УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ

Јелена Гајић

ПРОСТОРИ ПЛУРИХАРМОНИЈСКИХ, $\mathcal{M}$-ХАРМОНИЈСКИХ И ПОЈЕДИНАЧНО (α,β)-ХАРМОНИЈСКИХ ФУНКЦИЈА У ПОЛИДИСКУ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Бања Лука, 2024.

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ
ФАКУЛТЕТ

Јелена Гајић

ПРОСТОРИ ПЛУРИХАРМОНИЈСКИХ, $\mathcal{M}$-ХАРМОНИЈСКИХ И ПОЈЕДИНАЧНО (α, β)-ХАРМОНИЈСКИХ ФУНКЦИЈА У ПОЛИДИСКУ

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Бања Лука, 2024.

UNIVERSITY OF BANJA LUKA
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

Jelena Gajić

THE SPACES OF PLURIHARMONIC, $\mathcal{M}$-HARMONIC AND SEPARATELY (α, β)-HARMONIC FUNCTIONS IN THE POLYDISC

DOCTORAL DISSERTATION

Banja Luka, 2024.

Ментор: др Милош Арсеновић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

Наслов докторске дисертације: Простори плурихармонијских, $\mathcal{M}$-хармонијских и појединачно (α, β)-хармонијских функција у полидиску

Резиме: У овој дисертацији разматрају се процјене растојања, обичног и инваријантног градијента плурихармонијских функција дефинисаних на отвореном јединичном полидиску и на отвореној јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$. Даље, изучавано је која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. Осим тога уведене су класе функција на полидиску и развијена је H^p теорија тих класа.

Први резултати су уопштења Шварцове леме и неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у $\mathbb{C}^n$ као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$. Такође, дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и $\mathcal{M}$-инваријантног реалног градијента за такве функције. Користећи те резултате за плурихармонијске функције, доказан је Харнаков тип резултата. Све процјене, које су добијене, су најбоље процјене и не могу се побољшати.

Слиједећи резултати везани су за изучавања веза између класа хармонијских и $\mathcal{M}$-хармонијских функција на отвореном јединичном полидиску. Доказано је да функција, дефинисана на $\mathbb{D}^n$, која је истовремено хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска не мора бити плурихармонијска. Осим тога дата су два описа простора функција које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске. Такође је изучавана и мултипликативна структура таквих простора у случају $\mathbb{D}^n$.

Осим тога уводимо појединачно (α, β)-хармонијске функције које задовољавају систем елиптичких парцијалних диференцијалних једначина. Такође, дат је развој у ред таквих функција и рјешен је Дирихлеов проблем за непрекидну функцију дефинисану на истакнутој граници $\mathbb{T}^n$. Развијена је H^p теорија за појединачно (α, β)-хармонијске функције: интегралне репрезентације мјерама и L^p функцијама на истакнутој граници $\mathbb{T}^n$, конвергенција у норми и слаба*

конвергенција на $\mathbb{T}^n$. Добијен је слаби (1, 1)-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију. Показано је да функције на $\mathbb{D}^k$, добијене фиксирањем $n-k$ промјенљивих припадају одговарајућем простору појединачно (α', β')-хармонијских функција од k промјенљивих. Доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α, β)-хармонијске функције у диску и за појединачно хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску.

Кључне ријечи: Шварцова лема, Шварц-Пикова лема, плурихармонијске функције, Кобајашијево растојање, Бергманово растојање, инваријантни лапласијан, појединачно (α, β)-хармонијске функције, Хардијеви простори, нетангенцијални лимес, полидиск

Научна област: Природне науке

Научно поље: Математика

Класификациона ознака за научну област према CERIF шифрарнику: P 001

Supervisior: dr Miloš ARSENOVIĆ, Full Professor
University of Belgrade, Faculty of Mathematics

Title of doctoral dissertation: The spaces of pluriharmonic, $\mathcal{M}$-harmonic and separately (α, β)-harmonic functions in the polydisc

Abstract: In this dissertation, estimates of the distance, ordinary and invariant gradient of pluriharmonic functions defined on an open unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ are considered. Furthermore, it was studied which properties have functions that simultaneously belong to two classes. In addition, new classes of functions on the polydisk were introduced and H^p theory for these classes was developed.

The first results are generalizations of Schwarz's lemma and Schwarz-Pick type inequalities for bounded or for positive pluriharmonic functions defined on the open unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ as well as for positive pluriharmonic functions defined on the open unit ball in $\mathbb{C}^n$. Also, distance estimates in terms of Kobayashi's and Bergman's metrics as well as estimates of gradients and $\mathcal{M}$-invariant real gradients for such functions are given. Using those results for pluriharmonic functions, Harnack's type results were proved. All estimates obtained are best estimates and cannot be improved.

The following results are related to the study of connections between harmonic and $\mathcal{M}$-harmonic classes on an open unit polydisc. The multiplicative structure of such spaces in the case of $\mathbb{D}^n$ was also studied.

In addition, we introduce separately (α, β)-harmonic functions that satisfy a system of elliptic partial differential equations. Also, we derive series expansion of such functions and we obtain existence and uniqueness result for the Dirichlet problem with continuous boundary data on $\mathbb{T}^n$. H^p theory is developed for separately (α, β)-harmonic functions: integral representations with measures and L^p functions on distinguished boundary $\mathbb{T}^n$, convergence in the norm and weak* convergence on $\mathbb{T}^n$. A weak (1, 1)-type estimate for the restricted non-tangential maximal function is obtained. It is shown that functions on $\mathbb{D}^k$, obtained by fixing $n-k$ variables belong to the corresponding space separately (α', β')-harmonic functions of k variables. Fatou type theorem is proved. The stated results are generalizations of earlier results for (α, β)- harmonic functions in a disk and for separately harmonic functions in the open unit polydisc.

Keywords: Schwarz lemma, Schwarz-Pick lemma, pluriharmonic functions, Kobayashi distance, Bergman distance, invariant Laplacian, separately (α, β)-harmonic functions, Hardy spaces, non-tangential limits, polydisc

Scientific area: Natural Sciences

Scientific field: Mathematics

Classification code of the scientific area by CERIF: P 001

Велику захвалност дугујем свом ментору Милошу Арсеновићу на његовој изузетној посвећености и свим корисним савјетима и сугестијама.

Захваљујем се пријатељима што су ме бодрили и били уз мене у лијепим и тешким тренуцима.

Највећу захвалност за безрезервну љубав током живота дугујем својим родитељима.

Садржај

Увод **1**

1 Основни појмови, тврђења и ознаке **4**

1.1 Мултииндекси и ознаке у $\mathbb{C}^n$ 4

1.2 Јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ и јединична лопта $\mathbb{B}^n$ у $\mathbb{C}^n$ 6

1.3 Холоморфне, хармонијске и плурихармонијске функције 6

1.4 Појединачно хармонијске функције 12

1.5 Аутоморфизми полидиска и лопте 14

1.6 Извод и $\mathcal{M}$-инваријантни реалан градијент 17

1.7 Хипергеометријске функције 18

1.8 Неки простори функција 19

1.9 Простор $h^p(\mathbb{D})$ 21

2 Шварц-Пикова лема за плурихармонијске функције **23**

2.1 Шварц-Пикова лема за холоморфне функције 23

2.2 Процјене растојања за плурихармонијске функције 32

2.3 Процјене градијента за плурихармонијске функције 39

3 Хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције **47**

3.1 $\mathcal{M}$-хармонијске функције 47

3.2 Хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције на $\mathbb{B}^n$ 52

3.3 Хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције на $\mathbb{D}^n$ 58

4 H^p простори појединачно (α, β)-хармонијских функција у јединичном полидиску **66**

4.1 Хардијеви простори појединачно хармонијских функција у $\mathbb{D}^n$. 66

4.2 (α, β)-хармонијске функције у $\mathbb{D}$ 72

4.3 Појединачно (α, β)-хармонијске функције у $\mathbb{D}^n$ 86

4.4 (α, β)-Пуасонова репрезентација функција из $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ 92

4.5 H^p теорија за $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ функције 95
4.6 Интегрална репрезентација функција из $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$, $1 \leq p \leq +\infty$. 106
4.7 Максимална функција и теореме Фатуовог типа 109

Закључак **123**

Литература **125**

Биографија аутора **131**

Увод

У овој дисертацији разматрају се процјене растојања, обичног и инваријантног градијента плурихармонијских функција дефинисаних на отвореном јединичном полидиску и на отвореној јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$. Даље, изучавано је која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. Осим тога уведене су класе функција на полидиску и развијена је H^p теорија из тих класа.

Шварцова лема за холоморфне функције дефинисане на јединичном диску $\mathbb{D}$ у комплексној равни $\mathbb{C}$ је један од најутицајнијих резултата у комплексној анализи и има велики утицај на развој неколико истраживачких области као нпр геометријска теорија функција, диференцијална геометрија и теорија квазиконформних пресликавања. Интерпретација Шварц-Пикове леме је да функције које припадају $H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ не повећавају растојање тачака у Пуанкареовој (хиперболичкој) метрици. Више од сто година Шварцова лема има уопштења у разним правцима и постоји обимна литература. Више информација може се наћи у [3, 13, 14, 16, 35, 36, 38, 43, 47, 57, 60, 69, 81] као и у литератури која је у тим референцама цитирана. Свака реално-вриједносна хармонијска функција на $\mathbb{D}$ јесте реални дио неке холоморфне функције и при томе модул градијента те хармонијске функције једнак је модулу извода одговарајуће холоморфне функције. Такође, ако вриједности хармонијске функције припадају $(-1, 1)$, односно интервалу $(0, \infty)$, онда вриједности одговарајуће холоморфне функције припадају вертикалном појасу $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, односно десној полуравни $\mathbb{K} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Метод појаса и полуравни развио је М. Матељевић [57] како би се добиле неједнакости Шварц-Пиковог типа за реално-вриједносне хармонијске функције и хармонијска квазирегуларна пресликавања из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{S}$ [57, 59]. Резултати Чена [13], Калаја и Вуоринена [36] и Мелентијевића [60] могу се добити методом појаса. Процјене извода и својствено томе процјене растојања за различите класе функција (првенствено холоморфних функција на области у $\mathbb{C}^n$) су теме од интереса у области геометријске теорије функција. Аутор рада [38] даје процјене растојања за плурихармонијске функције из произвољне комплексне многострукости у одговарајући интервал у $\mathbb{R}$, али без тачних константи. Чен и Расила [14] су дали Шварц-Пикове процјене парцијалних извода вишег реда ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску. Процјена обичног градијента ограничене плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ из $\mathbb{C}^n$ дата је у [81], а процјена $\mathcal{M}$-инваријантног реалног градијента такве функције дата је у [60]. Аутор дисертације у самосталном раду [21] даје директан доказ за процјене растојања за позитивне и за ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску у терминима Кобајашијеве метрике и у заједничком раду [4] са ментором М. Арсеновићем даје процјене растојања за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$ у терминима Бергманове метрике. Процјене обичног градијента и $\mathcal{M}$-инваријантног реалног градијента позитивне плурихармонијске функције на $\mathbb{B}^n$, односно позитивне и ограничене плурихармонијске функције на $\mathbb{D}^n$ добијене су у [4] и [21], респективно.

Једна од тема теорије функција је изучавање која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. Рудин [71] је доказао да је функција дефинисана на јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$ плурихармонијска ако и само ако је хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{B}^n$. С обзиром да јединична лопта и $\mathbb{B}^n$ и јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ нису бихоломорфно еквивалентни од интереса је изучавање која својства имају функције на $\mathbb{D}^n$ које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске на $\mathbb{D}^n$. Тај отворен проблем од 1977. године рјешили су ментор М. Арсеновић и аутор дисертације у заједничком раду [5].

Почетак теорије Хардијевих простора повезује се са радовима Хардија [27] и Риса [68] из 1915. и 1923. године, респективно. Теорија Хардијевих простора је веома важна грана савремене комплексне и хармонијске анализе. Комбинује технике из теорије холоморфних функција, функционалне анализе, теорије мјере и интеграције и има примјену у хармонијској анализи, Фуријеовој анализи, теорији парцијалних диференцијалних једначина и другим областима математике. H^p простори су најинтензивније проучавани у случају јединичног диска [17, 29, 45, 84]. Вишедимензиона уопштења у класичним доменима у $\mathbb{C}^n$ захтјевају технику другачију од технике развијене за диск у комплесној равни $\mathbb{C}$. H^p теорија за појединачно хармонијске фунције развијена је у [24], [69], [76] и [85], за $\mathcal{M}$-хармонијске развијена је у [20],[46],[77], [78], а за (α, β)-хармонијске функције развијена је у [1], [22]. Поставља се питање да ли се увођењем класе функција, које уопштавају (α, β)-хармонијске функције у $\mathbb{D}$ и појединачно хармонијске функције у $\mathbb{D}^n$, могу добити резултати за H^p теорију.

