)^{\frac{1}{q}+\frac{n+\gamma}{p}-\frac{1}{p}} |T_\mu f_x(x)| \leq C \|f_x\|_{B^{p,q}_\alpha} \leq C$$

tj. $\tilde{\mu}$ je ograničena na Ω (tj. (4) važi). Dakle, dokazali smo da (2) $\implies$ (4).

Sada pretpostavimo da je Berezinova transformacija ograničena tj. (4) važi i dokažimo (1). Neka je $x \in \Omega$. Onda

$$\int_{E_\delta(x)} |R_\gamma(x,y)|^2 d\mu(y) \asymp r(x)^{-2(n+\gamma)} \mu(E_\delta(x)),$$

za $\delta \in (0,1)$ dovoljno malo i

$$\frac{1}{|R_\gamma(x,x)|} \asymp r(x)^{n+\gamma}$$

koristeći procjene harmonijskog Bergmanovog jezgra iz Leme 3.1.3 i Propozicije 1.8.4. S druge strane imamo

$$\int_{E_\delta(x)} \frac{|R_\gamma(x,y)|^2}{|R_\gamma(x,x)|} d\mu(y) \le \int_\Omega \frac{|R_\gamma(x,y)|^2}{|R_\gamma(x,x)|} d\mu(y) = |\tilde{\mu}(x)| \le C.$$

Dakle,

$$\frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}} \le C$$

tj. $\hat{\mu}_{\delta,\gamma} \le C$, za svako $\delta \in (0,1)$, prema Korolaru 1.11.3, pa smo dokazali (1).

Pretpostavimo sada da je μ Karlesonova mjera za $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ tj. (3) važi i imamo neprekidno utapanje $B^{p,q}_\alpha(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$. Koristeći Helderovu nejednakost za integrale, sa konjugovanim eksponentima p i p', dobijamo

$$\int_{S_j} |f(x)g(x)| d\mu(x) \le \left(\int_{S_j} |f(x)|^p r(x)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{S_j} |g(x)|^{p'} r(x)^{p'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p'}},$$

za $f, g \in h^\infty(\Omega)$. Sada, koristeći Lemu 6.0.1, Helderovu nejednakost za sume, sa konjugovanim eksponentima q i q', dobijamo

$$\begin{aligned}
|\langle T_\mu f, g\rangle| &\le \sum_{j=1}^\infty \int_{S_j} |f(x)g(x)| d\mu(x) \\
&\le \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left(\int_{S_j} |f(x)|^p r(x)^{\frac{p}{q}-1} d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left(\int_{S_j} |g(x)|^{p'} r(x)^{p'(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} d\mu(x) \right)^{\frac{q'}{p'}} \right\}^{\frac{1}{q'}} \\
&\asymp \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left(\int_{S_j} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \sum_{j=1}^\infty \left(\int_{S_j} |g(x)|^{p'} d\mu(x) \right)^{\frac{q'}{p'}} 2^{j(\frac{q'}{p'}-1)} \right\}^{\frac{1}{q'}}
\end{aligned}$$

$$\leq C\|f\|_{B^{p,q}_\alpha}\|g\|_{B^{p',q'}_{1-\alpha}}.$$

Dakle, na osnovu argumenta o dualnosti prostora (Teorema 5.1.1), T_μ je ograničen operator na $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ pošto je $h^\infty(\overline{\Omega})$ gust u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, prema Korolaru 4.1.3. Dakle, dokazali smo (3) $\implies$ (2). □

6.2 Kompaktnost Teplicovog operatora

U ovom poglavlju karakterišemo kompaktne Teplicove operatore T_μ kroz sljedeću teoremu.

Teorema 6.2.1. *Neka je μ konačna pozitivna Borelova mjera, $1 \leq p < \infty, 1 < q < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $(p-1)\alpha > \frac{p-q}{q}$. Ako je $p \leq q$, onda su sljedeći uslovi ekvivalentni.*

1. *$\hat{\mu}_{\delta,\gamma}(x) \to 0$ kada $x \to \partial\Omega$*
2. *T_μ je kompaktan na $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$*
3. *μ je iščezavajuća Karlesonova mjera za $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$*
4. *$\tilde{\mu}(x) \to 0$ kada $x \to \partial\Omega$.*

Takođe, ako je $p > q$ i $\alpha \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, gornji uslovi su ekvivalentni.

Dokaz. Uslov (1) je ekvivalentan sa (3) prema Teoremi 3.2.5. Pretpostavimo da je T_μ kompaktan na $B^{p,q}_\alpha$ (tj.(2) važi) i f_x je ponovo test funkcija iz Leme 3.1.10. Onda, prema Lemi 6.0.2, niz $\{f_{x_j}\}$ harmonijskih funkcija konvergira ka 0 slabo, kada $x_j \to \partial\Omega$. Sada, pošto kompaktan operator slika slabo konvergentan niz u konvergentan niz u normi odgovarajućeg prostora (Teorema 1.6.7), imamo da je

$$\lim_{x_j \to \partial\Omega} \|T_\mu f_{x_j}\|_{B^{p,q}_\alpha} = 0.$$

Sada, kao u dokazu odgovarajućeg smjera prethodne teoreme, imamo

$$\tilde{\mu}(x)^q \asymp r(x)^{\frac{nq}{p}+\alpha q-\frac{q}{p}}|T_\mu f_x(x)|^q \leq \|T_\mu f_x\|^q_{B^{p,q}_\alpha} \to 0,$$

kada $x \to \Gamma$, pa smo dokazali (4). Dakle, dokazali smo (2) $\implies$ (4).

Sada pretpostavimo da je $\lim_{x\to\Gamma}\tilde{\mu}(x) = 0$ tj. (4) važi i dokažimo (1). Kao u dokazu odgovarajućeg smjera prethodne teoreme, dobijamo

$$\frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}} \leq |\tilde{\mu}(x)|,$$

tj. $\hat{\mu}_{\delta,\gamma} \leq |\tilde{\mu}(x)|$. Pošto $\tilde{\mu}(x) \to 0$, kada $x \to \Gamma$, imamo

$$\hat{\mu}_{\delta,\gamma} \to 0,$$

kada $x \to \Gamma$. Dakle, dokazali smo (1).

Sada pretpostavimo da $\hat{\mu}_{\delta,\gamma}$ zadovoljava (1). Treba da dokažemo da je operator T_μ kompaktan. Neka je (f_n) niz u $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ koji konvergira slabo ka nuli u $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$, onda je ograničen i konvergira uniformno ka nuli na svakom kompaktnom podskupu od Ω. Dakle, prema Teoremi 3.2.6,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\int_{S_j} |f_n(x)|^p d\mu(x) \Big]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} = 0.$$

Sada, kao u dokazu prethodne teoreme dobijamo

$$|\langle T_\mu f, g\rangle| \leq C\|f\|_{B_\alpha^{p,q}} \|g\|_{B_{1-\alpha}^{p',q'}}$$

i

$$\|T_\mu f_n\|_{B_\alpha^{p,q}}^q \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \Big[\int_{S_j} |f_n(x)|^p d\mu(x) \Big]^{\frac{q}{p}} 2^{j(\frac{q}{p}-1)} \to 0 \text{ kada } n \to \infty.$$

Dakle, dokazali smo da (1) $\implies$ (2).

$\square$

Zaključak

U okviru ove disertacije razmatrano je i riješeno nekoliko problema u vezi sa harmonijskim prostorima funkcija sa mješovitom normom. Opisane su mjere Karlesona za ove prostore koje predstavljaju jedan od važnih aspekata teorije prostora funkcija. Karleson je prvi skrenuo pažnju na važnost za kompleksnu analizu teorema o utapanju analitičkih prostora funkcija u prostor s mjerom. Teoremu takve vrste za klasu Hardijevih prostora na jediničnom disku je koristio kao pomoćno sredstvo za rješavanje problema korone. U teoremama slične prirode obično je naznačena klasa "standardnih" skupova, na kojima mjera mora biti podređena Lebegovoj mjeri. Ti skupovi se obično nazivaju Karlesonovi boksovi. Mnogi autori su se bavili Karlesonovim mjerama za različite prostore analitičkih i harmonijskih funkcija. S obzirom da je slučaj analitičkih funkcija više istražen, ova disertacija se bavi prostorima harmonijskih funkcija, prostorima sa mješovitom normom $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ na glatkim ograničenim oblastima u $\mathbb{R}^n$. U teoremi utapanja Karlesonovog tipa, koja predstavlja jedan od glavnih rezultata istraživanja, nestandardno je da se prostor $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ utapa u prostor $L^{p,q}(\Omega, d\mu)$ sa mješovitom normom, budući da teoreme utapanja Karlesonovog tipa obično uključuju utapanje u L^p prostor. Posmatrali smo prostor $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$ za određen raspon njegovih parametara, te utapanje ovog prostora u prostor sa mješovitom normom u odnosu na Borelovu mjeru μ na Ω - $L^{p,q}(\Omega, d\mu)$. Dokazali smo da je potreban i dovoljan uslov da ovo utapanje bude neprekidno, da za mjeru μ važi

$$\mu(E_\delta(x)) \leq C r(x)^{n+\gamma}, \quad x \in \Omega,$$

gdje je $\gamma = \beta \frac{p}{q} = p(\alpha - \frac{1}{q})$. Ovaj geometrijski uslov je standardan. Naime, mjera Karlesonovog boksa, koji je u ovom slučaju Euklidova lopta $E_\delta(x)$ sa centrom u x i poluprečnikom samjerljivim sa $r(x)$, je kontrolisana Lebegovom mjerom ovog skupa. Takođe, opisali smo i iščezavajuće mjere Karlesona, tj. dobili potreban i dovoljan uslov da utapanje $B_\alpha^{p,q}(\Omega) \hookrightarrow L^{p,q}(\Omega, d\mu)$ bude kompaktno. Radi se o geometrijskom uslovu

$$\lim_{x \to \Gamma} \frac{\mu(E_\delta(x))}{r(x)^{n+\gamma}} = 0,$$

koji je ponovo standardan u slučaju iščezavajućih mjera Karlesona.

Istraživanje Karlesonovih mjera se dalje može nastaviti i u smislu uopštenja Karlesonovih mjera; možemo posmatrati tzv "iskrivljene" Karlesonove mjere za prostore sa mješovitom normom kao što je to razmatrano u [2, 3] za težinske Bergmanove prostore analitičkih funkcija. Karlesonove mjere se mogu proširiti na β harmonijske funkcije kao što je to urađeno u [90].