Садржај дисертације подељен је у четири поглавља.

У првом поглављу дефинисани су основни појмови и уведене одговарајуће ознаке. Ради потпуности дате су и дефиниције холоморфних, хармонијских, плурихармонијских и појединачно хармонијских функција и наведена су њихова основна својства и тврђења. При томе, наведена су само она тврђења која се непосредно користе у наставку дисертације. Такође је наведена литература у којој се може наћи више информација о појмовима уведеним у овом поглављу.

Друго поглавље посвећено је Шварцовој и Шварц-Пиковој леми. Уведени су Пуанкареова (хиперболичка) метрика, Пуанкареово (хиперболичко) растојање уз доказе одговарајућих тврђења. Одређено је Пуанкареово растојање тачака из диска, десне полуравни и вертикалног појаса. Дато је уопштење Шварц-Пикове леме са јединичног диска у комплексној равни на случај јединичног полидиска. Потом је уведено Кобајашијево растојање између тачака на $\mathbb{D}^n$ и Бергманово растојање између тачака на $\mathbb{B}^n$, као и контрактивна својства Кобајашијеве и Бергманове метрике на $\mathbb{D}^n$ и $\mathbb{B}^n$ респективно. У наставку су дата тврђења која су објављена у заједничком раду [4] аутора дисертације са ментором М. Арсеновићем и у самосталном раду [21] аутора дисертације.

У трећем поглављу дефинисане се $\mathcal{M}$-хармонијске функције на $\mathbb{D}^n$ и $\mathbb{B}^n$ уз доказе одговарајућих тврђења. Приказани су резултати Рудина [71], Ахерна и Рудина [2] и Кима [40] у случају $\mathbb{B}^n$, као и резултати из заједничког рада [5] аутора дисертације са ментором М. Арсеновићем у случају $\mathbb{D}^n$.

Четврто поглавље посвећено је H^p теорији. Приказана је H^p теорија за појединачно хармонијске функције на отвореном јединичном полидиску и дати су неки појмови и тврђења за вишеструке Фуријеове редове и диференцирање n-интеграла. Затим је приказан развој у ред (α, β)-хармонијских функција у $\mathbb{D}$. Након увођења класа функција на $\mathbb{D}^n$ развијена је H^p-теорија за случај појединачно (α, β)-хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$: интегрална репрезентација мјерама и L^p-функцијама на $\mathbb{T}^n$. Поред тога рјешен је Дирихлеов проблем и доказане су теореме Фатуовог типа.

1 Основни појмови, тврђења и ознаке

У овом уводном поглављу дат је кратак преглед неких основних појмова као и тврђења, која ће се користити у овој дисертацији. Наведени су углавном резултати из теорије мјере и интеграције, Хардијевих простора на јединичном диску у комплексној равни, али и неки основни елементи комплексне и функционалне анализе. Такође, фиксирана је и нотација која ће бити коришћена у наредним поглављима. У појединим потпоглављима дате су референце везане за појам на који се потпоглавље односи.

1.1 Мултииндекси и ознаке у $\mathbb{C}^n$

У векторском простору $\mathbb{C}^n$ над пољем $\mathbb{C}$ координатна репрезентација за z у стандардној бази простора $\mathbb{C}^n$ је $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Коњугован вектор вектора z је $\overline{z} = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$. Такође, уводимо ознаку $z = (z', z_n)$, гдје је $z = (z_1, \ldots, z_n)$ из $\mathbb{C}^n$ и $z' = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ из $\mathbb{C}^{n-1}$.

Скаларни производ је означен са $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и дефинишемо га са

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j},$$

при чему је $z = (z_1, \ldots, z_n)$ и $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

Осим тога, за $z, w \in \mathbb{C}^n$, користимо ознаку $\cdot$ за сљедећу операцију на $\mathbb{C}^n$:

$$z \cdot w = (z_1 w_1, \ldots, z_n w_n).$$

Стандардна Еуклидска норма вектора $z \in \mathbb{C}^n$ означена је са $|z| = (\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2)^{\frac{1}{2}}$. Такође, коришћена је и норма $|z|_\infty = \max_{1 \le k \le n} |z_k|$. Норма оператора је означена са $\| \cdot \|$. Користимо ознаку $x^+ = \max(x, 0)$ и $x^- = \max(-x, 0)$ за реалан број x.

Како радимо са функцијама од n промјенљивих потребна нам је мултииндексна нотација. За $m = (m_1, \ldots, m_n)$ из $\mathbb{Z}^n$ уводимо ознаке $m^+ = (m_1^+, \ldots, m_n^+) \in \mathbb{Z}_+^n$ и $m^- = (m_1^-, \ldots, m_n^-) \in \mathbb{Z}_+^n$.

Користићемо слиједећу нотацију:

- $|m| = |m_1| + \cdots + |m_n|$ је ред мултииндекса $m \in \mathbb{Z}^n$,
- $m! = m_1! \cdot \ldots \cdot m_n!$ за $m \in \mathbb{Z}_+^n$,
- за $p = (p_1, \ldots, p_n)$ из $\mathbb{Z}_+^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ је

$$z^p = z_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n} \quad \text{и} \quad \overline{z}^p = \overline{z}_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \overline{z}_n^{p_n},$$

- ако је $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ из $\mathbb{C}^n$ и $\zeta_j \neq 0$ за свако $1 \leq j \leq n$, онда је $\zeta^m = \zeta_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{m_n}$ дефинисано за свако $m \in \mathbb{Z}^n$,
- ред мултииндекса $(p, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ је $|(p, q)| = |p| + |q|$.

  За $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$ користићемо сљедећу ознаку за парцијалне изводе:

$$\partial^{(p,q)} = \frac{\partial^{p_1}}{\partial z_1^{p_1}} \cdots \frac{\partial^{p_n}}{\partial z_n^{p_n}} \frac{\partial^{q_1}}{\partial \overline{z}_1^{q_1}} \cdots \frac{\partial^{q_n}}{\partial \overline{z}_n^{q_n}}, \quad \partial^p = \partial^{(p,0)}, \quad \overline{\partial}^q = \partial^{(0,q)},$$

  при чему су

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \tag{1.1}$$

  стандардни линеарни диференцијални оператори првог реда.

Ако је $f \in C^1$ функција, онда је

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$$

или краће записано

$$d = \partial + \overline{\partial},$$

гдје је

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j \quad \text{и} \quad \overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} d\overline{z_j}$$

и $dz_j = dx_j + idy_j, d\overline{z_j} = dx_j - idy_j$ за свако $j, 1 \leq j \leq n$.

1.2 Јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ и јединична лопта $\mathbb{B}^n$ у $\mathbb{C}^n$

Домени простора функција које се проучавају у овој дисертацији су јединични полидиск, јединична лопта, јединични диск, десна полураван, вертикални појас, при чему је акценат на јединичном полидиску.

Граница отвореног јединичног диска $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ у комплексној равни је $\mathbb{T} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$. Десна полураван $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ у $\mathbb{C}$ је означена са $\mathbb{K}$ а вертикални појас $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ у $\mathbb{C}$ означен је са $\mathbb{S}$.

Еуклидске лопте из $\mathbb{C}^n$ полупречника $r > 0$ са центром у тачки $z_0 \in \mathbb{C}^n$ означене су са $B(z_0, r)$ и $B(z_0, r) = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z - z_0| < r\}$. Отворена јединична лопта у $\mathbb{C}^n$, која је означена са $\mathbb{B}^n$, је скуп

$$\mathbb{B}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\},$$

а њена граница је $\partial\mathbb{B}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$.

Отворен јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ у $\mathbb{C}^n$ је

$$\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, j = 1, \dots, n\},$$

а јединични торус $\mathbb{T}^n$ у $\mathbb{C}^n$ је

$$\mathbb{T}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| = 1, j = 1, \dots, n\}.$$

Ако је $n > 1$, $\mathbb{T}^n$ је само мали дио границе $\mathbb{D}^n$ и јединични торус се уобичајено назива истакнута граница од $\mathbb{D}^n$.

Општије, полидиск у $\mathbb{C}^n$ је Декартов производ n једнодимензионалних произвољних отворених дискова из $\mathbb{C}$, али како се било која теорема за $\mathbb{D}^n$ може лако пренијети на друге полидискове једноставно смјеном промјенљивих, првенствено ћемо се фокусирати на функције дефинисане на $\mathbb{D}^n$.

1.3 Холоморфне, хармонијске и плурихармонијске функције

Дефиниција 1.1. *Ако је $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ отворен скуп за функцију $f : \Omega \to \mathbb{C}$ кажемо да је холоморфна на Ω ако задовољава слиједеће особине:*

(a) $f \in C(\Omega)$,

(б) за свако $j, 1 \leq j \leq n$, и свако $z = (z_1, \ldots, z_n)$ из Ω функција

$$\lambda \to f(z_1, \ldots, z_{j-1}, z_j + \lambda, z_{j+1}, \ldots, z_n)$$

је холоморфна функција једне ӣромјенљиве λ у некој околини $0 \in \mathbb{C}$.

Услов (б) претходне теореме је да f буде холоморфна функција по свакој промјенљивој појединачно. За пресликавање $F = (F_1, \ldots, F_m)$ из $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ у $\mathbb{C}^m$ кажемо да је холоморфно ако су све функције $F_j, 1 \leq j \leq m$ холоморфне. Скуп свих холоморфних пресликавања између двије области $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ означен је са $H(\Omega_1, \Omega_2)$.

Означавамо са $A(\mathbb{D}^n)$ такозвану полидиск алгебру, која се састоји од свих непрекидних комплексних функција на затворењу $\overline{\mathbb{D}^n}$ јединичог полидиска чије су рестрикције на $\mathbb{D}^n$ холоморфне функције.

Ако је $n > 1$, $z \in \mathbb{D}^n$ и $f \in A(\mathbb{D}^n)$, онда важи Кошијева интегрална формула за полидиск

$$f(z) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta) \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \overline{\zeta_j} z_j\right)^{-1} dm_n(\zeta),$$

гдје је m_n Харова мјера на $\mathbb{T}^n$, тј. нормализована Лебегова мјера $m_n(\mathbb{T}^n) = 1$. Отуда слиједи да је свака функција $f \in A(\mathbb{D}^n)$ одређена својим вриједностима на $\mathbb{T}^n$ што истиче значај $\mathbb{T}^n$ иако је само мали дио тополошке границе.

Слично као у случају једне комплексне промјенљиве у комплексној равни $\mathbb{C}$, Кошијева интегрална формула се може користити да се покаже да се свака холоморфна функција на $\mathbb{D}^n$ може представити у облику степеног реда

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}_+^n} c_p z^p \tag{1.2}$$

који конвергира апсолутно и униформно на сваком компактном подскупу од $\mathbb{D}^n$. Одатле лако слиједи да свака $f \in H(\Omega)$ има локалан развој у вишеструки степени ред. У неким ситуацијама, као што је јединична лопта $\mathbb{B}^n$ локална репрезентација у ред холоморфне функције је у ствари глобална.

Већина својстава холоморфних функција од једне промјенљиве се преносе на вишедимензиони случај, наведимо нека од њих:

- Ако је f холоморфна на отвореном скупу $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, онда је $f \in C^\infty(\Omega)$. Сви парцијални изводи било којег реда су холоморфне функције. Ако је функција f представљена у облику (1.2), онда је $c_p = c_p(f) = \frac{\partial^p f(0)}{p!}, p \in \mathbb{Z}_+^n$.

- За холоморфне функције важи принцип максимума модула. Прецизније, ако је $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ област, $f \in H(\Omega)$ и $|f|$ достиже локални максимум на Ω, онда је f константна фукција.

- Нека је K компактан подскуп од Ω, $f \in H(\Omega)$ и $p \in \mathbb{Z}_+^n$. Тада постоји константа $C = C_{\Omega,K,p} < \infty$ таква да је

$$\|\partial^p f\|_K < C\|f\|_\Omega$$

  при чему је $\|f\|_E = \sup\limits_{z\in E} |f(z)|$.

  Ако $f_j \in H(\Omega)$ за свако $j \geq 1$ и ако $f_j \to f$ локално равномјерно на Ω, онда $\partial^p f_j \to \partial^p f$ локално равномјерно за сваки мултииндекс $p \in \mathbb{Z}_+^n$.

Напомена 1.1. *Претпоставка да $f \in C(\Omega)$ нам је битна због Фубинијеве теореме, али се може замијенити условом да је f ограничена на сваком компактном подскупу од Ω. Хартогс [28] је доказао 1906. године да је услов локалне ограничености сувишан. Према Кранцу [47] у периоду када је Хартогс формулисао своју теорему, холоморфна функција од n променљивих је дефинисана као локално ограничена функција која је холоморфна по свакој промјенљивој појединачно.*

Навешћемо још једну теорему Хартогса без доказа.