U četvrtoj glavi smo se bavili istraživanjem (težinske) Bergmanove projekcije koja djeluje na prostore sa mješovitom normom, $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ i $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Dobili smo dovoljne uslove na parametre p, q i α da je operator Bergmanove projekcije ograničen na ovim prostorima te da projektuje prostor $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ na prostor harmonijskih funkcija sa mješovitom normom $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, tj. $P_\gamma(L^{p,q}_\alpha(\Omega)) = B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Naime, posmatrali smo djelovanje Bergmanove projekcije P_γ na prostor $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, za parametre $1 \le p, q < \infty,\ \alpha > 0,\ \gamma = p(\alpha - \frac{1}{q}),\ \gamma > \alpha - 1$. Dobili smo da ako je $p \le q$, onda je P_γ ograničena projekcija iz $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ na $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Takođe, ako je $p > q$ i $\gamma \ge 1$ tj. $\alpha \ge \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, onda je P_γ ograničena projekcija iz $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ na $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Ostaje otvoreno pitanje da li je moguće da se jedan ili oba parametra p i q spuste ispod 1, te za $0 < p, q < 1$ dokaže ograničenost operatora Bergmanove projekcije. To nije moguće dokazati na isti način kao što smo to uradili za $1 \le p, q < \infty$. U drugom dijelu četvrte glave posmatrali smo djelovanje projekcije P_γ na drugi prostor sa mješovitom normom $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, i to za parametre $\alpha > 0,\ 1 \le p \le \infty,\ 1 \le q < \infty,\ \gamma = p(\alpha - \frac{1}{q}) > \alpha - 1$. Dobili smo da je Bergmanova projekcija P_γ ograničen operator iz $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$ u $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$. Primjetimo da smo i ovdje radili sa parametrima $1 \le p \le \infty$ i $1 \le q < \infty$ te ostaje otvoreno pitanje da li je operator Bergmanove projekcije ograničen kada je jedan od ili oba parametra, ispod 1. Ograničenost se svakako ne može dokazati na isti način kao što je to urađeno u slučaju $1 \le p \le \infty,\ 1 \le q < \infty$.

Bergmanove projekcije posmatrane u glavi 4 se mogu uopštiti slično kao što je to urađeno u [18] u analitičkom slučaju prostora sa mješovitom normom na lopti u $\mathbb{C}^n$ i u [17] u harmonijskom slučaju. Naime, bilo bi interesantno posmatrati umjesto projekcije P_γ sa standardnom stepenom težinom $r(x)^\gamma$, operator Bergmanovog tipa sa opštijom tzv. normalnom težinskom funkcijom. Zapravo, ovakve težine su one koje imaju stepene majorante i minorante sa pozitivnim eksponentima. Takođe, može se posmatrati i dvoparametarski operator Bergmanovog tipa sa dvije težine koje predstavljaju tzv. normalan par težinskih funkcija.

Glavni rezultat pete glave je dual prostora $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$; dobili smo

$$B^{p,q}_\alpha(\Omega)^* \cong B^{p',q'}_{1-\alpha}(\Omega).$$

Ova dualnost važi za $1 \le p < \infty,\ 1 < q < \infty,\ 0 < \alpha < 1,\ (p-1)\alpha > \frac{p-q}{q}$, ako je $p \le q$. Ako je $p > q$, uz dodatnu pretpostavku za parametar $\alpha : \alpha \ge \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, imamo isti rezultat. Dualnost je data sa

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \phi dm.$$

Rezultat dualnosti smo dobili kao posljedicu ograničenosti Bergmanove projekcije koja važi za $1 \leq p, q < \infty$, stoga na ovaj način nismo dobili dualni prostor kada je jedan od paramatara ispod 1, iako je dual prostora (mjerljivih) funkcija sa mješovitom normom $L^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$ dobijen za $0 < p, q < \infty$, čak i za prostor u nešto apstraktnijem okviru, sa opštijim težinama. Kada se težine u spomenutom (apstraktnijem) prostoru sa mješovitom normom konkretizuju u kontekstu prostora od interesa $L^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, uslov na težinu postaje $0 < \alpha < 1$. Dakle, rezultat dualnosti nismo dobili za vrijednosti parametra veće od 1, što ostaje otvoreno pitanje.

U posljednjoj glavi ove disertacije bavili smo se primjenom dobijenih rezultata. Posmatrali smo Teplicov operator na prostoru sa mješovitom normom $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, te ga povezali sa mjerom Karlesona i Berezinovom transformacijom. Naime, potreban i dovoljan uslov da je Teplicov operator T_{μ} ograničen na $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, je da je mjera μ mjera Karlesona za prostor $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, kao i da je Berezinova transformacija $\tilde{\mu}$ ograničena na Ω; naravno pod određenim uslovima za parametre p, q i α. Takođe, dobili smo i potrebne i dovoljne uslove da je operator T_{μ} kompaktan. Kompaktnost operatora T_{μ} je potreban i dovoljan uslov da je mjera μ iščezavajuća mjera Karlesona kao i da Berezinova transformacija $\tilde{\mu}(x)$ teži ka nuli, kada se x približava granici oblasti Ω. Istraživanje Teplicovih operatora je prirodno nastaviti u kontekstu Schatenovih klasa; okarakterisati mjere μ za koje operatori T_{μ} pripadaju Schattenovoj klasi.

Skup Ω za kojeg su dobijeni rezultati je oblast sa C^{∞} granicom; glatkost granice je potrebna zbog primjene rezultata Engliša iz [46] o procjenama Bergmanovih jezgara a koji pretpostavljaju $C^{\infty}-$ glatkost granice. Ostaje otvoreno pitanje da li je moguće smanjiti glatkost granice, npr. posmatrati oblasti sa C^1 granicom. Dakle, postoji više pravaca daljeg istraživanja, stoga istraživanje u okviru disertacije, osim samih dobijenih rezultata koji uopštavaju niz prethodno dobijenih rezultata, otvara mogućnosti daljeg istraživanja prostora $B^{p,q}_{\alpha}(\Omega)$, u smislu proširenja i generalizacije dobijenih rezultata, kao i primjene istih. Metodi dokazivanja tvrdjenja u okviru disertacije su djelimično već poznati i korišćeni u nekim specijalnim, jednostavnijim slučajevima.

Literatura

[1] M. Abate, Carleson measures and Toeplitz operators, chapter in Metrical and Dynamical Aspects in Complex Analysis, *Lecture Notes in Mathematics* **2195**, Springer (2017), 141–157.

[2] M. Abate, S. Mongodi, J. Raissy, Toeplitz operators and skew Carleson measures for weighted Bergman spaces on strongly pseudoconvex domains, *Journal of Operator Theory* **84** (2020), 339-364.

[3] M. Abate, J. Raissy, Skew Carleson measures in strongly pseudoconvex domains, *Complex Anal. Oper. Theory* **13**(2) (2019), 405–429. DOI 10.1007/s11785-018-0823-4.

[4] M. Abate, J. Raissy, A. Saracco, Toeplitz operators and Carleson measures in strongly pseudoconvex domains, *Journal of Functional Analysis* **263**(11) (2012), 3449–3491.

[5] M. Abate, A. Saracco, Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains, *J. Lond. Math. Soc.* **2** (83) (2011), no. 3, 587–605. DOI 10.1112/jlms/jdq092.

[6] P. Ahern, M. Jevtić, Duality and multipliers for mixed norm spaces, *Michigan Math. J.* **30** (1983), 53–64. DOI: 10.1307/mmj/1029002787

[7] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, Carleson measures and interpolating sequences for Besov spaces on complex balls, *Memoirs Amer. Math. Soc.* 859, (2006).

[8] E. Amar, A subordination principle. Applications. *North-West. Eur. J. Math.* **1** (2015), 23–45.

[9] I. Arévalo, Weighted composition operators on spaces and classes of analytic functions, Universidad Autonóma de Madrid, Departamento de Matemáticas, Tesis doctoral, 2017.

[10] H. Arroussi, J. Pau, Reproducing kernel estimates, bounded projections and duality on large weighted Bergman spaces, *J. Geom. Anal.* **25** (2014), 1–29.

[11] M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić, Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 1999.

[12] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On boundedness of the multifunctional Bergman type operators in tube domains over symmetric cones, *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute* **158**(2012), 83–97.

[13] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces, *Kragujevac Journal of Mathematics* **37**(1) (2013), 45–64. Zbl 1299.42022, MR3073697

[14] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On some new theorems on multipliers in harmonic function spaces in higher dimension II, *Bull. Korean Math. Soc.* **50** (2013), 1451–1469. https://doi.org/10.48550/arXiv.1107.2460

[15] M. Arsenović, T. Jovanović, Embedding of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in $\mathbb{R}^n$. *Open Mathematics* **17** (2019), 1260–1268. MR4029571, DOI 10.1515/math-2019-0108

[16] M. Arsenović, I. Savković, Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, *Annals of Functional Analysis* **13** (4) (2022). https://doi.org/10.1007/s43034-022-00217-1

[17] K. L. Avetisyan, Estimates for harmonic reproducing kernel and Bergman type operators on mixed norm and Besov spaces in the real ball, *Anals of functional analysis* **14** (40) (2023) DOI: 10.1007/s43034-023-00262-4

[18] K. L. Avetisyan, A. I. Petrosyan, Normal weighted Bergman type operators on mixed norm spaces over the ball in $\mathbb{C}^n$, *J. Korean Math. Soc.* **55** (2) (2018), 313–326. https://doi.org/10.4134/JKMS.j170195

[19] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic function theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.

[20] A. Benedek, R. Panzone, The spaces L^p with mixed norm, *Duke Math. J.* **28** (1961), 301–324.

[21] S. Bergman, The Kernel Function and Conformal Mapping, Amer. Math. Soc., Providence 1950.

[22] O. Blasco, Multipliers on spaces of analytic functions, *Canad. J. Math.* **47** (1995), 44–64.

[23] M. Bourass, I. Marrhich, Littlewood-Paley estimates with applications to Toeplitz and integration operators on weighted Bergman spaces, *Banach Journal of Mathematical Analysis* **17** 10 (2023).

[24] A. Brown, P.R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, *J. Reine Angew. Math* **213** (1964), 89–102.

[25] M. Calzi, M. M. Peloso, Carleson and reverse Carleson measures on homogeneous Siegel domains, *Complex Anal. Oper. Theory* **16** (4) (2022). https://doi.org/10.1007/s11785-021-01177-5

[26] M. Calzi, M. M. Peloso, Boundedness of Bergman projectors on homogeneous Siegel domains, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series* **2** (2022). https://doi.org/10.1007/s12215-022-00798-9

[27] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. J. Math.* **80**,1958, 921–930.

[28] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, *Ann. of Math.* **76**, 1962, 547–559.

[29] R. Chartrand, Toeplitz operators on Dirichle-type spaces, *Journal of Operator Theory* **48** (1) (2002), 3-13 .

[30] B. R. Choe, Y. J. Lee, K. Na, Toeplitz operators on harmonic Bergman space. *Nagoya Mathematical Journal* **174** (2004), 165–186. Zbl 1067.47039, DOI https://doi.org/10.1017/S0027763000008837.

[31] B. R. Choe, H. Koo, and H. Yi, Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces, Potential Analysis, 17 (2002), 307–33.

[32] J.A. Cima and P.R. Mercer, Composition operators between Bergman spaces on convex domains in $\mathbb{C}^n$, *J. Operator Theory* **33** (1995), 363–369.

[33] J. Cima, W. Wogen, A Carleson measure theorem for the Bergman space of the ball, *J. Operator Theory* **7**, (1982), 157–165.

[34] J. M. Cohen, F. Colonna, D. Singman, Carleson and Vanishing Carleson Measures on Radial Trees, *Mediterr. J. Math.* **10** (2013), 1235–1258. https://doi.org/10.1007/s00009-012-0232-2

[35] O. Constantin, Carleson embeddings and some classes of operators on weighted Bergman spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **365** (2010), 668–682.

[36] Ž. Čučković, T. Le, Toeplitz operators on Bergman spaces of polyanalytic functions *Bulletin of London Mathematical Society* **44** (5) (2012), 961-973.

[37] D. Debertol, Besov spaces and the boundedness of weighted Bergman projections over symmetric tube domains, *Publ. math.* **49**(2005), 21–72.

[38] Y. Deng, L. Huang, T. Zhao, D. Zheng, Bergman projection and Bergman spaces, *Journal of Operator Theory* **46** (1) (2001), 3–24.

[39] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, Topics in the theory of A^p_α spaces, Teubner-Texte zur Mathematik, vol. 105, Leipzig 1988.

[40] Ö. F. Dogan, Positive Toeplitz operators from a harmonic Bergman-Besov space into another, *Banach Journal of Mathematical Analysis* **16** 70 (2022).

[41] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press New York and London, 1972.

[42] P. L. Duren, Extension of a theorem of Carleson, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 143–146.

[43] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic press, New York and London 1970.

[44] P. Duren, A. Schuster, Bergman spaces, Mathematical Surveys and Monographs **100**, American Mathematical Society, 2004.

[45] P.L. Duren, R. Weir, The pseudohyperbolic metric and Bergman spaces in the ball, *Trans. Amer. Math. Soc.* **359** (2007), 63–76.

[46] M. Engliš, Boundary singularity of Poisson and harmonic Bergman kernels. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **429** (2015), 233-272.

[47] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.***26** (1974), 1–65.

[48] C. Fefferman, E. M. Stein, H^p Spaces of Several Variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137–193.

[49] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, *J. Math. Anal. Appl.* **38**, (1972), 746–765.

[50] T.M. Flett, Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk, *J. Math. Anal. Appl.* **39** (1972), 125–158.

[51] F. Forelli, W. Rudin, Projection on spaces of holomorphic functions in balls, *Indian Univ. Math. J.* **24** (1974), 593–602.

[52] S. Gadbois, Mixed-norm generalization of Bergman spaces and duality, *Proceedings of the American mathematical society*, **104**(4), 1988.

[53] J. Gonessa, Sharp Norm Estimates for Weighted Bergman Projections in the Mixed Norm Spaces, *J. Contemp. Mathemat. Anal.* **53** (2018), 321–330. https://doi.org/10.3103/S1068362318060031

[54] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third Edition, Springer, 2014.

[55] S. Grudsky, A. Karapetyants, N. Vasilevski, Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols, *Journal of Operator Theory* **49** (2) (2003), 325-346.

[56] D. Gu, Bergman projections and duality in weighted mixed-norm spaces of analytic functions, *Michigan mathematical journal*, **39**(1), 1992.

[57] D. Girela, J.Á. Peláez, F. Pérez-González, J. Rättyä, Carleson Measures for the Bloch Space, *Integr. equ. oper. theory* **61** (2008), 511–547. https://doi.org/10.1007/s00020-008-1602-9

[58] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, *Math. Z.* **34** (1932), 403-439.

[59] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, *Quart. J. Math.* **12** (1941), 221–256.

[60] W.W. Hastings, A Carleson measure theorem for Bergman spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 237–241.

[61] E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Second edition, Springer-Verlag, 1994.

[62] L. Hormander, Lp estimates for (pluri-)subharmonic functions, *Math. Scand.* **20**, 65-78, (1967). DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10821

[63] B. Hu, S. Li, Y. Shi, B. D. Wick, Sparse domination of weighted composition operators on weighted Bergman spaces, *Journal of Functional Analysis* **280**(6) (2021). https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108897

[64] Z. Hu, Estimate for the integral mean of harmonic function on bounded domain in $\mathbb{R}^n$. *Science in China, Series A* **38**(1) (1995), 36–46.

[65] Z. Hu, X. Lv, Carleson type measures for harmonic mixed norm spaces with application to Toeplitz operators. *Chinese Annals of Mathematics, Series B* **34B**(4) (2013), 623–638.

[66] Z. Hu, X. Lv, Toeplitz Operators on Fock Spaces $F^p(\varphi)$ *Integr. Equ. Oper. Theory* **80** (2014), 33–59. https://doi.org/10.1007/s00020-014-2168-3

[67] Z. Hu, X. Lv, K. Zhu, Carleson measures and balayage for Bergman spaces of strongly pseudoconvex domains, *Mathematische Nachrichten***289** (10)(2016), 1237–1254. https://doi.org/10.1002/mana.201500021

[68] L. Huang, D. Yang, On function spaces with mixed norms— A survey, *Journal of mathematical study*(2019), 1-75.

[69] J. Isralowitz, K. Zhu, Toeplitz Operators on the Fock Space, *Integr. Equ. Oper. Theory* **66** (2010), 593–611. https://doi.org/10.1007/s00020-010-1768-9

[70] M. Jevtić, Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions, *Complex Variables* **8** (1987), 293-301.

[71] M. Jevtić, M. Pavlović, Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$, *Acta Math. Hungar.* **85** (1999), 81-96.

[72] M. Jevtić, D. Vukotić, M. Arsenović, Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-Type Spaces, RSME Springer Series 2, 2016.

[73] T. Jovanović, On Carleson-type embeddings for Bergman spaces of harmonic functions. *Analysis Mathematica* **44**(4) (2017), 493–499.

[74] H. Kang, H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domains, *Journal of Functional Analysis* **185** (2001), 220–239.

[75] H. T. Kaptanoğlu, Besov Spaces and Carleson Measures on the Ball, *Comptes Rendus Mathematique* **343** (2006), 453–456. 10.1016/j.crma.2006.09.001.

[76] H. T. Kaptanoğlu, Carleson Measures for Besov Spaces on the Ball with Applications, *Journal of Functional Analysis* **250**(2007), 483–520. 10.1016/j.jfa.2006.12.016.

[77] A. Karapetyants, S. Samko, Mixed norm spaces of analytic functions as spaces of generalized fractional derivatives of functions in Hardy type spaces, *Fractional Calculus and Applied Analysis* **20** (2017), 1106–1130. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0059

[78] A. Karapetyants, S. Samko, Mixed norm Bergman–Morrey-type spaces on the unit disc, *Math Notes* **100** (2016), 38–48. https://doi.org/10.1134/S000143461607004X

[79] A. Karapetyants, I. Smirnova, Weighted holomorphic mixed norm spaces in the unit disc defined in terms of Fourier coefficients, *Complex Variables and Elliptic Equations* **67:7** (2022), 1543-1553. DOI: 10.1080/17476933.2021.1885384

[80] H. Koo, K. Nam, H. Yi, Weighted harmonic Bergman kernel on half-spaces, *J. Math. Soc. Japan* **58**(2) (2006)

[81] H. Keshavarzi, Characterization of forward, vanishing and reverse Bergman Carleson measures using sparse domination. arXiv:2110.08926v1 (2021).

[82] P. Koosis, Introduction to H_p spaces, second edition, Cambridge University Press, 1999. DOI https://doi.org/10.1017/CBO9780511470950.

[83] S. G. Krantz, Function theory of several complex variables, second edition, AMS Chelsea publishing, Providence, Rhode Island, 2001.

[84] S. G. Krantz, H. R. Parks, The geometry of domains in space, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Birkhauser Boston, Inc., Boston, Mass., 1999.

[85] Rainer Kress, Linear Integral Equations, third edition, Applied Mathematical Sciences (82), Springer, 2014.

[86] P. Lefèvre, L. Rodríguez-Piazza, Absolutely summing Carleson embeddings on Hardy spaces, *Advances in Mathematics* **340** (2018), 528–587. https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.10.012

[87] Yu-Xia Liang, Ren-Yu Chen, Weighted Composition Operator from Mixed Norm Space to Bloch-Type Space on the Unit Ball, *Abstract and Applied Analysis* (2014), Article ID 107560, 10 pages, 2014. https://doi.org/10.1155/2014/107560

[88] S. Li, A class of integral operators on mixed norm spaces in the unit ball, *Czech Math J* **57** (3) (2007), 1013–1023. https://doi.org/10.1007/s10587-007-0091-3

[89] E. H. Lieb, M. Loss, Analysis, second edition, Graduate Studies in Mathematics (14), American Mathematical Society, 2001.

[90] H. Liu, H. Yang and Q. Yang, Carleson Measures and Trace Theorem for β-harmonic Functions, *Taiwanese Journal of Mathematics* **22** (5) (2018), 1107–1138. DOI: 10.11650/tjm/171201

[91] C. Liu, J. Shi, G. Ren, Duality for harmonic mixed-norm spaces in the unit ball of $\mathbb{R}^n$, *Ann. Sci. Math. Quebec* **25** (2), (2001), 179–197.

[92] D. H. Luecking, Inequalities on Bergman Spaces, *Illinois J. Math.* **25** (1981), 1–11.

[93] D. H. Luecking, Equivalent Norms on L^p Spaces of Harmonic Functions, *Mh. Math.* **96** (1983), 133–141.

[94] D. H. Luecking, Closed Ranged Restriction Operators on Weighted Bergman Spaces, *Pac. J. Math.* **110** (1984), 145– 160.

[95] D. H. Luecking, Forward and Reverse Carleson Inequalities for Functions in Bergman Spaces and their Derivatives, *Am. J. Math.* **107** (1985), 85–111.

[96] D. H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, *J. Funct. Anal.* 73(2) (1987), 345–368.

[97] D. Luecking, A technique for characterizing Carleson measures on Bergman spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87** (1983) (4), 656–660, DOI 10.2307/2043353.

[98] D. H. Luecking, Sampling measures for Bergman spaces on the unit disc, *Matematische Annalen* **316** (2000), 659–679. https://doi.org/10.1007/s002080050348

[99] B. Maccluer, R. Zhao, Vanishing logarithmic Carleson measures, *Illinois Journal of Mathematics* **46** (2) (2002), 507–518.

[100] M. Mateljević, M. Pavlović, Duality and multipliers in Lipschitz spaces, *Proceedings of the International Conference of Complex Analysis*, Varna (1983), 153–160.

[101] M. Mateljević, M. Pavlović, L^p -behaviour of the integral means of analytic functions, *Studia Math.* **77** (1984), 219–237.

[102] M. Mateljević, M. Pavlović, Multipliers of H^p and BMOA, *Pacific J. Math.* **146** (1990), 71–89.

[103] M. Mateljević, M. Pavlović, An extension of the Forelli-Rudin projection theorem, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 36 (1993), 375-389.

[104] J. Miao, Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of the unit ball, *Monatsh. Math.* **125** (1998), 25–35.