Теорема 1.1. *([70]) Ако је*

(а) Ω *отворен скуп у* $\mathbb{C}^n$,

(б) F_s *је хомоген полином степена* $s, s = 0, 1, \ldots$

(в) $\sup_s |F_s(z)| < +\infty$ *за свако* $z \in \Omega$,

онда ред $f(z) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} F_s(z)$ *конвергира равномјерно на сваком компактом подскупу од* Ω *и функција* f *је холоморфна функција.*

Функција класе C^1 на отвореном скупу Ω је холоморфна ако и само ако важе Коши-Риманове једначине

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0, \quad (1 \leq j \leq n).$$

Нека је $f \in H(\mathbb{B}^n)$. За свако $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ функцију f_ζ дефинишемо за $\lambda \in \mathbb{D}$ са

$$f_\zeta(\lambda) = f(\lambda\zeta).$$

Тада је f_ζ холоморфна на $\mathbb{D}$. За свако $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ функције f_ζ називамо функције засека функције f. Ако је l_ζ једнодимензионални потпростор простора $\mathbb{C}^n$ генерисан са ζ (комплексна права кроз $\mathbf{0}$ и ζ), онда f_ζ можемо посматрати као рестрикцију функције f на диск $\mathbb{B}^n \cap l_\zeta$. Функције засека нам омогућавају да неке чињенице из теорије функција на $\mathbb{D}$ можемо искористити за теорију функција на $\mathbb{B}^n$.

За $f \in H(\mathbb{B}^n)$ радијални извод је дефинисан са

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

За више информација о радијалном изводу препоручујемо [70].

Дефиниција 1.2. *Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{C}^n$ и нека је $f \in C^2(\Omega)$. Лапласијан функције f дефинишемо са*

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} \right). \tag{1.3}$$

Лапласијан функције дефинише се и за реално-вриједносну и комплексно-вриједносну функцију.

Једноставним рачуном добијамо да важи формула

$$\Delta f = 4 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z_j} \partial z_j}.$$

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ и $u : \Omega \to \mathbb{R}$. За функцију $u \in C^2(\Omega)$ кажемо да је реално-вриједносна хармонијска на Ω, ако је $\Delta u = 0$ на Ω.

Кажемо да је функција $u \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ комплексно-вриједносна хармонијска функција на Ω, ако је $\Delta u = 0$ на Ω или ако су функције $\mathrm{Re}\, u$ и $\mathrm{Im}\, u$ реално-вриједносне хармонијске функције на Ω.

Векторски простор свих хармонијских функција на Ω означен је са $h(\Omega)$. У овој дисертацији ћемо под појмом хармонијска функција подразумјевати реално-вриједносну или комплексно-вриједносну хармонијску функцију.

Теорема 1.2. *([45]) Нека је u хармонијска функција на диску $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Тада је, за свако $n \in \mathbb{Z}$,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^{|n|}} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \quad (0 < r < R)$$

независно од r и

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (re^{i\theta} \in \mathbb{D}_R). \tag{1.4}$$

Ред (1.4) *конвергира апсолутно и равномјерно на сваком компактном подскупу од* $\mathbb{D}_R$.

Доказ се заснива на сљедећим чињеницама: За реалну хармонијску функцију u, примјеном Коши-Риманових једначина, постоји реална функција v која је хармонијска на $\mathbb{D}_R$ тако да је $f(z) = u(z) + iv(z)$ холоморфна на $\mathbb{D}_R$. Тада је $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, гдје је $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n e^{in\theta}$ и при томе је $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n| r^n < +\infty$ за свако $r < R$.

Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ област. Кажемо да је функција $u \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$ плурихармонијска ако је, за сваку комплексну праву

$$l = l_{a,b} = \{a + \zeta b : \zeta \in \mathbb{C}\}, \qquad a \in \mathbb{C}^n, \quad b \in \mathbb{C}^n, \quad b \neq \mathbf{0}$$

функција $\zeta \mapsto u(a + \zeta b)$ хармонијска на скупу $\Omega_l = \{\zeta \in \mathbb{C} : a + \zeta b \in \Omega\}$.

Еквивалентно, функција $u \in C^2(\Omega)$ је плурихармонијска функција, ако је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z) = 0 \qquad \text{за све} \quad z \in \Omega, \quad j, k = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

Заиста, нека је $a \in \mathbb{C}^n$, $\quad b \in \mathbb{C}^n$, $\quad b \neq \mathbf{0}$, $u \in C^2(\Omega)$ и $\zeta \in \Omega_l$. Посматрајмо функцију $h(\zeta) = h_{a,b}(\zeta) = u(F(\zeta))$, гдје је $F(\zeta) = (a_1 + \zeta b_1, \dots, a_n + \zeta b_n)$. С обзиром да је

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}(\xi) = \sum_{j,k=1}^{n} b_j \overline{b_k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(z), \quad F(\zeta) = z, \tag{1.6}$$

онда је

$$(\Delta h)(0) = 4 \sum_{j,k=1}^{n} b_j \overline{b_k} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(a).$$

Ако је $H_u(a) = [c_{kj}]_{n \times n}$, гдје је $c_{kj} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_k}}(a)$, тада је

$$(\Delta h)(0) = 4 \langle H_u(a) b, b \rangle.$$

Дакле, свака $h_{a,b}$ је хармонијска ако и само ако је $H_u(a) = 0$ за свако $a \in \Omega$ односно ако и само ако важи (1.5).

Ако је u реална плурихармонијска функција услов (1.5) еквивалентан је са

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} \quad \text{за све} \quad z \in \Omega, \quad j,k = 1,\dots,n. \tag{1.7}$$

Скуп свих плурихармонијских функција на области Ω означавамо са $ph(\Omega)$ и то је векторски простор. Ако је $n = 1$, $ph(\Omega) = h(\Omega)$.

Сљедећи став успоставља кључну везу између реално-вриједносних плурихармонијских функција и холоморфних фунција. Прије тога подсјетимо да је Пуанкаре доказао да су затворене форме тачне на конвексним областима.

Став 1.1. *([25]) Нека је Ω конвексна област. Функција $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ је плурихармонијска ако и само ако је реални дио холоморфне функције на Ω.*

Доказ. Ако је $f \in H(\Omega)$ онда су f и $\bar{f}$ плурихармонијске функције, те је $u = \operatorname{Re} f = \frac{f+\bar{f}}{2}$ плурихармонијска функција.

Нека је u реална плурихармонијска функција. 1-форма

$$g = i(\overline{\partial} u - \partial u) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} dy_j - \frac{\partial u}{\partial y_j} dx_j \right)$$

је реална и њени коефицијенти су класе C^1 и осим тога је

$$\begin{aligned} dg = &- \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j} dy_k \wedge dy_j \\ &+ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dy_j - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} dy_k \wedge dx_j. \end{aligned}$$

С обзиром да је u плурихармонијска функција, на основу (1.7) и да је $\frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j}$, $dx_k \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_k$, као и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j}$, $dy_k \wedge dy_j = -dy_j \wedge dy_k$, слиједи да је $dg = 0$. На основу Пуанкареове леме, постоји реална функција v класе C^1 таква да је $dv = g$, односно

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial v}{\partial y_j} dy_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} dy_j - \frac{\partial u}{\partial y_j} dx_j \right)$$

што је еквивалентно са

$$\partial(iv) + \overline{\partial}(iv) = \partial u - \overline{\partial} u.$$

Како је $\overline{\partial}(iv) = -\overline{\partial} u$, за функцију $f = u + iv$ класе C^2 добијамо да је $\overline{\partial} f = 0$ односно f је холоморфна функција на Ω. $\square$

Из претходног става закључујемо да је $ph(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, штавише свака плурихармонијска функција је реално аналитичка.

Став 1.2. *Нека су $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ области и нека је $f \in H(\Omega_1, \Omega_2)$. За сваку $u \in ph(\Omega_2)$ је $u \circ f \in ph(\Omega_1)$.*

Теорема 1.3. *([19]) Ако је $u : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ функција дефинисана на јединичној лопти $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ таква да задовољава слиједеће услове:*

(а) u је C^∞ у околини нуле,

(б) u_ξ је хармонијска на $\mathbb{D}$ за свако $\xi \in \partial\mathbb{B}^n$,

онда је u плурихармонијска на $\mathbb{B}^n$.

Напомена 1.2. *[70] Аналогно тврђење важи ако јединичну лопту $\mathbb{B}^n$ замијенимо са јединичним полидиском $\mathbb{D}^n$.*

Напомена 1.3. *Услов под (а) у теореми 1.3 не може се ослабити до услова да је функција класе C^k, јер за функцију*

$$u(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} z_1^{k+2}, & \text{ако је } z_1 \neq 0, \\ 0 & \text{ако је } z_1 = 0 \end{cases}$$

функције засека су холоморфне али функција u није плурихармонијска.

Ако у теореми 1.3 претпоставку под *(б)* замјенимо са условом да је u_ξ холоморфна на $\mathbb{D}$ за свако $\xi \in \partial\mathbb{B}^n$, онда је u холоморфна на $\mathbb{B}^n$. То је наведено у [79] и такође се назива Форелијева теорема. Многи аутори су дали уопштење Форелијеве теореме када су функције засека холоморфне функције. Аутори радова [15] и [41] дали су уопштење Форелијеве теореме тако што су холоморфност дуж праве линије кроз 0 замијенили са холоморфношћу дуж неке општије фамилије комплексних кривих. Ли и Луо [54] су доказали Форелијеву теорему 1.3 на општијим областима, односно посматрали функцију u из звјездасте области у Риманову многострукост димензије m и доказали да је u плурихармонијска. Кранц [50] је дао нове доказе Хартогсове и Форелијеве теореме.

1.4 Појединачно хармонијске функције

Дефиниција 1.3. *Кажемо да је функција $u \in C^2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{C}^n$ појединачно хармонијска на Ω ако је*

$$\Delta_j u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} = 0 \quad \text{за свако} \quad j = 1, \dots n,$$

тј. ако је и хармонијска по свакој промјенљивој појединачно.

Напомена 1.4. *У литератури се, алтернативно, такве функције називају n-хармонијске функције.*

Простор свих појединачно хармонијских фунција на области Ω у овој дисертацији означен је са $sh(\Omega)$.

Напомена 1.5. *Функције дефинисане на $\mathbb{D}^2$ које су 2-хармонијске функције први пут се појављују 1939. године у раду [56]. Дефиниција 1.3 се појављује у Калдероновом и Зигмундовом раду [10].*

Свака појединачно хармонијска функција на области Ω је хармонијска, а обратно не мора да важи ако је $n > 1$. На примјер функција $u(z_1, z_2) = |z_1|^2 - |z_2|^2 \in h(\mathbb{C}^2) \setminus sh(\mathbb{C}^2)$.

Уврштавајући $j = k$ у (1.7) имамо да је свака плурихармонијска функција појединачно хармонијска фунција и отуда је $ph(\Omega) \subset sh(\Omega) \subset h(\Omega)$.

Теорема 1.4. *([10]) Функција $u \in C^2(\mathbb{D}^n)$ је појединачно хармонијска ако и само ако може бити представљена на $\mathbb{D}^n$ апсолутно и локално равномјерно конвергентним редом*

$$u(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{m_1,\ldots,m_n} r_1^{|m_1|} \cdots r_n^{|m_n|} e^{i(m_1\theta_1 + \ldots + m_n\theta_n)}, \tag{1.8}$$

при чему је $m = (m_1, \ldots, m_n), \theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$.