[105] M. Mitkovski, D. Suárez, B. D. Wick, The Essential Norm of Operators on $A^p_\alpha(\mathbb{B}^n)$, *Integral Equations Operator Theory* **75** (2)(2013), 197-233.

[106] K. Nam, I. Park, Volume integral means of harmonic functions on smooth boundary domains, *Bull. Korean Math. Soc.* **51**(4) (2014), 1195–1204. Zbl 1295.31015, MR3248717, DOI http://dx.doi.org/10.4134/BKMS.2014.51.4.1195

[107] C. Nana, $L^{p,q}$-Boundedness of Bergman Projections in Homogeneous Siegel Domains of Type II, *Journal of Fourier Analysis and Applications* **19** (5)(2013), 997–1019. DOI:10.1007/s00041-013-9280-7

[108] R. Nevanlinna, Über beschrtänkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, *Annales Academie Scientiarum Fennicae* **13** (1919), No. 1.

[109] V. L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, *Journal of Soviet Mathematics*, **9** (1978), 228–243.

[110] V.L. Oleinik and B.S. Pavlov, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, *J. Soviet Math.* **2** (1974), 135–142.

[111] V. L. Oleinik, G. S. Perel'man, Carleson' s imbedding theorem for a weighted Bergman space, *Math. Notes Acad. Sci. USSR* **47** (1990), 577–581. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01170888

[112] I. Park, Bounded projections, duality and representations on large mixed norm spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **423** (2)(2015), 1113-1128. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.10.042.

[113] J. Pau, R. Zhao, Carleson measures and Toeplitz operators for weighted Bergman spaces on the unit ball, *Michigan Math. J.* **64**(4) (2015), 759–796. DOI: 10.1307/mmj/1447878031

[114] J. Pau, R. Zhao, Carleson Measures, Riemann–Stieltjes and Multiplication Operators on a General Family of Function Spaces, *Integr. Equ. Oper. Theory* **78** (2014), 483–514. https://doi.org/10.1007/s00020-014-2124-2

[115] M. Pavlović, Mixed norm spaces of analytic and harmonic functions, I, *Publications de l'institut mathématique* **40**(54)(1986), 117–141.

[116] V. Peller, Hankel Operators and Their Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York (2003).

[117] S. Power, Hormanders Carleson theorem for the ball, *Glasg. Math. J.* **26** (1985), 13-17. DOI: https://doi.org/10.1017/S0017089500005711

[118] S. C. Power, Vanishing Carleson Measures, *Bulletin of the London Mathematical Society* **12** (3) (1980), 207–210. https://doi.org/10.1112/blms/12.3.207.

[119] W. Ramey, H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, *Trans. Amer. Math.* **348**(1996), 633-660.

[120] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis, Revised and enlarged edition, Academic Press Inc. 1980.

[121] G. Ren, J. Shi, Bergman type operators on mixed norm spaces with applications, Chin. Ann. Math. Ser B 18(3)(1997), 265–276.

[122] W. Rudin, Real and complex analysis, third edition, McGraw-hill international editions, Mathematics series, 1987.

[123] I. Savković, Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces on bounded domains in $\mathbb{R}^n$, *Czechoslovak Mathematical Journal* **72** (2022), 1205–1216. https://doi.org/10.21136/CMJ.2022.0018-22

[124] I. Savković, Boundedness of Bergman projections acting on weighted mixed norm spaces, *Turkish Journal of Mathematics* (2023) **47**(2) (2023), 687 – 693. DOI: 10.55730/1300-0098.3387

[125] A. P. Schuster, D. Varolin, Toeplitz operators and Carleson measures on generalised Bergmann-Fock Spaces, *Integral Equations and Operator Theory* **72**(3) (2012), 363–392.

[126] Romi F. Shamoyan, M. Arsenović, On Multipliers of Holomorphic $F^{p,q}_{\alpha}$ Type Spaces on the Unit Polydisc, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics* **5** (4)(2012), 471–479.

[127] J. Shapiro, Thesis, University of Michigan, 1969.

[128] A. Sharma, A. K. Sharma, M. Mursaleen, Vanishing Carleson measures and power compact weighted composition operators, *Methods of Functional Analysis and Topology* **28** (3) (2022), 259–273.

[129] A. L. Shields, D. L. Williams, Bonded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **162** (1971), 287–302.

[130] K. Sierra, Classical operators on weighted Bergman and mixed norm spaces, academic dissertation, University of Eastern Finland, Department of Physics and Mathematics, Joensuu 2018.

[131] D. Stegenga, Multipliers of the Dirichlet space, *Illinois J. Math.* **24** (1) (1980) 113–139. DOI: 10.1215/ijm/1256047800

[132] E. M. Stein, On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of H^p spaces. *Acta Math.* **103** (1960), 25-62.

[133] E. M. Stein, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton Univ. Press, Princeton 1972.

[134] S. Stević, On Harmonic Function Spaces II, *Journal of Computational Analysis and Applications* **10**(1) (2008), 205–228.

[135] K. Stroethoff, Compact Toeplitz operators on Bergman spaces, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **124** (1) (1998) , 151 - 160. DOI: https://doi.org/10.1017/S0305004197002375

[136] K. Stroethoff, Harmonic Bergman Spaces, *Holomorphic Spaces MSRI Publications* **33** (1998), 51–63.

[137] D. Suárez, A generalization of Toeplitz operators on the Bergman space, *Journal of Operator Theory* **73** (2) (2015), 315–332. http://www.jstor.org/stable/24718127

[138] M. H. Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space II, Translation invariant operators, duality and interpolation, *J. Math Mech.* **14** (1965), 821–839.

[139] E. Tchoundja, Carleson measures for Hardy Sobolev spaces and Generalized Bergman spaces, Thesis for the degree of licentiate of philosophy, Department of Mathematical Sciences, Goteborg University, 2007.

[140] W. Thomson, P. G. Teit, Treatise on Natural Philosophy, Cambridge University Press, 1879.

[141] C. Tong, J. Li, Carleson measures on the weighted Bergman spaces with Békollé weights. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, **42**(4) (2021), 583–600.

[142] M. Wang, L. Zhou, Carleson Measures and Toeplitz Type Operators on Hardy Type Tent Spaces, *Complex Anal. Oper. Theory* **15** (70) (2021). https://doi.org/10.1007/s11785-021-01113-7

[143] V.P. Zaharjuta, V.I. Judovic, The general form of linear functional in H_p', [Russian], *Uspekhi Mat. Nauk* **19** (1964), 139–142.

[144] X. Zhang, J. Xiao, Z. Hu, The multipliers between the mixed norm spaces in $\mathbb{C}^n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **311** (2005), 664-674. 10.1016/j.jmaa.2005.03.010.

[145] Y. Zhang, Toeplitz Operator and Carleson Measure on Weighted Bloch Spaces, *Journal of Function Spaces* (2019), Article ID 4358959, 5 pages.

[146] Y. Zhang, X. Wang, Z. Hu, Toeplitz operators on Bergman spaces with exponential weights, *Complex Variables and Elliptic Equations* (2022), DOI: 10.1080/17476933.2022.2034150

[147] R. Zhao, K. Zhu, Theory of Bergman spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$, *Société Mathématique de France*, 2008.

[148] K. Zhu, Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains, *J. Operator Theory* **20** (1988), 329–357.

[149] K. Zhu, Spaces of holomorphic functions in the unit ball, Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

[150] K. Zhu, Operator theory in Function Spaces, American Mathematical Society, Second Edition, 2007.

[151] K. Zhu, A Sharp norm estimate of the Bergman projection on L^p spaces, *Contemporary Math.* **404** (2006), 199–205.

Biografija

Ivana Savković je rođena 7. 8. 1988. u Tesliću. Osnovnu školu "Petar Petrović Njegoš" završila je 2003. godine, kao učenik generacije, nakon čega je upisala Gimnaziju u SMŠ "Jovan Dučić" u Tesliću. Tokom osnovnog i srednjoškolskog obrazovanja ostvarila je značajne rezultate na regionalnim takmičenjima iz matematike, nekoliko puta plasirajući se na prvo mjesto. Učestvovala je i na takmičenjima republičkog nivoa. Nakon okončanja srednjoškolskog obrazovanja, 2007. godine upisuje Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Banjoj Luci, odsjek Matematika i informatika, opšti smjer. Osnovne studije je završila 2012. sa prosjekom 9.10. Master studije je upisala 2013. godine, smjer Matematička analiza i primjene te ih završila 2018. godine sa prosjekom 9.83. Doktorske studije je upisala 2018. godine na istom fakultetu, studijski program Matematika. Tokom studija bila je stipendista Ministarstva za naučno-tehnološki razvoj i informaciono društvo Republike Srpske. Od 2012. do 2014. bila je zaposlena u Gimnaziji Katoličkog školskog centra u Banjoj Luci kao profesor matematike a od 2014. do 2016. radila je u Gimnaziji Banja Luka kao profesor matematike u Nacionalnom programu i Programu međunarodne mature. Od 2016. godine zaposlena je na Mašinskom fakultetu, u zvanju asistenta te višeg asistenta od 2020. godine, za užu naučnu oblast Matematička analiza i primjene.

Bibliografija radova u vezi sa doktorskom disertacijom

- M. Arsenović, I. Savković, Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, *Annals of Functional Analysis* **13**(4) (2022). https://doi.org/10.1007/s43034-022-00217-1

- I. Savković, Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces on bounded domains in $\mathbb{R}^n$, *Czechoslovak Mathematical Journal* **72** (2022), 1205–1216. https://doi.org/10.21136/CMJ.2022.0018-22

- I. Savković, Boundedness of Bergman projections acting on weighted mixed norm spaces, *Turkish Journal of Mathematics* (2023) **47**(2) (2023), 687 – 693. DOI: 10.55730/1300-0098.3387

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ *Образац 3*
ФАКУЛТЕТ: Природно-математички факултет

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
Природно-математички факултет
Број: 19-4.78/24
Датум: 7.2.2024. год.
БАЊА ЛУКА

ИЗВЈЕШТАЈ
о оцјени урађене докторске дисертације

1. ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

Орган који је именовао комисију: Сенат Универзитета у Бањој Луци, на основу приједлога одлуке Научно-наставно вијећа Природно-математичког факултета (број: 19/3.54/24, дана 12.01.2024.)

Датум именовања комисије: 01.02.2024.

Број одлуке: 02/04-3.192-40/24

Чланови комисије:

	Презиме и име	Звање	Научно поље и ужа научна област
1.	Академик проф. др Миодраг Матељевић	Редовни професор	Математичка анализа и примјене
	Установа у којој је запослен-а: Математички факултет Универзитета у Београду		Функција у комисији: предсједник
2.	Академик проф. др Зоран Митровић	Редовни професор	Математичка анализа и примјене
	Установа у којој је запослен-а: Електротехнички факултет Универзитета у Бањој Луци		Функција у комисији: члан
3.	Проф. др Владимир Јовановић	Ванредни професор	Математичка анализа и примјене
	Установа у којој је запослен-а: Природно-математички факултет Универзитета у Бањој Луци		Функција у комисији: члан
4.	Проф. др Биљана Војводић	Ванредни професор	Математичка анализа и примјене
	Установа у којој је запослен-а: Машински факултет Универзитета у Бањој Луци		Функција у комисији: члан

2. ПОДАЦИ О СТУДЕНТУ

Име, име једног родитеља, презиме: Ивана (Милош) Савковић					
Датум рођења: 07.08.1988.					
Мјесто и држава рођења: Теслић, БИХ					
2.1. Студије првог циклуса или основне студије или интегрисане студије					
Година уписа:	2007	Година завршетка:	2012	Просјечна оцјена током студија:	9,1
Универзитет: Универзитет у Бањој Луци					
Факултет/и: Природно-математички факултет					
Студијски програм: Математика и информатика					
Стечено звање: Дипломирани математичар и информатичар					
2.2. Студије другог циклуса или магистарске студије					
Година уписа:	2013	Година завршетка:	2018	Просјечна оцјена током студија:	9,83
Универзитет: Универзитет у Бањој Луци					
Факултет/и: Природно-математички факултет					
Студијски програм: Математика					
Назив завршног рада другог циклуса или магистарске тезе, датум одбране: Теореме интерполације са примјенама, 12.03.2018.					
Ужа научна област завршног рада другог циклуса или магистарске тезе: Математичка анализа и примјене					
Стечено звање: Магистар математике					
2.3. Студије трећег циклуса					
Година уписа:	2018	Број ECTS остварених до сада:	162	Просјечна оцјена током студија:	10,00
Факултет/и: Природно-математички факултет					
Студијски програм: Математика					

2.4. Приказ научних и стручних радова студента

РБ	Подаци о референци	Категорија[1]
1.	I. Savković, Boundedness of Bergman projections acting on weighted mixed norm spaces, Turkish Journal of Mathematics (2023) 47(2)	SCI часопис,

[1] Категорија се односи на оне часописе и научне скупове који су категорисани у складу са Правилником о публиковању научних публикација („Службени гласник РС", бр. 77/10) и Правилником о мјерилима за остваривање и финансирање Програма одржавања научних скупова („Службени гласник РС", бр. 102/14) односно припадност рада часописима индексираним у свјетским цитатним базама.

	(2023), 687 – 693. DOI:10.55730/1300-0098.3387	IF=1.0	
Кратак опис садржине: У раду је доказано да су Бергманове пројекције на тежинским просторима са мјешовитом нормом на глатким ограниченим областима у $\mathbb{R}^n$ ограничене за одређени распон параметара ових простора и претпостављајући одређене услове на тежине. Доказ се ослања на процјене интегралних средина $M_p(P_\gamma f, r)$ користећи интегралне средине од f. Овај резултат допуњава ранији резултат о ограничености пројекције P_γ на уско повезаном простору $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
2.	M. Arsenović, I. Savković, Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, Annals of Functional Analysis 13 (4) (2022). https://doi.org/10.1007/s43034-022-00217-1	SCI часопис, IF=1.0	
Кратак опис садржине: У раду се проучава тежинска Бергманова пројекција која дјелује на простор функција са мјешовитом нормом и дуалност простора са мјешовитом нормом. Доказано је да је Бергманова пројекција P_γ ограничен оператор на тежинском Лебеговом простору $L^p_\lambda(\Omega)$, за одређени распон параметара p, λ и γ. Овдје је Ω ограничен домен са глатком границом. Даље се овај резултат користи да се докаже ограниченост оператора P_γ који дјелује на простор са мјешовитом нормом $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$, поново под одређеним условима за параметре. Описан је и дуал простора хармонијских функција са мјешовитом нормом $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ за одређени распон параметара.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
3.	I. Savković, Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces on bounded domains in R^n, Czechoslovak Mathematical Journal 72 (2022), 1205–1216. https://doi.org/10.21136/CMJ.2022.0018-22	SCI часопис, IF=0.5	
Кратак опис садржине: Главни резултат је карактеризација мјера Карлесона за тежинске просторе хармонијских функција са мјешовитом нормом. Прво је добијен резултат о еквиваленцији норми на овим просторима. Затим је дат потребан и довољан услов геометријске природе да се простор хармонијских функција са мјешовитом нормом утапа у одговарајући простор функција са мјешовитом нормом.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
4.	И. Савковић, Марцинкијевичева теорема интерполације са примјеном, *МАТ-КОЛ (Бања Лука)* XXV (3) (2019), 177—190. DOI: 10.7251/1903177S	Стручни рад у часопису националног значаја (с рецензијом)	
Кратак опис садржине: У раду је приказан важан резултат из теорије интерполације, наиме Марцинкијевичева теорема о интерполацији. Осим самог резултата, представљен је и аутор истог, Јозеф Марцинкијевич, као једна од најзначајнијих личности у пољској математици. Споменута теорема се у раду користи за за добијање битних неједнакости у хармонијској анализи па метода рада подразумијева коришћење елемената функционалне			

анализе и теорије мјере и интеграције.		
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације	ДА	НЕ

3. УВОДНИ ДИО ОЦЈЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов докторске дисертације: Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност
Научно поље: Математика
Ужа научна област: Математичка анализа и примјене

Датум прихватања теме докторске дисертације и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета: 16.11.2022. године, Приједлог одлуке Научно-наставног вијећа Природно-математичког факултета о именовању комисије за оцјену подобности теме, кандидата и ментора за израду докторске дисертације, број 19/3.3795/22
24.11.2022. Одлука Сената Универзитета у Бањој Луци о сагласности на именовање комисије за оцјену подобности теме, кандидата и ментора за израду докторске дисертације, број 02/04-3.2436-65/22

Датум прихватања Извјештаја комисије за оцјену подобности студента, теме и ментора за израду докторске дисертације и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета: 08.02.2023. године, Приједлог одлуке Научно-наставног вијећа Природно-математичког факултета о Прихватању Извјештаја комисије за оцјену подобности теме, кандидата и испуњености услова за менторство и именовању ментора за израду докторске дисертације, број 19/3.240/23
23.02.2023. године, Одлука Сената Универзитета у Бањој Луци о сагласности на Извјештај комисије за оцјену подобности теме, кандидата и испуњености услова за менторство и именовању ментора за израду докторске дисертације, број 02/04-3.356-57/23
Садржај докторске дисертације уз навођење броја страна.

Дисертација је написана на српском језику на 120 страна А4 формата и текст дисертације је подијељен на седам глава: Увод, Неке битне особине хармонијских функција и простори хармонијских функција са мјешовитом нормом, Карлесонове мјере за тежинске просторе са мјешовитом нормом, Бергманове пројекције, Дуалност простора са мјешовитом нормом, Теплицов оператор на простору $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, Закључак.
Осим тога, на почетку су наведени Резиме, Ознаке и Попис слика (2 слике), те је на крају наведена Литература (151 референца).
У првој (уводној) глави су уведени појмови који се користе току дисертације и дат је преглед досадашњих истраживања која су у вези са предметом истраживања саме дисертације. Друга глава је посвећена неким битним особинама хармонијских функција будући да су управо хармонијске функције у фокусу истраживања. У истој глави је дефинисан и главни објекат истраживања – простор хармонијских функција са мјешовитом нормом $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$.
Главни резултати дисертације су изложени у трећој, четвртој, петој и шестој глави. Трећа глава се бави мјерама Карлесона за просторе $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$ и ишчезавајућим мјерама Карлесона за исте просторе.
Наиме дата је карактеризација мјера Карлесона за одређени распон параметара p, q и α.
У четвртој глави су добијени резултати у вези са ограниченошћу Бергманове пројекције P_γ која дјелује на простор $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ пројектујући га на простор $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, под одређеним условима на параметре. Такође, у истој глави је описано и дјеловање тежинске Бергманове пројекције на други простор мјерљивих функција са мјешовитом нормом, у ознаци $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, за одређени распон параметара простора.
У петој глави је добијен дуални простор простора $B^{p,q}_\alpha(\Omega)$, за одређени распон параметара простора, и то као посљедица ограничености Бергманове пројекције и резултата дуалности за простор мјерљивих фунцкија са мјешовитом нормом, дефинисан у нешто апстрактнијем оквиру.
У шестој глави су добијени су резултати о Теплицовим операторима, који представљају примјену добијених резултата о мјерама Карлесона, Бергмановим пројекцијама и дуалности простора фунција са мјешовитом нормом.
У закључку (седмој глави) дисертације су на систематски, концизан и језгровит начин изложени остварени резултата те су формулисани и нови отворени проблеми, правци даљег истраживања.

Допринос аутора дисертације је формулисање и доказивање базичних теорема из теорије простора функција у случају хармонијских простора функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, ограниченост Бергманове пројекције, дуалност, као и примјена на Теплицове операторе.

4. УВОД И ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

Истраживање се бави граном теорије функционалних простора која се интензивно развија више од једног вијека. У посљедњих неколико година посебна пажња је посвећена просторима хармонијских и аналитичких функција чије (квази) норме зависе од два или три параметра. Дисертација се бави тежинским просторима са мјешовитом нормом на општим доменима у $\mathbb{R}^n$ са глатком границом и помјера и уопштава резултате добијене у доменима једноставне геометријске структуре.
Теорија простора функција представља веома важну област математичке анализе. Карактеризација мјера Карлесона, ограниченост Бергманове пројекције и дуалност су централни проблеми у теорији простора аналитичких и хармонијских функција. Истраживање се фокусира на случај хармонијских функција на ограниченој области Ω у $\mathbb{R}^n$ са глатком границом. Циљ истраживања је дати потпуну информацију о просторима са мјешовитом нормом са степеном тежином и уопштити низ ранијих резултата добијених за нетежинске просторе и просторе на геометријски једноставним доменима.

Главне хипотезе:

1. Карлесонове мјере за просторе функција са мјешовитом нормом у ограниченим областима у $\mathbb{R}^n$ са глатком границом се могу описати помоћу утапања одговарајућих простора функција, као што је то случај са Хардијевим, Бергмановим и осталим просторима функција за које је споменута карактеризација добијена.
2. Оператор Бергманове пројекције је под одређеним условима ограничен на тежинском простору функција са мјешовитом нормом на ограниченој области у $\mathbb{R}^n$ са глатком границом.
3. Дуал тежинског простора функција са мјешовитом нормом на ограниченој области у $\mathbb{R}^n$ са глатком границом се може описати под одређеним условима на параметре простора.
4. Добијени резултати имају примјену на карактеризацију симбола Теплицовог оператора који води до ограниченог (компактног) Теплицовог оператора.

Помоћне хипотезе:

1. Норма на простору хармонијских функција има еквивалентну репрезентацију преко декомпозиције домена. Ова репрезентација је од помоћи за карактеризацију Карлесонових мјера на овим просторима, те за доказивање ограничености Бергманове пројекције.
2. Тежинска Бергманова пројекција је ограничен оператор на тежинском Лебеговом простору функција са тежином која је различита од тежине саме пројекције, под одређеним условима на параметре.