Доказ. Очигледно је да је функција u дата са (1.8) појединачно хармонијска на $\mathbb{D}^n$. Обратно, нека је $u(z) = u(z_1, \ldots, z_n)$ појединачно хармонијска на $\mathbb{D}^n$. Претпоставимо, ради једноставности да је $n = 2$ и $u(z) = u(z_1, z_2)$. Тада је, за свако фиксирано $z_2, |z_2| < 1$, примјеном теореме 1.2 функција u облика

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} c_{m_1}(z_2) r_1^{|m_1|} e^{im_1\theta_1}, \quad \text{гдје је} \quad c_{m_1}(z_2) = \frac{1}{2\pi r_1^{|m_1|}} \int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 e^{i\xi_1}, z_2) e^{-im_1\xi_1} d\xi_1. \tag{1.9}$$

Како је u класе C^2 на бидиску $\mathbb{D}^2$ дозвољено је диференцирати испод знака интеграла. За фиксиране r_1 и ξ_1 функција $u(r_1 e^{i\xi_1}, z_2)$ је хармонијска функција по промјенљивој z_2. Отуда је, за свако $m_1 \in \mathbb{Z}$, функција $c_{m_1}(z_2)$ хармонијска функција по промјенљивим x_2 и y_2, те је

$$c_{m_1}(z_2) = \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} c_{m_1,m_2} r_2^{|m_2|} e^{im_2\theta_2}, \tag{1.10}$$

гдје је

$$
\begin{aligned}
c_{m_1,m_2} =& \frac{1}{2\pi r_2^{|m_2|}} \int_{-\pi}^{\pi} c_{m_1}(r_2 e^{i\xi_2}) e^{-im_2\xi_2} d\xi_2 \\
=& \frac{1}{4\pi^2 r_1^{|m_1|} r_2^{|m_2|}} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(r_1 e^{i\xi_1}, r_2 e^{i\xi_2}) e^{-i(m_1\xi_1+m_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Према (1.9) и (1.10) функција u је облика

$$
\sum_{m_1,m_2\in\mathbb{Z}} c_{m_1,m_2} r_1^{|m_1|} r_2^{|m_2|} e^{i(m_1\theta_1+m_2\theta_2)}
\tag{1.12}
$$

и ред конвергира апсолутно у $\mathbb{D}^2$. Из (1.11) елементарно слиједи, за $0 < r_1, r_2 < 1$,

$$
|c_{m_1,m_2}| \le C r_1^{-|m_1|} r_2^{-|m_2|}, \quad \text{гдје је} \quad C = \max_{\substack{|z_1| = r_1 \\ |z_2| = r_2}} |u|
$$

и отуда ред (1.12) конвергира апсолутно за $r_1 < \rho_1, r_2 < \rho_2$ и такође у $\mathbb{D}^2$.

$\square$

Више детаља о појединачно хармонијским функцијама може се наћи у глави XVII књиге [85] и у [69].

1.5 Аутоморфизми полидиска и лопте

Нека су Ω_1, Ω_2 и Ω области у $\mathbb{C}^n$.

Дефиниција 1.4. *([47]) Кажемо да је холоморфно пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ бихоломорфно ако је $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ „1-1" и „на" и ако је $g = f^{-1}$ холоморфно на Ω_2. Ако је $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, онда кажемо да је f аутоморфизам области Ω, а скуп свих аутоморфизама области Ω означава се са $Aut(\Omega)$.*

Свако бихоломорфно пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ успоставља изоморфизам група $f_* : Aut(\Omega_1) \to Aut(\Omega_2)$ при чему је $f_* : \varphi \to f \circ \varphi \circ f^{-1}, \varphi \in Aut(\Omega_1)$. Изоморфизам између група $Aut(\Omega_1)$ и $Aut(\Omega_2)$ је потребан (али не и довољан) услов да домени Ω_1 и Ω_2 буду бихоломорфно еквивалентни. Пуанкаре је у свом раду *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rend. Circ. Mat. Palermo 23 , 185–220* из 1907. године, доказао да јединична лопта $\mathbb{B}^2$ и јединични полидиск $\mathbb{D}^2$ нису бихоломорфно еквивалентни. Он је одредио аутоморфизме области $\mathbb{B}^2$ и $\mathbb{D}^2$ и показао да ове групе нису изоморфне као групе.

За $n = 1$ пресликавање је бихоломорфно ако и само ако је конформно. Ако је $n > 1$, претходно тврђење не важи. На примјер, пресликавање $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ дефинисано са $f(z_1, z_2) = (5z_1, z_2)$ је бихоломорфно али није конформно.

$Aut(\Omega)$ дјелује транзитивно на Ω у случајевима $\Omega = \mathbb{D}^n$ и $\Omega = \mathbb{B}^n$.

Ако је $a \in \mathbb{D}$, дефинишемо

$$\varphi_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}z}. \tag{1.13}$$

Теорема 1.5. *([72]) Ако је $a \in \mathbb{D}$ фиксирано, тада φ_a има слиједеће особине:*

(а) $\varphi_a(0) = a$ *и* $\varphi_a(a) = 0$.

(б) φ_a *је „ 1-1” пресликавање које пресликава* $\mathbb{T}$ *на* $\mathbb{T}$, $\mathbb{D}$ *на* $\mathbb{D}$.

(в) $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_a$.

(г) $\varphi'_a(0) = -1 + |a|^2$ *и* $\varphi'_a(a) = (-1 + |a|^2)^{-1}$.

За јединични диск $\mathbb{D}$ група аутоморфизама $Aut(\mathbb{D})$ дата је са

$$Aut(\mathbb{D}) = \{e^{i\theta}\varphi_a(z) : \theta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{D}\}.$$

Група $Aut(\mathbb{D})$ дјелује транзитивно на $\mathbb{D}$.

Напоменимо да је конформно пресликавање из $\mathbb{K} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ на $\mathbb{D}$ дато сљедећим изразом $z \to \frac{z-1}{z+1}$, а $z \to \operatorname{tg}\frac{\pi z}{4}$ је конформно пресликавање из $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ на $\mathbb{D}$.

За $a \in \mathbb{D}^n$, аутоморфизми јединичног полидиска дати су изразом

$$\begin{aligned}
\psi_a(z) &= \left(e^{i\theta_1}\frac{a_1 - z_{\sigma(1)}}{1 - \overline{a_1}z_{\sigma(1)}}, e^{i\theta_2}\frac{a_2 - z_{\sigma(2)}}{1 - \overline{a_2}z_{\sigma(2)}}, \dots, e^{i\theta_n}\frac{a_n - z_{\sigma(n)}}{1 - \overline{a_n}z_{\sigma(n)}}\right) \\
&= \left(e^{i\theta_1}\varphi_{a_1}(z_{\sigma(1)}), e^{i\theta_2}\varphi_{a_2}(z_{\sigma(2)}), \dots, e^{i\theta_n}\varphi_{a_n}(z_{\sigma(n)})\right), \qquad z \in \mathbb{D}^n,
\end{aligned}$$

гдје су $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ реални бројеви, а σ произвољна пермутација од $(1, \dots, n)$ и сваки аутоморфизам области $\mathbb{D}^n$ је тог облика.

Ми ћемо у овој дисертацији, за $a \in \mathbb{D}^n$, користити аутоморфизам јединичног полидиска дат изразом

$$\psi_a(z) = \left(\frac{a_1 - z_1}{1 - \overline{a_1}z_1}, \frac{a_2 - z_2}{1 - \overline{a_2}z_2}, \dots, \frac{a_n - z_n}{1 - \overline{a_n}z_n}\right), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{1.14}$$

Примјетимо да непосредно из дијела *(г)* теореме 1.5 слиједи да су $\psi'_a(a) = [b_{i,j}], 1 \le i, j \le n$, и $\psi'_a(\mathbf{0}) = [c_{i,j}], 1 \le i, j \le n$, дијагоналне матрице при чему је $b_{i,i} = (-1 + |a_i|^2)^{-1}$ и $c_{i,i} = -1 + |a_i|^2, 1 \le i \le n$.

Осим тога је

$$\|\psi_z'(z)\| = \max_{1\le j\le n} \frac{1}{1-|z_j|^2} = \frac{1}{1-|z|_\infty^2}, \quad z\in\mathbb{D}^n.$$

Више детаља о аутоморфизмима полидиска $\mathbb{D}^n$ може се наћи у [31], [69], [75], [47].

Нека је, за фиксирано $a\in\mathbb{B}^n$, P_a ортогонална пројекција од $\mathbb{C}^n$ на потпростор $[a]$ генерисан са a и нека је $Q_a = I - P_a$ пројекција на ортокомплемент од $[a]$. Напоменимо да је $P_0 = 0$ и $P_a z = \frac{\langle z,a\rangle}{\langle a,a\rangle} a$ ако је $a \neq \mathbf{0}$. Нека је $s_a = (1-|a|^2)^{\frac{1}{2}}$ и дефинишемо

$$\phi_a(z) = \frac{a - P_a z - s_a Q_a z}{1-\langle z,a\rangle}, \qquad z\in\mathbb{B}^n. \tag{1.15}$$

Тада, за свако $a\in\mathbb{B}^n, \phi_a$ има сљедеће особине:

(а) $\phi_a(\mathbf{0}) = a$ и $\phi_a(a) = \mathbf{0}$.

(б) $\phi_a'(\mathbf{0}) = -s_a^2 P_a - s_a Q_a$ и $\phi_a'(a) = -\frac{1}{s_a^2}P_a - \frac{1}{s_a}Q_a$.

(в) Идентитет

$$1 - \langle \phi_a(z), \phi_a(w)\rangle = \frac{(1-\langle a,a\rangle)(1-\langle z,w\rangle)}{(1-\langle z,a\rangle)(1-\langle a,w\rangle)} \tag{1.16}$$

за све $z\in\overline{\mathbb{B}^n}, w\in\overline{\mathbb{B}^n}$.

(г) Идентитет

$$1 - |\phi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,a\rangle|^2} \tag{1.17}$$

за свако $z\in\overline{\mathbb{B}^n}$.

(д) ϕ_a је инволуција односно $\phi_a(\phi_a(z)) = z$.

(ђ) ϕ_a је хомеоморфизам из $\overline{\mathbb{B}^n}$ на $\overline{\mathbb{B}^n}$ и $\phi_a \in Aut(\mathbb{B}^n)$.

За $n=1$ групе $Aut(\mathbb{D}^n)$ и $Aut(\mathbb{B}^n)$ се подударају и то су аутоморфизми јединичног диска. Више детаља о аутоморфизмима лопте $\mathbb{B}^n$ може се наћи у [47] и [70].

Дефиниција 1.5. *За скуӣ $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ кажемо да је циркуларни скуӣ ако $e^{i\theta}z\in\Omega$ кадӣод је $z\in\Omega$ и θ реалан број.*

Картан [12] је формулисао и доказао 1931. године сљедећу теорему (видјети и [70] стр. 24)

Теорема 1.6. *Нека су*

(а) Ω_1 *и* Ω_2 *циркуларне области,* $0 \in \Omega_1, 0 \in \Omega_2$,

(б) F *је бихоломорфно пресликавање из* Ω_1 *на* Ω_2 *тако да је* $F(0) = 0$,

(в) Ω_1 *је ограничена област.*

Тада је F *линеарна трансформација.*

Претпоставимо да постоји бихоломорфно пресликавање f из $\mathbb{B}^n$ на $\mathbb{D}^n$ и нека је $f(\mathbf{0}) = a$. Како је $\psi_a \circ f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}^n$ бихоломорфно пресливање које фиксира нулу, на основу теореме 1.6, $\psi_a \circ f$ је линеарна трансформација. Међутим, инвертибилна линерна трансформација пресликава $\mathbb{B}^n$ на елипсоид, а није полидиск.(видјети [70], стр. 27.)

1.6 Извод и $\mathcal{M}$-инваријантни реалан градијент

Нека су m и n позитивни бројеви и нека је $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ отворен скуп. Извод холоморфног пресликавања $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ дефинише се као јединствено линеарно пресликавање $L = f'(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ такво да је

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + O(|h|^2), \quad |h| \to 0.$$

Норму извода означавамо са $\|f'(z)\|$.

Нека је $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Реални градијент функције f, у ознаци ∇f, је пресликавање

$$\nabla f : x \to \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

гдје су $\frac{\partial f}{\partial x_j}, j = 1, \ldots, n$ одговарајући парцијални изводи. За $f \in C^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{C}^n$ отворен скуп, у складу са идентификацијом $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$

$$\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(z), \frac{\partial f}{\partial y_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(z), \frac{\partial f}{\partial y_n}(z)\right).$$

За комплексно-вриједносну $f(\Omega)$ дефинишемо z-градијент и $\overline{z}$-градијент на сљедећи начин:

$$\nabla_z f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right)$$

и

$$\nabla_{\overline{z}} f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_1}}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial \overline{z_n}}(z) \right).$$

Како су $\nabla_z f(z)$ и $\nabla_{\overline{z}} f(z)$ вектори из $\mathbb{C}^n$

$$|\nabla_z f(z)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \right|^2} \quad \text{и} \quad |\nabla_{\overline{z}} f(z)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(z) \right|^2}.$$

Наравно, због $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ и (1.1) важи

$$|\nabla f(z)| = \sqrt{|\nabla_z f(z)|^2 + |\nabla_{\overline{z}} f(z)|^2}.$$

За функцију $f \in C^1(\mathbb{B}^n)$ $\mathcal{M}$-инваријантни градијент и $\mathcal{M}$-инваријантни реалан градијент дефинишемо са

$$\tilde{\nabla}_z f(z) = \nabla_z (f \circ \phi_z)(\mathbf{0}), \quad \tilde{\nabla} f(z) = \nabla (f \circ \phi_z)(\mathbf{0}),$$

респективно, гдје је ϕ_z аутоморфизам $\mathbb{B}^n$ дат изразом (1.15).

Уочимо да је $|\tilde{\nabla} f(\mathbf{0})| = |\nabla f(\mathbf{0})|$ и $|\tilde{\nabla} f(z)| = |\tilde{\nabla}(f \circ \phi_z)(\mathbf{0})|$.

Слично дефинишемо $\mathcal{M}$-инваријантни реалан градијент функције дефинисане на отвореном јединичном полидиску.

Прецизније, за функцију $f \in C^1(\mathbb{D}^n)$ $\mathcal{M}$-инваријантни реалан градијент дефинишемо са

$$\tilde{\nabla} f(z) = \nabla (f \circ \psi_z)(\mathbf{0}),$$

гдје је ψ_z аутоморфизам $\mathbb{D}^n$ дат са (1.14).

Такође важи: $|\tilde{\nabla} f(\mathbf{0})| = |\nabla f(\mathbf{0})|$ и $|\tilde{\nabla} f(z)| = |\tilde{\nabla}(f \circ \psi_z)(\mathbf{0})|$.

Више информација о $\mathcal{M}$-инваријантном градијенту и $\mathcal{M}$-инваријантном реалном градијенту може се наћи у [65].

1.7 Хипергеометријске функције

Нека је $\mathbb{K} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. Гама функција, за $z \in \mathbb{K}$, дефинисана је са

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

За $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ хипергеометријска функција је дефинисана са

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad |z| < 1. \tag{1.18}$$

гдје је $(a)_0 = 1$ и $(a)_k = \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ за $k \geq 1$ и она је рјешење хипергеометријске једначине

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz} - abu = 0. \tag{1.19}$$

У овој дисертацији су коришћене слиједеће особине хипергеометријских функција:

- Ако је $\mathrm{Re}(a+b-c) < 0$ тада ред у (1.18) конвергира апсолутно за $|z| \leq 1$.
- $F(a,b;c;0) = 1$.

Напомена 1.6. *Олофсон је у свом раду ([63], став 1.3.) доказао да ако је* $u \in C^2(0,1)$ *рјешење једначине* (1.19), $a,b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, c \geq 1$ *и ако је*

$$cu'(x) - abu(x) = o\left(\frac{1}{x^c}\right), \quad x \to 0^+,$$

да је онда и облика $u = C \cdot F(a,b,c,\cdot)$. *Заправо, Олофсон је разматрао* $a, b \in \mathbb{R}$, *али претходно тврђење важи и за комплексне бројеве* a *и* b.

Теорема 1.7. *([42], теорема 2.6.) Ако су* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *онда*

$$\lim_{m\to\infty} F(-\alpha, m-\beta; m+1; z) = (1-z)^\alpha, \quad z \in \mathbb{D}.$$

За низ $(F(-\alpha, m-\beta; m+1; z))_{m=1}^\infty$ *постоји подниз који конвергира равномјерно ка* $(1-z)^\alpha$ *на сваком компактном подскупу од* $\mathbb{D}$.

Став 1.3. *([42], став 3.3.) Ако су* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *онда важи*

$$\limsup_{m\to\infty}\left(\max_{0\leq x\leq r}\left|F^{(n)}(-\alpha, m-\beta; m+1; x)\right|\right)^{1/m} \leq 1$$

за $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < r < 1$.

Више детаља о хипергеометријским функцијама може се наћи у [7].

1.8 Неки простори функција

Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ фиксиран простор са мјером.

Познато је да су стандардни простори $L^p(X,\mu)$ Банахови простори за свако $1 \leq p \leq +\infty$.

Нека су p и q конјуговани експоненти односно $p, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тада за $f \in L^p(\mu)$ и $g \in L^q(\mu)$ важи Хелдерова неједнакост

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Простор свих комплексних Борелових мјера на $\mathbb{T}^n$ је означен са $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Ако на простору $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ уведемо норму

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{T}^n),$$

гдје је $|\mu|$ варијација комплексне мјере μ (тотална), тада је $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ Банахов простор. На $\mathbb{T}^n$ имамо нормализовану мјеру $\frac{1}{(2n)^n} d\theta_1 \dots d\theta_n$.

Теорема 1.8. *Нека је λ сиīма коначна мјера на мјерљивом ӣросӣору $(X, \mathfrak{M})$ и нека је μ комӣлексна мјера на $\mathfrak{M}$. Тада ӣосӣоје јединсӣвене комӣлексне мјере μ_{ac} и μ_s ӣакве да је*

(а) $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$,

(б) $\mu_{ac} \ll \lambda$,

(в) $\mu_s \perp \lambda$.

Шӣавише, ӣосӣоји јединсӣвена функција $f \in L^1(X, \lambda)$ ӣаква да је $\mu_{ac} = f d\lambda$.

Такође важи

$$L^\infty(\mathbb{T}^n) \subset L^q(\mathbb{T}^n) \subset L^p(\mathbb{T}^n) \subset L^1(\mathbb{T}^n)$$

ако је $1 < p < q < +\infty$.

Нека је Ω отворена област у $\mathbb{C}^n$. Простор $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{n=1}^\infty C^n(\Omega)$, гдје је $C^n(\Omega)$ простор n пута непрекидно диференцијабилних функција на Ω. У векторски простор $C^\infty(\Omega)$ могу се увести псеудонорме

$$\|u\|_{p,q,K} = \max_{z \in K} |\partial^{(p,q)} u(z)|, \qquad K \subset \Omega \quad \text{је компактан}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{1.20}$$

и $C^\infty(\Omega)$ је локално конвексан комплетан метризабилан тополошки векторски простор.

Кажемо да низ функција $(u_m)_{m=1}^\infty, u_m \in C^\infty(\Omega)$ ковергира ка $u \in C^\infty(\Omega)$ у топологији простора $C^\infty(\Omega)$ кад $m \to \infty$, ако је

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{p,q,K} = 0$$

за свако $(p, q) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$ и сваки компактан скуп $K \subset \Omega$.

Кажемо да ред $\sum_{m=0}^{\infty} u_m$ функција $u_m \in C^\infty(\Omega)$ конвергира апсолутно у $C^\infty(\Omega)$ ако је

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|u\|_{p,q,K} < \infty,$$

за $(p,q) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$ и $K \subset \Omega$ компактан. Како је $C^\infty(\Omega)$ комплетан сваки апсолутно конвергентан ред у $C^\infty(\mathbb{D}^n)$ је и конвергентан у $C^\infty(\Omega)$. Више детаља о овим просторима може се наћи у [30] и у [72].

1.9 Простор $h^p(\mathbb{D})$

Почетак теорије Хардијевих простора повезује се са радовима Хардија [27] и Риса [68] из 1915. и 1923. године, респективно. Хардијеви простори су најинтензивније проучавани у случају јединичног диска (видјети [17, 29, 45, 84]). У овој дисертацији су дате само релевантне теореме репрезентације и теореме типа Фатуа.

Дефиниција 1.6. *За $1 \leq p < +\infty$ скуп $h^p(\mathbb{D})$ је дефинисан као скуп свих хармонијских функција на $\mathbb{D}$ за које је норма*

$$\|u\|_p = \sup_{0 \leq r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$$

коначна. Скуп $h^\infty(\mathbb{D})$ је скуп свих ограничених хармонијских функција на $\mathbb{D}$ са нормом

$$\|u\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |u(z)|.$$

За $1 \leq p \leq +\infty$ скуп $h^p(\mathbb{D})$ је Банахов простор и на основу Хелдерове неједнакости је

$$h^\infty(\mathbb{D}) \subset h^q(\mathbb{D}) \subset h^p(\mathbb{D})$$

ако је $1 \leq p < q < +\infty$.

Банахови простори $h^1(\mathbb{D})$ и $h^p(\mathbb{D}), (1 < p \leq +\infty)$ су изоморфни просторима $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ и $L^p(\mathbb{T}), (1 < p \leq +\infty)$ респективно.

Пуасонов интеграл мјере $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$, у ознаци $P[d\mu]$, дефинишемо на слиједећи начин:

$$P[d\mu](z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - z\bar{\zeta}|^2} d\mu(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}.$$

За дато $\zeta = e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$ и $0 < A < \infty$ Штолцов угао отвора A у ζ је дат са

$$S_A(e^{i\theta_0}) = \{re^{i(\theta_0-\theta)} : |\theta| \leq A(1-r)\}.$$

Нека је $f(z)$ холоморфна на $\mathbb{D}$. Фату [18] је доказао ако је функција f ограничена на јединичном диску, онда за скоро свако тачку $\zeta \in \mathbb{T}$ постоји гранична вриједност функција $f(z)$ кад се z приближава ζ дуж нетангенцијалног пута односно Штолцовог угла.

Слиједећа теорема је теорема типа Фатуа.

Теорема 1.9. *Ако је* $d\mu = fdm_1 + d\mu_s$ *Лебег–Радон–Никодимово разлагање комплексне Борелове мјере* μ *на* $\mathbb{T}$, *гдје је* $f \in L^1(\mathbb{T}), \mu_s \perp dm_1$, *тада* $P[d\mu]$ *има нетангенцијални лимес* $f(e^{i\theta})$ *у скоро свакој тачки из* $\mathbb{T}$.

2 Шварц-Пикова лема за плурихармонијске функције

2.1 Шварц-Пикова лема за холоморфне функције

Шварцова лема за холоморфне функције је један од најцитиранијих и централних резултата у теорији комплексних функција. Ова лема је дала велики подстицај развоју геометријске теорије функција и других поља анализе.

Теорема 2.1. *(Шварцова лема) Ако је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ холоморфно пресликавање такво да је $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$, онда је*

(а) $|f(z)| \leq |z|$, за свако $z \in \mathbb{D}$,

(б) $|f'(0)| \leq 1$.

Ако једнакост важи у (а) за неко $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, или једнакост важи у (б), тада је $f(z) = e^{i\theta}z$ за неко $\theta \in \mathbb{R}$. Обратно, ако постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{D}$ важи $f(z) = e^{i\theta}z$, онда у (а) и (б) важе једнакости.

Доказ. С обзиром да је $f(0) = 0$, на основу Тејлорове теореме имамо $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ за $z \in \mathbb{D}$. Нека је $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Тада је $g \in H(\mathbb{D})$ и $f(z) = zg(z)$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Нека је r произвољно изабрана константа таква да је $0 < r < 1$. Дефинишемо $g_r(z) = g(rz), |z| < \frac{1}{r}$. На основу принципа максимума модула за холоморфне функције слиједи да је

$$\max_{|z|\leq 1} |g_r(z)| = \max_{|z|=1} |g_r(z)| = \max_{|z|=1} \frac{|f(rz)|}{|rz|} = \frac{1}{r} \max_{|z|=1} |f(rz)| \leq \frac{1}{r}. \tag{2.1}$$

Фиксирајмо $z \in \mathbb{D}$ и нека $r \to 1^-$. Преласком на граничну вриједност у (2.1), добијамо да је $|g(z)| \leq 1$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Отуда је $|f(z)| \leq |z|$. Како је $f'(0) = g(0)$,

имамо да је $|f'(0)| \leq 1$.
Ако је $|f(z_0)| = |z_0|$ за неко $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, онда је $|g(z_0)| = 1$, и на основу принципа максимума модула, g је константна функције модула 1 за свако $z \in \mathbb{D}$, тј, постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = zg(z) = ze^{i\theta}$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Ако је $|f'(0)| = 1$, онда је $|g(0)| = 1$, па је на основу принципа максимума модула g константна функција и $|g| = 1$. Према томе постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = zg(z) = ze^{i\theta}$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Ако постоји $\theta \in \mathbb{R}$ такво да за свако $z \in \mathbb{D}$, важи $f(z) = ze^{i\theta}$, онда у *(a)* и *(б)* важе једнакости. □

Тврђење у теореми 2.1 уз јачу претпоставку да је дато пресликавање унивалентно, први је доказао и формулусао Карл Херман Амандус Шварц у свом делу [74]. Константин Каратеодори је дао име овом резултату у свом раду [11]. У својим аутобиографским биљешкама Каратеодори наводи да је за доказ, који је дат у овој дисертацији, захвалан Ерхарду Шмиту, као и да је Пуанкаре (*Poincaré*), у свом раду [67], дао сличан доказ.

Сада ћемо приказати уопштење Шварцове леме без додатног услова $f(0) = 0$.

Теорема 2.2. *(Шварц-Пикова лема) Нека је $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$. Тада за свако $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи*

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \overline{z_1}z_2|}, \tag{2.2}$$

и за свако $z \in \mathbb{D}$ важи

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}. \tag{2.3}$$

Једнакост у (2.2) и (2.3) важи ако и само ако $f \in Aut(\mathbb{D})$.