Просторе хармонијских функција (тежински) са мјешовитом нормом на горњем

полупростору су проучавали Арсеновић и Shamoyan у [13] те је доказана Карлесонова теорема утапања.
Liu, Shi и Ren су у [91] истраживали ограниченост Бергманове пројекције на хармонијским просторима са мјешовитом нормом на лопти те су ријешили и проблем дуалности. Простори хармонијских функција (безтежински) са мјешовитом нормом на ограниченим глатким доменима у $\mathbb{R}^n$ у контексту Карлесонових мјера, Бергманових пројекција су истражени у [65]. Уопштење ових простора, простори са тежином степеног типа су дефинисани у [123] и Карлесонова мјера за исте је описана одговарајућим утапањем простора функција и то у случају када су параметри p и q већи од 1. Вриједи напоменути да Карлесонова мјера за исте просторе на лопти претходно није описана; карактеризација из [123] обухвата и овај специјални случај домена. Ограниченост Бергманових пројекција на просторима $L^{p,q}_\alpha(\Omega)$ за одређене вриједности параметара простора и проблем одређивања дуала простора хармонијских функција са мјешовитом нормом ($B^{p,q}_\alpha(\Omega)$) су разматрани у [16]. У [124] је доказано да су Бергманове пројекције на тежинским просторима са мјешовитом нормом $\tilde{L}^{p,q}_\alpha(\Omega)$, на глатким ограниченим областима у $\mathbb{R}^n$ ограничене за одређени распон параметара ових простора и претпостављајући одређене услове на тежине. Ови резултати допуњавају резултате добијене у [16]. Треба истаћи да су простори функција са мјешовитом нормом у већој мјери истражени у аналитичком случају, нпр у [6, 18, 52, 56, 70], стога је интересантно истражити хармонијски случај и то на општијим доменима.

Допринос тезе се огледа у рјешавању централних проблема у теорији простора функција, специјално у просторима хармонијских функција са мјешовитом нормом на ограниченим областима са глатком границом.

Literatura

[1] M. Abate, Carleson measures and Toeplitz operators, chapter in Metrical and Dynamical Aspects in Complex Analysis, Lecture Notes in Mathematics 2195, Springer (2017), 141–157.
[2] M. Abate, S. Mongodi, J. Raissy, Toeplitz operators and skew Carleson measures for weighted Bergman spaces on strongly pseudoconvex domains, Journal of Operator Theory 84 (2020), 339-364.
[3] M. Abate, J. Raissy, Skew Carleson measures in strongly pseudoconvex domains, Complex Anal. Oper. Theory 13(2) (2019), 405–429. DOI 10.1007/s11785-018-0823-4.
[4] M. Abate, J. Raissy, A. Saracco, Toeplitz operators and Carleson measures in strongly pseudoconvex domains, Journal of Functional Analysis 263(11) (2012), 3449–3491.
[5] M. Abate, A. Saracco, Carleson measures and uniformly discrete sequences in strongly pseudoconvex domains, J. Lond. Math. Soc. 2 (83) (2011), no. 3, 587–605. DOI 10.1112/jlms/jdq092.
[6] P. Ahern, M. Jevtić, Duality and multipliers for mixed norm spaces, Michigan Math. J. 30 (1983), 53–64. DOI: 10.1307/mmj/1029002787
[7] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. Sawyer, Carleson measures and interpolating sequences for Besov spaces on complex balls, Memoirs Amer. Math. Soc. 859, (2006).
[8] E. Amar, A subordination principle. Applications. North-West. Eur. J. Math. 1 (2015), 23–45.
[9] I. Arevalo, Weighted composition operators on spaces and classes of analytic functions, Universidad Auton´oma de Madrid, Departamento de Matem´aticas, Tesis doctoral, 2017.
[10] H. Arroussi, J. Pau, Reproducing kernel estimates, bounded projections and duality on large weighted Bergman spaces, J. Geom. Anal. 25 (2014), 1–29.

[11] M. Arsenović, M. Dostanić, D. Jocić, Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, 1999.
[12] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On boundedness of the multifunctional Bergman type operators in tube domains over symmetric cones, Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute 158(2012), 83–97.
[13] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces, Kragujevac Journal of Mathematics 37(1) (2013), 45–64.
[14] M. Arsenović, R. F. Shamoyan, On some new theorems on multipliers in harmonic function spaces in higher dimension II, Bull. Korean Math. Soc. 50 (2013), 1451–1469. https://doi.org/10.48550/arXiv.1107.2460
[15] M. Arsenović, T. Jovanović, Embedding of harmonic mixed norm spaces on smoothly bounded domains in $\mathbb{R}^n$. Open Mathematics 17 (2019), 1260–1268, DOI 10.1515/math-2019-0108
[16] M. Arsenović, I. Savković, Bergman projections on weighted mixed norm spaces and duality, Annals of Functional Analysis 13 (4) (2022). https://doi.org/10.1007/s43034-022-00217-1
[17] K. L. Avetisyan, Estimates for harmonic reproducing kernel and Bergman type operators on mixed norm and Besov spaces in the real ball, Anals of functional analysis 14 (40) (2023) DOI: 10.1007/s43034-023-00262-4
[18] K. L. Avetisyan, A. I. Petrosyan, Normal weighted Bergman type operators on mixed norm spaces over the ball in $\mathbb{C}^n$, J. Korean Math. Soc. 55 (2) (2018), 313–326. https://doi.org/10.4134/JKMS.j170195
[19] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic function theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2001.
[20] A. Benedek, R. Panzone, The spaces Lp with mixed norm, Duke Math. J. 28 (1961), 301–324.
[21] S. Bergman, The Kernel Function and Conformal Mapping, Amer. Math. Soc., Providence 1950.
[22] O. Blasco, Multipliers on spaces of analytic functions, Canad. J. Math. 47 (1995), 44–64.
[23] M. Bourass, I. Marrhich, Littlewood-Paley estimates with applications to Toeplitz and integration operators on weighted Bergman spaces, Banach Journal of Mathematical Analysis 17 10 (2023).
[24] A. Brown, P.R. Halmos, Algebraic properties of Toeplitz operators, J. Reine Angew. Math 213 (1964), 89–102.
[25] M. Calzi, M. M. Peloso, Carleson and reverse Carleson measures on homogeneous Siegel domains, Complex Anal. Oper. Theory 16 (4) (2022). https://doi.org/10.1007/s11785-021-01177-5
[26] M. Calzi, M. M. Peloso, Boundedness of Bergman projectors on homogeneous Siegel domains, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2 (2022). https://doi.org/10.1007/s12215-022-00798-9
[27] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math. 80,1958, 921–930.
[28] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem, Ann. of Math. 76, 1962, 547–559.
[29] R. Chartrand, Toeplitz operators on Dirichle-type spaces, Journal of Operator Theory 48 (1) (2002), 3-13 .
[30] B. R. Choe, Y. J. Lee, K. Na, Toeplitz operators on harmonic Bergman space. Nagoya Mathematical Journal 174 (2004), 165–186. Zbl 1067.47039, DOI https://doi.org/10.1017/S0027763000008837.
[31] B. R. Choe, H. Koo, and H. Yi, Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman

spaces, Potential Analysis, 17 (2002), 307–33.
[32] J.A. Cima and P.R. Mercer, Composition operators between Bergman spaces on convex domains in Cn, J. Operator Theory 33 (1995), 363–369.
[33] J. Cima, W. Wogen, A Carleson measure theorem for the Bergman space of the ball, J. Operator Theory 7, (1982), 157–165.
[34] J. M. Cohen, F. Colonna, D. Singman, Carleson and Vanishing Carleson Measures on Radial Trees, Mediterr. J. Math. 10 (2013), 1235–1258. https://doi.org/10.1007/s00009-012-0232-2
[35] O. Constantin, Carleson embeddings and some classes of operators on weighted Bergman spaces, J. Math. Anal. Appl. 365 (2010), 668–682.
[36] Ž. Čučković, T. Le, Toeplitz operators on Bergman spaces of polyanalytic functions Bulletin of London Mathematical Society 44 (5) (2012), 961-973.
[37] D. Debertol, Besov spaces and the boundedness of weighted Bergman projections over symmetric tube domains, Publ. math. 49(2005), 21–72.
[38] Y. Deng, L. Huang, T. Zhao, D. Zheng, Bergman projection and Bergman spaces, Journal of Operator Theory 46 (1) (2001), 3–24.
[39] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, Topics in the theory of Apα spaces, Teubner-Texte zur Mathematik, vol. 105, Leipzig 1988.
[40] O. F. Dogan, Positive Toeplitz operators from a harmonic Bergman-Besov space into another, Banach Journal of Mathematical Analysis 16 70 (2022).
[41] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, Academic Press New York and London, 1972.
[42] P. L. Duren, Extension of a theorem of Carleson, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), 143–146.
[43] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic press, New York and London 1970.
[44] P. Duren, A. Schuster, Bergman spaces, Mathematical Surveys and Monographs 100, American Mathematical Society, 2004.
[45] P.L. Duren, R. Weir, The pseudohyperbolic metric and Bergman spaces in the ball, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 63–76.
[46] M. Engliš, Boundary singularity of Poisson and harmonic Bergman kernels. Journal of Mathematical Analysis and Applications 429 (2015), 233-272.
[47] C. Fefferman, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, Invent. Math.26 (1974), 1–65.
[48] C. Fefferman, E. M. Stein, H^p Spaces of Several Variables, Acta Math. 129 (1972), 137–193.
[49] T.M. Flett, The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities, J. Math. Anal. Appl. 38, (1972), 746–765.
[50] T.M. Flett, Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk, J. Math. Anal. Appl. 39 (1972), 125–158.
[51] F. Forelli, W. Rudin, Projection on spaces of holomorphic functions in balls, Indian Univ. Math. J. 24 (1974), 593–602.
[52] S. Gadbois, Mixed-norm generalization of Bergman spaces and duality, Proceedings of the American mathematical society, 104(4), 1988.
[53] J. Gonessa, Sharp Norm Estimates for Weighted Bergman Projections in the Mixed Norm Spaces, J. Contemp. Mathemat. Anal. 53 (2018), 321–330. https://doi.org/10.3103/S1068362318060031
[54] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Third Edition, Springer, 2014.
[55] S. Grudsky, A. Karapetyants, N. Vasilevski, Toeplitz operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$ with radial symbols, Journal of Operator Theory 49 (2) (2003), 325-346.
[56] D. Gu, Bergman projections and duality in weighted mixed-norm spaces of analytic