Доказ. За фиксирано $z_1 \in \mathbb{D}$ Мебијусова трансформација

$$\varphi_{z_1}(z) = \frac{z_1 - z}{1 - \overline{z_1}z}$$

је конформно пресликавање јединичног диска у себе такво да је $\varphi_{z_1}(z_1) = 0$ и $(\varphi_{z_1})^{-1} = \varphi_{z_1}$. Посматрајмо сложену функцију

$$g(z) = \varphi_{f(z_1)}(f(\varphi_{z_1}^{-1}(z))).$$

Тада је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање такво да је $g(0) = 0$. Дакле, функција g испуњава претпоставке Шварцове леме и примјеном исте леме имамо

$$|g(z)| \leq |z|,$$

односно

$$\left|\frac{f(z_1) - f(\varphi_{z_1}^{-1}(z))}{1 - \overline{f(z_1)} f(\varphi_{z_1}^{-1}(z))}\right| \leq |z|.$$

Означимо $\varphi_{z_1}^{-1}(z) = z_2$. Тада је

$$\left|\frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_1)} f(z_2)}\right| \leq |\varphi_{z_1}(z_2)| = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|.$$

Такође, на основу Шварцове леме важи $|g'(0)| \leq 1$. Примјеном извода сложене функције добијамо да је

$$|\varphi'_{f(z_1)}(f(\varphi_{z_1}^{-1}(0))| \cdot |f'(\varphi_{z_1}^{-1}(0))| \cdot |(\varphi^{-1})'_{z_1}(0)| \leq 1.$$

С обзиром да је

$$\varphi'_{z_1}(z) = \frac{-1 + |z_1|^2}{(1 - \overline{z_1} z)^2},$$

претходна неједнакост може се записати у облику:

$$\frac{-1 + |f(z_1)|^2}{(1 - |f(z_1)|^2)^2} \cdot |f'(z_1)| \cdot (-1 + |z_1|^2) \leq 1.$$

Једнакост у (2.2) и (2.3) важи ако и само ако је $g = e^{i\theta} Id$ за $\theta \in \mathbb{R}$ тј. ако и само ако је $f = \varphi_{f(z_1)}(e^{i\theta}(\varphi_{z_1}))$. □

Боес [8] наводи да Каратеодори, у свом раду [11], помиње горе наведену идеју композиције холоморфне функције из јединичног диска $\mathbb{D}$ у самог себе и пресликавања која припадају $Aut(\mathbb{D})$. Осим тога Боес наводи да је француски математичар Гастон Жулија [34] први записао неједнакост (2.2).

Дефиниција 2.1. *Функцију $\delta_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, 1)$ дефинишемо са*

$$\delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = |\varphi_{z_1}(z_2)| = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2}\right|.$$

Директно из Шварц-Пикове леме (Теорема 2.2) слиједи посљедица:

Посљедица 2.1. *Ако је $f \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, онда је*

(a) $\delta_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \leq \delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

(б) Сљедећа тврђења су еквивалентна:

(i) $f \in Aut(\mathbb{D})$;

(ii) $\delta_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) = \delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Теорема 2.3. *Функција $\delta_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0,1)$ је растојање.*

Доказ. Очигледно важи:

(а) $\delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = 0$ ако и само ако је $z_1 = z_2$,

(б) $\delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \delta_{\mathbb{D}}(z_2, z_1)$ за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

Потребно је још доказати:

(в) $\delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) \le \delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{D}}(z_2, z_3)$ за све $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$.

Нека су z_1, z_2, z_3 различите тачке и докажимо да важи $\delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) < \delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + \delta_{\mathbb{D}}(z_2, z_3)$. Нека је $g(z) = e^{-i\arg\varphi_{z_1}(z_2)}\varphi_{z_1}(z)$. Тада је g јединствени аутоморфизам $g \in Aut(\mathbb{D})$ такав да је $g(z_1) = 0$ и $g(z_2) = |\varphi_{z_1}(z_2)| \in (0,1)$. С обзиром да је функција $\delta_{\mathbb{D}}$ $Aut(\mathbb{D})$ инваријантна, без умањења општости, претпоставимо да је $z_1 = 0$ и $z_2 \in (0,1)$. Треба да докажемо да је $|z_3| < z_2 + \delta_{\mathbb{D}}(z_2, z_3)$. Претходна неједнакост тривијално важи ако је $|z_3| \le z_2$. Нека је $|z_3| > z_2$. Како је

$$1 - \delta_{\mathbb{D}}^2(z_2, z_3) = 1 - \left|\frac{z_2 - z_3}{1 - z_2 z_3}\right|^2 = \frac{(1 - z_2^2)(1 - |z_3|^2)}{|1 - z_2 z_3|^2} \le \frac{(1 - z_2^2)(1 - |z_3|^2)}{|1 - |z_2 z_3||^2}.$$

и како је

$$1 - \delta_{\mathbb{D}}^2(z_2, |z_3|) = \frac{(1 - z_2^2)(1 - |z_3|^2)}{|1 - |z_2 z_3||^2},$$

тада је $\delta_{\mathbb{D}}(z_2, z_3) \ge \delta_{\mathbb{D}}(z_2, |z_3|)$. Дакле,

$$\delta_{\mathbb{D}}(z_2, z_3) \ge \delta_{\mathbb{D}}(z_2, |z_3|) = \frac{|z_2 - |z_3||}{1 - |z_2 z_3|} = \frac{|z_3| - z_2}{1 - |z_2 z_3|} > |z_3| - z_2.$$

□

Напомена 2.1. *Растојање $\delta_{\mathbb{D}}$ називамо псеудохиперболичко растојање или Мебијусово растојање.*

Нека је функција $\lambda_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \to (0, \infty)$ дефинисана са $\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ и нека је $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ дио по дио C^1-крива. Дужину криве γ дефинишемо са

$$L_P(\gamma) = \int_0^1 \lambda_{\mathbb{D}}(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2}dt.$$

Дефиниција 2.2. *За $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ дефинишемо*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \inf\{L_P(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{D}, \gamma \text{ је дио по дио } C^1\text{-крива}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\}.$$

Директно из дефиниције 2.2 слиједи

(а) $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(z_2, z_1)$ за све $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,

(б) $\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_3) \leq \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) + \rho_{\mathbb{D}}(z_2, z_3)$ за све $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}$.

Теорема 2.4. *(Шварц-Пикова лема у терминима хиперболичке метрике) Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање. Тада важи:*

(а) $\lambda_{\mathbb{D}}(f(z))|f'(z)| \leq \lambda_{\mathbb{D}}(z), \quad$ *за свако* $\quad z \in \mathbb{D}$.

(б) $\rho_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2), \quad$ *за све* $\quad z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.

При томе, ако је $f \in Aut(\mathbb{D})$, онда и у (а) и у (б) важе једнакости.

Доказ.

(а) Слиједи директно из (2.3).

(б) Нека је $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ дио по дио C^1-крива таква да је $\gamma(0) = z_1$ и $\gamma(1) = z_2$. Тада је $f \circ \gamma = \Gamma$ дио по дио C^1-крива у $\mathbb{D}$ таква да је $\Gamma(0) = f(z_1)$ и $\Gamma(1) = f(z_2)$. Отуда је, према (a),

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) &\leq L_P(\Gamma) \\
&= \int_0^1 \frac{2|\Gamma'(t)|}{1 - |\Gamma(t)|^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2|f'(\gamma(t)||\gamma'(t)|}{1 - |f(\gamma(t))|^2} dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dtdt \\
&= L_P(\gamma)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) &\leq \inf\{L_P(\gamma) : \gamma : [0,1] \to \mathbb{D}, \gamma \,\text{је дио по дио}\, C^1\text{-крива}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\} \\
&= \rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Ако је $f \in Aut(\mathbb{D})$, онда на основу теореме 2.2 важи једнакост у *(а)*. Осим тога, како је тада $f^{-1} \in H(\mathbb{D}, \mathbb{D})$, онда неједнакост под *(б)* важи и за f^{-1}, па је

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(f^{-1}(f(z_1)), f^{-1}(f(z_2))) \leq \rho_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)).$$

□

Лема 2.1. *За свако* $s, 0 < s < 1$,

$$\rho_{\mathbb{D}}(0, s) = \ln \frac{1+s}{1-s} \tag{2.4}$$

и $\gamma_s(t) = ts, 0 \leq t \leq 1$ *је јединствена до на репараметризацију геодезијска линија која спаја* 0 *и* s.

Доказ. Уочимо да је

$$\rho_{\mathbb{D}}(0, s) \leq L_P(\gamma_s) = \int_0^s \frac{2dt}{1-t^2} = \ln \frac{1+s}{1-s}.$$

С друге стране, ако је $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{D}$ дио по дио C^1-крива таква да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = s$, онда је

$$L_P(\gamma) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|dt}{1-|\gamma(t)|^2} = \int_0^1 \frac{2(|\gamma_1'(t)|^2 + |\gamma_2'(t)|^2)^{\frac{1}{2}}dt}{1-|\gamma_1(t)|^2 - |\gamma_2(t)|^2}.$$

Међутим, за свако $t \in [0, 1]$ је

$$(|\gamma_1'(t)|^2 + |\gamma_2'(t)|^2)^{\frac{1}{2}} \geq |\gamma_1'(t)| \geq \gamma_1'(t) \quad \text{и} \quad 1 - |\gamma_1(t)|^2 - |\gamma_2(t)|^2 \leq 1 - |\gamma_1(t)|^2,$$

при чему су неједнакости строге у случају $\gamma_2(t) \neq 0$.

Дакле,

$$L_P(\gamma) \geq \int_0^1 \frac{2|\gamma_1'(t)|dt}{1-|\gamma_1(t)|^2} = \ln \frac{1+s}{1-s}. \tag{2.5}$$

Значи, важи тврђење (2.4) и штавише ако је $\rho_{\mathbb{D}}(0, s) = L_P(\gamma)$, онда у (2.5) важи једнакост. Према томе, $\gamma_2(t) = 0, \gamma_1 : [0, 1] \to [0, s]$ и γ_1 је монотоно растућа функција, што даје јединственост до на репараметризацију. □

Теорема 2.5. *За све* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$,

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \ln \frac{1 + \delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)}{1 - \delta_{\mathbb{D}}(z_1, z_2)} \tag{2.6}$$

Доказ. Према теореми 2.4 $\delta_{\mathbb{D}}$ је $Aut(\mathbb{D})$ инваријантно, а лијева страна једнакости (2.6) је такође $Aut(\mathbb{D})$ инваријантно. Стога, без умањења општости нека је $z_1 = 0, z_2 = s \in (0, 1)$. Потом тврђење слиједи из леме 2.1. □

На основу теореме 2.3 и теореме 2.5 непосредно слиједи:

$$\rho_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = 0 \quad \text{ако и само ако је} \quad z_1 = z_2.$$

Према томе доказали смо сљедећу теорему

Теорема 2.6. *Функција $\rho_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to [0, \infty)$ је растојање.*

Напомена 2.2. *Растојање $\rho_{\mathbb{D}}$ називамо Пуанкареово или хиперболичко растојање.*

Дефиниција 2.3. *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ просто повезана област различита од $\mathbb{C}$ и нека је f конформни изоморфизам из Ω у $\mathbb{D}$. Пуанкареова или хиперболичка метрика на Ω дефинише се на слиједећи начин:*

$$\rho_{\Omega}(z_1, z_2) = \rho_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \quad z_1, z_2 \in \Omega.$$

Просто повезану област $\Omega \subset \mathbb{C}$ која је различита од $\mathbb{C}$, називамо хиперболички домен.

Теорема 2.7. *Нека су $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ хиперболички домени и $f \in H(\Omega_1, \Omega_2)$. Тада важи*

$$\rho_{\mathbb{D}}(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho_{\Omega}(z_1, z_2) \quad \text{за све} \quad z_1, z_2 \in \Omega_1.$$

Ако је f конформни изоморфизам из Ω_1 у Ω_2 онда важи једнакост. Обратно, ако за неке $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ важи једнакост онда је f конформни изоморфизам из Ω_1 у Ω_2.

Како је $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$ конфорфмно пресликавање из $\mathbb{K}$ на $\mathbb{D}$ из дефиниције 2.3 слиједи

$$\rho_{\mathbb{K}}(z, w) = \ln \frac{|w + \bar{z}| + |z - w|}{|w + \bar{z}| - |z - w|}, \qquad z, w \in \mathbb{K}. \tag{2.7}$$

Ако су x и y позитивни реални бројеви, из претходног, добијамо

$$\rho_{\mathbb{K}}(x, y) = \left| \ln \frac{x}{y} \right|, \quad x, y > 0. \tag{2.8}$$

Будући да је $z \mapsto \operatorname{tg} \frac{\pi z}{4}$ конформно пресликавање траке $\mathbb{S}$ на $\mathbb{D}$, из дефиниције 2.3, добијамо формулу

$$\rho_{\mathbb{S}}(z, w) = \ln \frac{|\cos \frac{\pi(w+\bar{z})}{4}| + |\sin \frac{\pi(z-w)}{4}|}{|\cos \frac{\pi(w+\bar{z})}{4}| - |\sin \frac{\pi(z-w)}{4}|}, \qquad z, w \in \mathbb{S}. \tag{2.9}$$

Посебно, за $x, y \in (-1, 1)$ имамо

$$\rho_{\mathbb{S}}(x, y) = \left| \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 - y) - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 - x) \right|. \tag{2.10}$$

Заиста, ако је на примјер $x-y\in(-2,0)$, онда је

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbb{S}}(x,y)&=\ln\frac{\cos\frac{\pi(x+y)}{4}-\sin\frac{\pi(x-y)}{4}}{\cos\frac{\pi(x+y)}{4}+\sin\frac{\pi(x-y)}{4}}\\&=\ln\frac{\sin\frac{\pi(1-x)}{4}\cdot\cos\frac{\pi(1-y)}{4}}{\sin\frac{\pi(1-y)}{4}\cdot\cos\frac{\pi(1-x)}{4}}\\&=\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi(1-x)}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi(1-y)}{4}}.\end{aligned}$$

На свим хиперболичким доменима у $\mathbb{C}$ се слиједеће три природне метрике поклапају: Пуанкареова (хиперболичка), Кобајашијева и Бергманова.

Размотримо сада вишедимензиону ситуацију. Сљедећи став је уопштење Шварц-Пикове леме са јединичног диска у комплексној равни на случај јединичног полидиска (видјети [69], страна 179 и [43]).

Став 2.1. *([43]) Ако је $f:\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}$ холоморфно пресликавање, онда је*

$$\sum_{i=1}^{n}(1-|z_i|^2)\left|\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)\right|\le 1-|f(z)|^2,\qquad z\in\mathbb{D}^n. \tag{2.11}$$

Доказ. Нека $f:\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}$ холоморфно пресликавање такво да је $f(\mathbf{0})=0$. Даље, нека је $\frac{\partial f}{\partial z_i}(\mathbf{0})=c_i$. Тада је $\sum_{i=1}^n c_iz_i$ члан степена један у хомогеном развоју функције f и отуда је

$$\sum_{i=1}^{n}c_iz_i=\int_{\mathbb{T}^n}f(\zeta\cdot z)\overline{\zeta}dm_n(\zeta),\quad z\in\mathbb{D}^n.$$

Дакле, $|\sum_{i=1}^n c_iz_i|\le 1$ за сваки избор $z_i\in\mathbb{D}$ и према томе је

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial z_i}(\mathbf{0})\right|=\sum_{i=1}^{n}|c_i|=\sup_{|z_j|\le 1}\left|\sum_{i=1}^{n}c_jz_j\right|\le 1.$$

За $a\in\mathbb{D}^n$ фиксирано, нека је ψ_a аутоморфизам области $\mathbb{D}^n$ дат са (1.14). Даље, нека је $h=\varphi_b\circ f\circ\psi_a, b=f(a)$, односно

$$h(z)=\frac{f(a)-(f\circ\psi_a)(z)}{1-\overline{f(a)}(f\circ\psi_a)(z)},\quad z\in\mathbb{D}^n.$$

Тада је $h:\mathbb{D}^n\to\mathbb{D}$ холоморфно пресликавање такво да је $h(\mathbf{0})=0$ и онда је по доказаном

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial h}{\partial z_i}(\mathbf{0})\right|\le 1. \tag{2.12}$$

Након једноставног рачуна добијамо да је

$$\frac{\partial h}{\partial z_i}(\mathbf{0}) = \frac{(1-|a_i|^2)\frac{\partial f}{\partial a_i}(a)}{1-|f(a)|^2}$$

што заједно са (2.12) даје (2.11). □

Дефиниција 2.4. *Растојање на* $\mathbb{D}^n$ *дато формулом*

$$k_{\mathbb{D}^n}(z,w) = \max_{1\le i\le n} \rho_{\mathbb{D}}(z_i,w_i), \qquad z,w\in\mathbb{D}^n, \tag{2.13}$$

гдје је

$$\rho_{\mathbb{D}}(z,w) = \ln\frac{|1-w\overline{z}|+|z-w|}{|1-w\overline{z}|-|z-w|}, \qquad z,w\in\mathbb{D}$$

називамо Кобајашијевим растојањем на $\mathbb{D}^n$.

Примјетимо да је $k_{\mathbb{D}^n}$ $Aut(\mathbb{D}^n)$ инваријантно, на основу чињенице да је $\rho_{\mathbb{D}}$ $Aut(\mathbb{D})$ инваријантно, то јест

$$k_{\mathbb{D}^n}(\psi(z),\psi(w)) = k_{\mathbb{D}^n}(z,w), \quad z,w\in\mathbb{D}^n, \psi\in Aut(\mathbb{D}^n).$$

Важно својство Кобајашијеве метрике на $\mathbb{D}^n$ је контрактивно својство дато у слиједећој теореми:

Теорема 2.8. *За свако* $f\in H(\mathbb{D}^n,\mathbb{D})$ *важи*

$$\rho_{\mathbb{D}}(f(z),f(w)) \le k_{\mathbb{D}^n}(z,w), \quad z,w\in\mathbb{D}^n.$$

Доказ. Користећи инваријантност $\rho_{\mathbb{D}}$ и $k_{\mathbb{D}^n}$ можемо претпоставити да је $w=\mathbf{0}$ и $f(w)=0$. Дакле, треба доказати да је $\rho_{\mathbb{D}}(f(z),0)\le \max\limits_{1\le j\le n}\rho_{\mathbb{D}}(z_j,0)$, што је еквивалентно са $|f(z)|\le \max_{1\le j\le n}|z_j|$.

Одаберимо k тако да је $|z_k|=|z|_\infty$ и нека је $g(\lambda)=f\left(\frac{\lambda}{z_k}z\right)$, $|\lambda|<1$. Очигледно је g холоморфно пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ и $g(0)=0$. Дакле, функција g испуњава претпоставке Шварцове леме и примјеном исте леме добијамо да је $|g(z_k)|\le|z_k|$ односно $|f(z)|\le|z_k|$. □

Напомена 2.3. *Претходно тврђење је познато у општијој ситуацији, видјети [47].*

Дефиниција 2.5. *Бергманово растојање између двије тачке у јединичној лопти* $\mathbb{B}^n$ *дато је формулом*

$$b_{\mathbb{B}^n}(z,w) = \ln\frac{|1-\langle z,w\rangle| + \sqrt{|z-w|^2+|\langle z,w\rangle|^2-|z|^2|w|^2}}{|1-\langle z,w\rangle| - \sqrt{|z-w|^2+|\langle z,w\rangle|^2-|z|^2|w|^2}}$$

или краће

$$b_{\mathbb{B}^n}(z,w) = \ln \frac{1+|\phi_z(w)|}{1-|\phi_z(w)|}, \qquad z,w \in \mathbb{B}^n, \tag{2.14}$$

гдје је $\phi_z \in Aut(\mathbb{B}^n)$ *уведен у (1.15) и*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z,w) = \ln \frac{|1-w\overline{z}|+|z-w|}{|1-w\overline{z}|-|z-w|}, \qquad z,w \in \mathbb{D}. \tag{2.15}$$

Лако је провјерити да је заиста ријеч о метрици која је, на основу (2.14), $Aut(\mathbb{B}^n)$ инваријантна. У литератури се често појављује мултипликативни фактор у (2.14), али у овој дисертацији не пишемо мултипликативни фактор како би били у складу са [60]. Општа теорија Бергманове метрике у $\mathbb{C}^n$ је веома развијена област, видјети [31], [47] и [48].

У слиједећој теореми наводимо контрактивно својство за Бергманову метрику на $\mathbb{B}^n$.

Теорема 2.9. *([60]) Свака холоморфна функција* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ *је контракција у односу на Бергманову метрику на* $\mathbb{B}^n$ *и Пуанкареову метрику на* $\mathbb{D}$.

Доказ. Као и раније, због инваријантности метрика, можемо без умањења општости претпоставити да је $w = \mathbf{0}$ и $f(\mathbf{0}) = 0$. Довољно је, на основу (2.14) и (2.15), доказати да је

$$\ln \frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \le \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{B}^n$$

што је еквивалентно са

$$|f(z)| \le |z|, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Посљедња неједнакост слиједи примјеном Шварцове леме на функцију $g(\lambda) = f\left(\lambda \frac{z}{|z|}\right)$, $|\lambda| < 1$. Заиста, тада је $g(|z|) \le |z|$, односно $|f(z)| \le |z|$. □

О свему наведеном у овом потпоглављу више информација може се наћи у [3], [16], [31], [44],[47], [49], [58] као и у литератури која је цитирана.

2.2 Процјене растојања за плурихармонијске функције

У овом и наредном потпоглављу бавимо се процјенама типа Шварц-Пика за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције чији је домен или јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ или јединична лопта $\mathbb{B}^n$. Метод коришћења процјена за холоморфне функције да би се добиле неједнакости Шварц-Пик-овог типа за хармонијске функције развили су М. Матељевић и његове колеге (видјети [57]). У [38] дате су процјене растојања за плурихармонијске функције из произвољне комплексне многострукости у одговарајући интервал у $\mathbb{R}$, али без тачних константи. У овој дисертацији је дат директан доказ за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску $\mathbb{D}^n$ и на $\mathbb{B}^n$.

Лема 2.2. *([4]) За све z_1 и z_2 из $\mathbb{K}$ важи*

$$\left|\frac{\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2}{\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2}\right| \leq \left|\frac{z_1 - z_2}{\overline{z_1} + z_2}\right|. \tag{2.16}$$

У (2.16) важи једнакост ако и само ако је $\Im z_1 = \Im z_2$.

Доказ. Нека је $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, гдје је $x_1, x_2 > 0$. Неједнакост (2.16) еквивалентна је са

$$|x_1 - x_2| \cdot |\overline{z}_1 + z_2| \leq |x_1 + x_2| \cdot |z_1 - z_2|$$

и отуда је

$$(x_1 - x_2)^2((x_1 + x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2) \leq (x_1 + x_2)^2((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2).$$

Посљедња неједнакост еквилентна је са

$$(y_1 - y_2)^2((x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2) \geq 0$$

а то је тачна неједнакост.

Очигледно, у (2.16) једнакост важи ако и само ако је $y_1 = y_2$. □

Сљедећа лема ће бити коришћена у теореми 2.10 и теореми 2.13.

Лема 2.3. *([21]) За све $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ из $\mathbb{S}$ важи*

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi(x_1 - x_2)}{4}}{\cos\frac{\pi(x_1 + x_2)}{4}}\right| \leq \left|\frac{\sin\frac{\pi(z_1 - z_2)}{4}}{\cos\frac{\pi(\overline{z_1} + z_2)}{4}}\right|. \tag{2.17}$$

У (2.17) важи једнакост ако и само је $\Im z_1 = \Im z_2$.

Доказ. Неједнакост (2.17) еквивалентна је са

$$\left|\sin\frac{\pi(x_1 - x_2)}{4}\right| \cdot \left|\cos\frac{\pi(\overline{z_1} + z_2)}{4}\right| \leq \left|\cos\frac{\pi(x_1 + x_2)}{4}\right| \cdot \left|\sin\frac{\pi(z_1 - z_2)}{4}\right|. \tag{2.18}$$

С обзиром да, за $z = x + iy$, важи

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y,$$
$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \cosh^2 y + \sin^2 x \sinh^2 y$$

неједнакост (2.18) еквивалентна је са

$$\begin{aligned}&\sin^2 \tfrac{\pi(x_1-x_2)}{4}\left(\cos^2 \tfrac{\pi(x_1+x_2)}{4}\cosh^2 \tfrac{\pi(-y_1+y_2)}{4} + \sin^2 \tfrac{\pi(x_1+x_2)}{4}\sinh^2 \tfrac{\pi(-y_1+y_2)}{4}\right)\\ \leq\ &\cos^2 \tfrac{\pi(x_1+x_2)}{4}\left(\sin^2 \tfrac{\pi(x_1-x_2)}{4}\cosh^2 \tfrac{\pi(y_1-y_2)}{4} + \cos^2 \tfrac{\pi(x_1-x_2)}{4}\sinh^2 \tfrac{\pi(y_1-y_2)}{4}\right).\end{aligned}$$

Посљедња неједнакост еквивалентна је са

$$\sinh^2 \frac{\pi(-y_1+y_2)}{4}\cos\frac{\pi\cdot x_1}{2}\cos\frac{\pi\cdot x_2}{2} \geq 0$$

а то је тачно јер за $x_i \in (-1,1), i \in \{1,2\}$ је $\cos\frac{\pi\cdot x_i}{2} \geq 0$.