functions, Michigan mathematical journal, 39(1), 1992.
[57] D. Girela, J.A. Pelaez, F. Perez-Gonzalez, J. Rattya, Carleson Measures for the Bloch Space, Integr. equ. oper. theory 61 (2008), 511–547. https://doi.org/10.1007/s00020-008-1602-9
[58] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Some properties of fractional integrals II, Math. Z. 34 (1932), 403-439.
[59] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions, Quart. J. Math. 12 (1941), 221–256.
[60] W.W. Hastings, A Carleson measure theorem for Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 237–241.
[61] E. Hewitt, K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Second edition, Springer- Verlag, 1994.
[62] L. Hormander, Lp estimates for (pluri-)subharmonic functions, Math. Scand. 20, 65-78, (1967). DOI: https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10821
[63] B. Hu, S. Li, Y. Shi, B. D. Wick, Sparse domination of weighted composition operators on weighted Bergman spaces, Journal of Functional Analysis 280(6) (2021). https://doi.org/10.1016/j.jfa.2020.108897
[64] Z. Hu, Estimate for the integral mean of harmonic function on bounded domain in R^n. Science in China, Series A 38(1) (1995), 36–46.
[65] Z. Hu, X. Lv, Carleson type measures for harmonic mixed norm spaces with application to Toeplitz operators, Chinese Annals of Mathematics, Series B 34B(4) (2013), 623–638.
[66] Z. Hu, X. Lv, Toeplitz Operators on Fock Spaces Fp(φ) Integr. Equ. Oper. Theory 80 (2014), 33–59. https://doi.org/10.1007/s00020-014-2168-3
[67] Z. Hu, X. Lv, K. Zhu, Carleson measures and balayage for Bergman spaces of strongly pseudoconvex domains, Mathematische Nachrichten 289 (10)(2016), 1237–1254. https://doi.org/10.1002/mana.201500021
[68] L. Huang, D. Yang, On function spaces with mixed norms— A survey, Journal of mathematical study (2019), 1-75.
[69] J. Isralowitz, K. Zhu, Toeplitz Operators on the Fock Space., Integr. Equ. Oper. Theory 66 (2010), 593–611. https://doi.org/10.1007/s00020-010-1768-9
[70] M. Jevtić, Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions, Complex Variables 8, 1987, 293-301.
[71] M. Jevtić, M. Pavlović, Harmonic Bergman functions on the unit ball in R^n, Acta Math. Hungar. 85, 1999, 81-96.
[72] M. Jevtić, D. Vukotić, M. Arsenović, Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-Type Spaces, RSME Springer Series 2, 2016.
[73] T. Jovanović, On Carleson-type embeddings for Bergman spaces of harmonic functions. Analysis Mathematica 44(4) (2017), 493–499.
[74] H. Kang, H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domains, Journal of Functional Analysis 185 (2001), 220–239.
[75] H. T. Kaptanoglu, Besov Spaces and Carleson Measures on the Ball, Comptes Rendus Mathematique 343 (2006)453–456. 10.1016/j.crma.2006.09.001.
[76] H. T. Kaptanoglu, Carleson Measures for Besov Spaces on the Ball with Applications, Journal of Functional Analysis 250(2007) 483–520. 10.1016/j.jfa.2006.12.016.
[77] A. Karapetyants, S. Samko, Mixed norm spaces of analytic functions as spaces of generalized fractional derivatives of functions in Hardy type spaces, Fractional Calculus and Applied Analysis 20 (2017), 1106–1130. https://doi.org/10.1515/fca-2017-0059
[78] A. Karapetyants, S. Samko, Mixed norm Bergman–Morrey-type spaces on the unit disc, Math Notes 100 (2016), 38–48. https://doi.org/10.1134/S000143461607004X
[79] A. Karapetyants, I. Smirnova, Weighted holomorphic mixed norm spaces in the unit disc defined in terms of Fourier coefficients, Complex Variables and Elliptic Equations 67:7 (2022),

1543-1553. DOI:10.1080/17476933.2021.1885384
[80] H. Koo, K. Nam, H. Yi, Weighted harmonic Bergman kernel on half-spaces, J. Math. Soc. Japan 58(2) (2006)
[81] H. Keshavarzi, Characterization of forward, vanishing and reverse Bergman Carleson measures using sparse domination. arXiv:2110.08926v1 (2021).
[82] P. Koosis, Introduction to H^p spaces, second edition, Cambridge University Press, 1999. DOI https://doi.org/10.1017/CBO9780511470950.
[83] S. G. Krantz, Function theory of several complex variables, second edition, AMS Chelsea publishing, Providence, Rhode Island, 2001.
[84] S. G. Krantz, H. R. Parks, The geometry of domains in space, Birkhauser Advanced Texts Basler Lehrbucher, Birkhauser Boston, Inc., Boston, Mass., 1999.
[85] R. Kress, Linear Integral Equations, third edition, Applied Mathematical Sciences (82), Springer, 2014.
[86] P. Lefevre, L. Rodrıguez-Piazza, Absolutely summing Carleson embeddings on Hardy spaces, Advances in Mathematics 340 (2018), 528–587. https://doi.org/10.1016/j.aim.2018.10.012
[87] Yu-Xia Liang, Ren-Yu Chen, Weighted Composition Operator from Mixed Norm Space to Bloch-Type Space on the Unit Ball, Abstract and Applied Analysis (2014), Article ID 107560, 10 pages, 2014. https://doi.org/10.1155/2014/107560
[88] S. Li, A class of integral operators on mixed norm spaces in the unit ball., Czech Math J 57 (3) (2007), 1013–1023. https://doi.org/10.1007/s10587-007-0091-3
[89] E. H. Lieb, M. Loss, Analysis, second edition, Graduate Studies in Mathematics (14), American Mathematical Society, 2001.
[90] H. Liu, H. Yang and Q. Yang, Carleson Measures and Trace Theorem for β- harmonic Functions Taiwanese Journal of Mathematics 22 (5) (2018), 1107–1138. DOI: 10.11650/tjm/171201
[91] C. Liu, J. Shi, G. Ren, Duality for harmonic mixed-norm spaces in the unit ball of R^n, Ann. Sci. Math. Quebec 25 (2), (2001), 179–197.
[92] D. H. Luecking, Inequalities on Bergman Spaces, Illinois J. Math. 25 (1981), 1–11.
[93] D. H. Luecking, Equivalent Norms on L^p Spaces of Harmonic Functions, Mh. Math. 96 (1983), 133–141.
[94] D. H. Luecking, Closed Ranged Restriction Operators on Weighted Bergman Spaces, Pac. J. Math. 110 (1984), 145– 160.
[95] D. H. Luecking, Forward and Reverse Carleson Inequalities for Functions in Bergman Spaces and their Derivatives, Am. J. Math. 107 (1985), 85–111.
[96] D. H. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 73(2) (1987), 345–368.
[97] D. Luecking, A technique for characterizing Carleson measures on Bergman spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983) (4), 656–660, DOI 10.2307/2043353.
[98] D. H. Luecking, Sampling measures for Bergman spaces on the unit disc, Matematische Annalen 316 (2000), 659–679. https://doi.org/10.1007/s002080050348
[99] B. Maccluer, R. Zhao, Vanishing logarithmic Carleson measures, Illinois Journal of Mathematics 46 (2) (2002), 507–518.
[100] M. Mateljević, M. Pavlović, Duality and multipliers in Lipschitz spaces, Proceedings of the International Conference of Complex Analysis, Varna (1983), 153–160.
[101] M. Mateljević, M. Pavlović, L^p -behaviour of the integral means of analytic functions, Studia Math. 77 (1984), 219–237.
[102] M. Mateljević, M. Pavlović, Multipliers of H^p and BMOA, Pacific J. Math. 146 (1990), 71–89.
[103] M. Mateljević, M. Pavlović, An extension of the Forelli-Rudin projection theorem,

Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 36 (1993), 375-389.
[104] J. Miao, Reproducing kernels for harmonic Bergman spaces of the unit ball, Monatsh. Math. 125 (1998), 25–35.
[105] M. Mitkovski, D. Su´arez, B. D. Wick, The Essential Norm of Operators on Apα(Bn), Integral Equations Operator Theory 75 (2)(2013), 197-233.
[106] K. Nam, I. Park, Volume integral means of harmonic functions on smooth boundary domains. Bull. Korean Math. Soc. 51(4) (2014), 1195–1204., DOI http://dx.doi.org/10.4134/BKMS.2014.51.4.1195
[107] C. Nana, Lp,q-Boundedness of Bergman Projections in Homogeneous Siegel Domains of Type II, Journal of Fourier Analysis and Applications 19 (5)(2013), 997–1019. DOI:10.1007/s00041-013-9280-7
[108] R. Nevanlinna, Uber beschrtankte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen, Annales Academie Scientiarum Fennicae, vol. 13 (1919), No. 1.
[109] V. L. Oleinik, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions. Journal of Soviet Mathematics, 9 (1978), 228–243.
[110] V.L. Oleinik and B.S. Pavlov, Embedding theorems for weighted classes of harmonic and analytic functions, J. Soviet Math. 2 (1974), 135–142.
[111] V. L. Oleinik, G. S. Perelman, Carleson's imbedding theorem for a weighted Bergman space, Math. Notes Acad. Sci. USSR 47 (1990), 577–581. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01170888
[112] I. Park, Bounded projections, duality and representations on large mixed norm spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications 423 (2) (2015), 1113-1128. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.10.042.
[113] J. Pau, R. Zhao, Carleson measures and Toeplitz operators for weighted Bergman spaces on the unit ball, Michigan Math. J. 64(4) (2015), 759–796. DOI: 10.1307/mmj/1447878031
[114] J. Pau, R. Zhao, Carleson Measures, Riemann–Stieltjes and Multiplication Operators on a General Family of Function Spaces, Integr. Equ. Oper. Theory 78 (2014), 483–514. https://doi.org/10.1007/s00020-014-2124-2
[115] M. Pavlović, Mixed norm spaces of analytic and harmonic functions, I, Publications de l'institutmathematique 40(54) (1986), 117–141.
[116] V. Peller, Hankel Operators and Their Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York (2003).
[117] S. Power, Hormanders Carleson theorem for the ball, Glasg. Math. J. 26, 13-17, (1985). DOI: https://doi.org/10.1017/S0017089500005711
[118] S. C. Power, Vanishing Carleson Measures, Bulletin of the London Mathematical Society 12 (3) (1980), 207–210. https://doi.org/10.1112/blms/12.3.207.
[119] W. Ramey, H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. 348(1996), 633-660.
[120] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics I: Functional analysis, Revised and enlarged edition, Academic Press Inc. 1980.
[121] G. Ren, J. Shi, Bergman type operators on mixed norm spaces with applications, Chin. Ann. Math. Ser B 18(3) (1997), 265–276.
[122] W. Rudin, Real and complex analysis, third edition, McGraw-hill international editions, Mathematics series, 1987.
[123] I. Savković, Carleson measures for weighted harmonic mixed norm spaces on bounded domains in R^n, Czechoslovak Mathematical Journal 72 (2022), 1205–1216. https://doi.org/10.21136/CMJ.2022.0018-22
[124] I. Savković, Boundedness of Bergman projections acting on weighted mixed norm spaces, Turkish Journal of Mathematics (2023) 47(2) (2023), 687 – 693. DOI: 10.55730/1300-0098.3387
[125] A. P. Schuster, D. Varolin, Toeplitz operators and Carleson measures on generalized

Bergmann-Fock Spaces, Integral Equations and Operator Theory 72(3) (2012), 363–392.
[126] Romi F. Shamoyan, M. Arsenovi´c, On Multipliers of Holomorphic Fp,qα Type Spaces on the Unit Polydisc, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 5 (4) (2012), 471–479.
[127] J. Shapiro, Thesis, University of Michigan, 1969.
[128] A. Sharma, A. K. Sharma, M. Mursaleen, Vanishing Carleson measures and power compact weighted composition operators, Methods of Functional Analysis and Topology 28 (3) (2022), 259–273.
[129] A. L. Shields, D. L. Williams, Bonded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 287–302.
[130] K. Sierra, Classical operators on weighted Bergman and mixed norm spaces, academic dissertation, University of Eastern Finland, Department of Physics and Mathematics, Joensuu 2018.
[131] D. Stegenga, Multipliers of the Dirichlet space, Illinois J. Math. 24 (1) (1980) 113–139. DOI: 10.1215/ijm/1256047800
[132] E. M. Stein, On the theory of harmonic functions of several variables I. The theory of H^p spaces. Acta Math. 103 (1960), 25-62.
[133] E. M. Stein, Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables, Princeton Univ. Press, Princeton 1972.
[134] S. Stević, On Harmonic Function Spaces II, Journal of Computational Analysis and Applications 10(1) (2008), 205–228.
[135] K. Stroethoff, Compact Toeplitz operators on Bergman spaces, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 124 (1) (1998), 151 - 160. DOI:https://doi.org/10.1017/S0305004197002375
[136] K. Stroethoff, Harmonic Bergman Spaces, Holomorphic Spaces MSRI Publications 33 (1998), 51–63.
[137] D. Suarez, A generalization of Toeplitz operators on the Bergman space, Journal of Operator Theory 73 (2) (2015), 315–332. http://www.jstor.org/stable/24718127
[138] M. H. Taibleson, On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space II, Translation invariant operators, duality and interpolation, J. Math Mech. 14 (1965), 821–839.
[139] E. Tchoundja, Carleson measures for Hardy Sobolev spaces and Generalized Bergman spaces, Thesis for the degree of licentiate of philosophy, Department of Mathematical Sciences, Goteborg University, 2007.
[140] W. Thomson, P. G. Teit, Treatise on Natural Philosophy, Cambridge University Press, 1879.
[141] C. Tong, J. Li, Carleson measures on the weighted Bergman spaces with Bekolle weights. Chinese Annals of Mathematics, Series B, 42(4) (2021), 583–600.
[142] M. Wang, L. Zhou, Carleson Measures and Toeplitz Type Operators on Hardy Type Tent Spaces, Complex Anal. Oper. Theory 15 (70) (2021). https://doi.org/10.1007/s11785-021-01113-7
[143] V.P. Zaharjuta, V.I. Judovic, The general form of linear functional in H′p , [Russian], Uspekhi Mat. Nauk 19 (1964), 139–142.
[144] X. Zhang, J. Xiao, Z. Hu, The multipliers between the mixed norm spaces in C^n, Journal of Mathematical Analysis and Applications 311 (2005), 664-674. 10.1016/j.jmaa.2005.03.010.
[145] Y. Zhang, Toeplitz Operator and Carleson Measure on Weighted Bloch Spaces, Journal of Function Spaces (2019), Article ID 4358959, 5 pages.
[146] Y. Zhang, X. Wang, Z. Hu, Toeplitz operators on Bergman spaces with exponential weights, Complex Variables and Elliptic Equations (2022), DOI:10.1080/17476933.2022.2034150
[147] R. Zhao, K. Zhu, Theory of Bergman spaces in the unit ball of C^n, Societe Mathematique

de France, 2008.
[148] K. Zhu, Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains, J. Operator Theory 20 (1988), 329–357.
[149] K. Zhu, Spaces of holomorphic functions in the unit ball, Springer Science+ Business Media, Inc., 2005.
[150] K. Zhu, Operator theory in Function Spaces, American Mathematical Society, Second Edition, 2007.
[151] K. Zhu, A Sharp norm estimate of the Bergman projection on Lp spaces, Contemporary Math. 404 (2006), 199–205.

5. МАТЕРИЈАЛ И МЕТОДОЛОГИЈА РАДА

Метод истраживања је дедуктиван и теоријски, заснива се на ригорозним доказима који се ослањају на раније добијене резултате. Методи су интердисциплинарни унутар математике, укључују геометријске конструкције, методе и резултате функционалне анализе, специфична својства хармонијских функција и резултате хармонијске анализе.
Будући да је фокус истраживања простор хармонијских функција са мјешовитом нормом, у истраживању се користе до сада развијене методе хармонијске анализе. Користи се техника декомпозиције домена на љуске које се сужавају како се приближавају граници. Споменута техника је слична добро познатој техници Витнијеве декомпозиције отвореног скупа у $\mathbb{R}^n$.
За доказивање једног смјера теореме о утапању, користе се тест функције. Ова техника је уобичајена код доказивања једног смјера теореме утапања и за друге просторе функција.
Истраживање се бави и Бергмановим пројекцијама које представљају интегралне операторе на просторима функција, стога се користе методе интегралних оператора. Битан алат при доказивању ограничености Бергманове пројекције је Шуров тест који се уобичајено користи у оквиру теорије оператора. За добијање резултата дуалности, користе се класичне методе теорије дуалности Банахових простора и простора низова.
Примјењене методе истраживања су адекватне, односно кандидат је показао да адекватно користи поменути теоријски апарат за рјешавање посматраних проблема.
Није било измјена у односу на првобитни план истраживања дат приликом пријаве теме за израду докторске дисертације. Обим истраживања је довољан за доношење поузданих закључака о главном објекту истраживања- простору хармонијских функција са мјешовитом нормом.

6. РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНИ ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА

Оригинални и најзначајнији резултати овог истраживања огледају се у:
-карактеризацији Карлесонових мјера за просторе $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$
-карактеризацији ишчезавајућих мјера Карлесона за исте просторе
-доказу ограничености тежинске Бергманове пројекције која дјелује на простор $L_\alpha^{p,q}(\Omega)$ $(\tilde{L}_\alpha^{p,q}(\Omega))$, при чему га пројектује на простор $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$
-опису дуала простора $B_\alpha^{p,q}(\Omega)$
-примјени резултата на карактеризацију симбола Теплицовог оператора који води до ограниченог (компактног) Теплицовог оператора (између осталог у терминима Березинове

трансформације).
Допринос аутора дисертације је формулисање и доказивање базичних теорема из теорије простора аналитичких и хармонијских функција у случају хармонијских простора функција са мјешовитом нормом: ограниченост пројекције, дуалност, мјере Карлесона као и примјена на Теплицове операторе.
Резултати добијени у оквиру истраживања дају (прилично) потпуну информацију о просторима са мјешовитом нормом са степеном тежином и уопштавају низ ранијих резултата добијених за нетежинске просторе и просторе на геометријски једноставним доменима. Резултати су јасно приказани, правилно, логично и јасно тумачени, упоређујући их са резултатима других аутора у уводној глави, у којој су наведени и представљени познати резултати уско повезани са проблематиком дисертације.
У закључку дисертације су на систематски, концизан и језгровит начин изложени остварени резултати те су формулисани и нови отворени проблеми, правци даљег истраживања.

7. ЗАКЉУЧАК И ПРИЈЕДЛОГ

На основу свега што је наведено у Извјештају, Комисија закључује да је докторска дисертација Иване Савковић под насловом „**Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност**" израђена у складу са образложењем које је кандидат навео у пријави теме.

Докторска дисертација је урађена према правилима и принципима научно-истраживачког рада и резултат је оригиналног научног рада кандидата.

Допринос аутора дисертације је формулисање и доказивање базичних теорема из теорије простора функција у случају хармонијских простора функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, ограниченост Бергманове пројекције, дуалност, као и примјена на Теплицове операторе.

Будући да је кандидат показао темељно познавање предмета истраживања, те у потпуности одговорио на проблематику која се разматра у дисертацији, Комисија предлаже Научно-наставном вијећу Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци и Сенату Универзитета у Бањој Луци, да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри јавна одбрана дисертације.

Бања Лука, 07.02.2024.

Миодраг Матељевић

Академик проф. др Миодраг Матељевић, редовни професор

Предсједник комисије

Зоран Митровић

Академик проф. др Зоран Митровић, редовни професор

Члан

В. Јовановић

Проф. др Владимир Јовановић, ванредни професор

Члан

Проф. др Биљана Војводић, ванредни професор

Члан

ИЗДВОЈЕНО МИШЉЕЊЕ: Члан комисије који не жели да потпише извјештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије дужан је да у извјештај унесе образложење, односно разлоге због којих не жели да потпише извјештај.

Прилог 3.

Изјава 1

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем
да је докторска дисертација

Наслов рада Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност

Наслов рада на енглеском језику Harmonic mixed norm spaces: Carleson measures, Bergman projections and duality.

- ☒ резултат сопственог истраживачког рада,
- ☒ да докторска дисертација, у цјелини или у дијеловима, није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- ☒ да су резултати коректно наведени и
- ☒ да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанта

У Бањој Луци, дана 08.03.2024. године

Ивана Савковић

Изјава 2

Изјава којом се овлашћује Универзитет у Бањој Луци да докторску дисертацију учини јавно доступном

Овлашћујем Универзитет у Бањој Луци да моју докторску дисертацију под насловом Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност

која је моје ауторско дјело, учини јавно доступном.

Докторску дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио/ла.

- ○ Ауторство
- ○ Ауторство – некомерцијално
- ◉ Ауторство – некомерцијално – без прераде
- ○ Ауторство – некомерцијално – дијелити под истим условима
- ○ Ауторство – без прераде
- ○ Ауторство – дијелити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанта

У Бањој Луци, дана 08.03.2024. године

Ивана Савковић

ТИПОВИ ЛИЦЕНЦИ КРЕАТИВНЕ ЗАЈЕДНИЦЕ

Ауторство (CC BY)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

Ауторство - некомерцијално (CC BY-NC)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дјела.

Ауторство - некомерцијално - без прерада (CC BY-NC-ND)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, без промјена, преобликовања или употребе дјела у свом дијелу, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дјела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дјела.

Ауторство - некомерцијално - дијелити под истим условима (CC BY-NC-SA)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дијела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дјела и прерада

Ауторство - без прерада (CC BY-ND)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, без промјена, преобликовања или употребе дјела у свом дјелу, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дјела.

Ауторство - дијелити под истим условима (CC BY-SA)

Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дјела, и прераде, ако се наведе име аутора, на начин одређен од аутора или даваоца лиценце, и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дјела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.

Напомена: Овај текст није саставни дио изјаве аутора.

Више информација на линку: *http://creativecommons.org.rs/*

Изјава 3

Изјава о идентичности штампане и електронске верзије докторске дисертације

Име и презиме аутора Ивана Савковић

Наслов рада Простори хармонијских функција са мјешовитом нормом: мјере Карлесона, Бергманове пројекције и дуалност

Ментор проф. др Милош Арсеновић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације идентична електронској верзији коју сам предао/ла за дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци.

У Бањој Луци, дана 08.03.2024. године

Потпис докторанта

Ивана Савковић