Очигледно, у (2.17) једнакост важи ако и само ако је $y_1 = y_2$.

$\square$

Теорема 2.10. *([21]) Ако је* u *плурихармонијска функција из* $\mathbb{D}^n$ *у* $(-1,1)$, *онда је*

$$\rho_{\mathbb{S}}(u(z),u(w)) \leq k_{\mathbb{D}^n}(z,w), \qquad z,w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.19}$$

Доказ. Према ставу 1.1 постоји холоморфна функција $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$ и тада је на основу леме 2.3

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi(u(z)-u(w))}{4}}{\cos\frac{\pi(u(z)+u(w))}{4}}\right| \leq \left|\frac{\sin\frac{\pi(f(z)-f(w))}{4}}{\cos\frac{\pi(\overline{f(z)}+f(w))}{4}}\right|. \tag{2.20}$$

Како су $\frac{1+x}{1-x}, (x \neq 1)$, и $\ln x, (x > 0)$, монотоно растуће функције претходна неједнакост еквивалентна је са

$$\ln\frac{\left|\cos\frac{\pi(u(w)+u(z))}{4}\right| + \left|\sin\frac{\pi(u(z)-u(w))}{4}\right|}{\left|\cos\frac{\pi(u(w)+u(z))}{4}\right| - \left|\sin\frac{\pi(u(z)-u(w))}{4}\right|} \leq \ln\frac{\left|\cos\frac{\pi(f(w)+\overline{f(z)})}{4}\right| + \left|\sin\frac{\pi(f(z)-f(w))}{4}\right|}{\left|\cos\frac{\pi(f(w)+\overline{f(z)})}{4}\right| - \left|\sin\frac{\pi(f(z)-f(w))}{4}\right|}$$

односно

$$\rho_{\mathbb{S}}(u(z),u(w)) = \rho_{\mathbb{S}}(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Re} f(w)) \leq \rho_{\mathbb{S}}(f(z),f(w)). \tag{2.21}$$

Функција $g(z) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}f(z)$ је холоморфна функција из $\mathbb{D}^n$ у $\mathbb{D}$ и онда према дефиницији 2.3 и теореми 2.8, имамо

$$\rho_{\mathbb{S}}(f(z),f(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(g(z),g(w)) \leq k_{\mathbb{D}^n}(z,w), \qquad z,w \in \mathbb{D}^n.$$

што заједно са (2.21), даје (2.19).

$\square$

Ако је $u : \mathbb{D}^n \to (-1, 1)$ плурихармонијска функција, према (2.10), неједнакост (2.19) може бити записана у слиједећем облику

$$e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,w)} \leq \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}(1 - u(z)) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 - u(w)) \leq e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}, \qquad z, w \in \mathbb{D}^n;$$

и како је $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}(1 - u) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 + u)$, добијамо, за све z и w из $\mathbb{D}^n$:

$$e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,w)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 + u(w)) \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 + u(z)) \leq e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,w)} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}(1 + u(w)). \tag{2.22}$$

Претходна неједнакост је само другачији запис да се формулише теорема 2.10.

Посљедица 2.2. *([21]) Нека је $u : \mathbb{D}^n \to (-1, 1)$ плурихармонијска функција. Означимо $u(\mathbf{0}) = b$ и $a = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{4}$. Тада, за свако $z \in \mathbb{D}^n$ важи*

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,\mathbf{0})} \frac{1 + a}{1 - a} \right) - 1 \leq u(z) \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,\mathbf{0})} \frac{1 + a}{1 - a} \right) - 1. \tag{2.23}$$

Доказ. Увրштавајући $w = \mathbf{0}$ у неједнакост (2.22) добијамо (2.23). □

Аутори рада [59] доказали су сљедећу теорему:

Теорема 2.11. *([59], теорема 6) Нека је $u \in h(\mathbb{D}, (-1, 1)), u(0) = b$ и $a = \operatorname{tg} \frac{\pi b}{4}$. Тада, за свако $z \in \mathbb{D}$ важи*

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a - |z|}{1 - a|z|} \leq u(z) \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a + |z|}{1 + a|z|}. \tag{2.24}$$

Посљедица 2.2 представља вишедимензионално уопштење теореме 2.11. Заиста, за $n = 1$ из (2.23) добијамо

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \frac{1 + a}{1 - a} \right) - 1 \leq u(z) \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \frac{1 + a}{1 - a} \right) - 1$$

односно

$$\frac{4}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \frac{1 + a}{1 - a} \right) - \operatorname{arctg} 1 \right] \leq u(z) \leq \frac{4}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1 + |z|}{1 - |z|} \frac{1 + a}{1 - a} \right) - \operatorname{arctg} 1 \right]$$

и како је $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}$, након једноставног рачуна добијамо (2.24).

Теорема 2.12. *([21]) Ако је $u : \mathbb{D}^n \to (0, +\infty)$ плурихармонијска функција, онда важи*

$$\rho_{\mathbb{K}}(u(z), u(w)) \leq k_{\mathbb{D}^n}(z, w), \qquad z, w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.25}$$

Доказ. Као и у доказу теореме 2.10, постоји холоморфна функција $f \in H(\mathbb{D}^n, \mathbb{K})$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$. Стога је $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1} \in H(\mathbb{D}^n, \mathbb{D})$ и на основу дефиниције 2.3 и теореме 2.8 добијамо

$$\rho_{\mathbb{K}}(f(z), f(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(g(z), g(w)) \leq k_{\mathbb{D}^n}(z, w) \qquad z, w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.26}$$

Како су $f(z), f(w) \in \mathbb{K}$, примјеном леме 2.2 добијамо

$$\frac{|u(z) - u(w)|}{u(z) + u(w)} \leq \frac{|f(z) - f(w)|}{|\overline{f(z)} + f(w)|}$$

односно

$$\frac{u(z) + u(w) + |u(z) - u(w)|}{u(z) + u(w) - |u(z) - u(w)|} \leq \frac{|\overline{f(z)} + f(w)| + |f(z) - f(w)|}{|\overline{f(z)} + f(w)| - |f(z) - f(w)|}$$

и онда је

$$\ln \frac{u(z) + u(w) + |u(z) - u(w)|}{u(z) + u(w) - |u(z) - u(w)|} \leq \ln \frac{|\overline{f(z)} + f(w)| + |f(z) - f(w)|}{|\overline{f(z)} + f(w)| - |f(z) - f(w)|}.$$

Отуда слиједи

$$\rho_{\mathbb{K}}(u(z), u(w)) = \rho_{\mathbb{K}}(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Re} f(w)) \leq \rho_{\mathbb{K}}(f(z), f(w)),$$

што заједно са (2.26) даје (2.25).

□

Ако је u позитивна плурихармонијска функција дефинисана на јединичном полидиску $\mathbb{D}^n$, онда, на основу (2.8), неједнакост (2.25) може бити записана у слиједећем облику

$$e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,w)} \leq \frac{u(z)}{u(w)} \leq e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}, \qquad z, w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.27}$$

Сљедећи став је резултат типа Харнака и интересентно је да на основу процјена растојања за плурихармонијске функције које су дефинисане на $\mathbb{D}^n$ добијамо процјене за холоморфне функције дефинисане на $\mathbb{D}^n$.

Став 2.2. *([21]) Ако је f холоморфна функција на $\mathbb{D}^n$ и $0 < |f(z)| < 1$, онда је*

$$|f(w)|^{e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}} \leq |f(z)| \leq |f(w)|^{e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}}, \qquad z, w \in \mathbb{D}^n. \tag{2.28}$$

Доказ. Нека је $u(z) = \ln \frac{1}{|f(z)|}$. Како је $\frac{1}{f}$ холоморфна функција на $\mathbb{D}^n$ без нула на $\mathbb{D}^n$, онда је u плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(0, +\infty)$. Отуда, коришћењем (2.27) добијамо

$$\ln\left(\frac{1}{|f(w)|}\right)^{e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}} \leq \ln\frac{1}{|f(z)|} \leq \ln\left(\frac{1}{|f(w)|}\right)^{e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}}$$

односно

$$\ln|f(w)|^{e^{k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}} \leq \ln|f(z)| \leq \ln|f(w)|^{e^{-k_{\mathbb{D}^n}(z,w)}}$$

и како је e^x монотоно растућа функција добијамо (2.28).

□

Познато је да јединична лопта $\mathbb{B}^n$ и јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ нису бихоломорфно еквивалентни, те је од интереса дати процјене растојања за ограничену и за позитивну плурихармонијску функцију дефинисану на $\mathbb{B}^n$.

Теорема 2.13. *([81]) Ако је u плурихармонијска функција дефинисана на јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ са вриједностима у $(-1, 1)$, онда је*

$$\rho_{\mathbb{S}}(u(z), u(w)) \leq b_{\mathbb{B}^n}(z, w), \qquad z, w \in \mathbb{B}^n. \tag{2.29}$$

Доказ. Према ставу 1.1 постоји холоморфна функција $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$.

Како су $\frac{1+x}{1-x}$, $x \neq 1$, и $\ln x$, $x > 0$, монотоно растуће функције на основу леме 2.3 важи

$$\ln\frac{|\cos\frac{\pi(u(w)+u(z))}{4}| + |\sin\frac{\pi(u(z)-u(w))}{4}|}{|\cos\frac{\pi(u(w)+u(z))}{4}| - |\sin\frac{\pi(u(z)-u(w))}{4}|} \leq \ln\frac{|\cos\frac{\pi(f(w)+\overline{f(z)})}{4}| + |\sin\frac{\pi(f(z)-f(w))}{4}|}{|\cos\frac{\pi(f(w)+\overline{f(z)})}{4}| - |\sin\frac{\pi(f(z)-f(w))}{4}|}$$

односно у терминима Пуанкареовог растојања на $\mathbb{S}$ (видјети (2.9))

$$\rho_{\mathbb{S}}(u(z), u(w)) = \rho_{\mathbb{S}}(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Re} f(w)) \leq \rho_{\mathbb{S}}(f(z), f(w)). \tag{2.30}$$

Функција $g(z) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}f(z)$ је холоморфна функција из $\mathbb{B}^n$ у $\mathbb{D}$ и онда према дефиницији 2.3 и теореми 2.9, имамо

$$\rho_{\mathbb{S}}(f(z), f(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(g(z), g(w)) \leq b_{\mathbb{B}^n}(z, w), \qquad z, w \in \mathbb{B}^n,$$

што заједно са (2.30), даје (2.29).

□

Посљедица 2.3. *Ако је $u : \mathbb{B}^n \to (-1,1)$ плурихармонијска функција, $u(\mathbf{0}) = b$ и $a = \operatorname{tg}\frac{\pi b}{4}$, онда за свако $z \in \mathbb{B}^n$ имамо*

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(e^{-b_{\mathbb{B}^n}(z,\mathbf{0})}\frac{1+a}{1-a}\right) - 1 \le u(z) \le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(e^{b_{\mathbb{B}^n}(z,\mathbf{0})}\frac{1+a}{1-a}\right) - 1. \tag{2.31}$$

Доказ. На основу (2.10) и (2.29) је

$$e^{-b_{\mathbb{B}^n}(z,\mathbf{0})} \le \frac{1-a}{1+a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}(1-u(z)) \le e^{b_{\mathbb{B}^n}(z,\mathbf{0})},$$

односно

$$\frac{1+a}{1-a}e^{-b_{\mathbb{B}^n}(z,\mathbf{0})} \le \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1+u(z)) \le \frac{1+a}{1-a}e^{b_{\mathbb{B}^n}(z,\mathbf{0})}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1+u(w)). \tag{2.32}$$

□

Теорема 2.14. *([4]) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(0,+\infty)$, онда важи*

$$\rho_{\mathbb{K}}(u(z),u(w)) \le b_{\mathbb{B}^n}(z,w), \qquad z,w \in \mathbb{B}^n. \tag{2.33}$$

Доказ. Према ставу 1.1 постоји холоморфна функција $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{K}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$ и отуда је $g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1} \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{D})$.

На основу дефиниције 2.3 и теореме 2.9 важи

$$\rho_{\mathbb{K}}(f(z),f(w)) = \rho_{\mathbb{D}}(g(z),g(w)) \le b_{\mathbb{B}^n}(z,w), \qquad z,w \in \mathbb{B}^n. \tag{2.34}$$

Како су $\frac{1+x}{1-x}$, $0 < x < 1$, и $\ln x$, $x > 0$, монотоно растуће функције на основу леме 2.2 имамо

$$\rho_{\mathbb{K}}(u(z),u(w)) = \rho_{\mathbb{K}}(\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Re} f(w)) \le \rho_{\mathbb{K}}(f(z),f(w)),$$

што заједно са (2.34) даје (2.33). □

Сљедећа посљедица је резултат типа Харнака.

Посљедица 2.4. *([4]) Ако је f холоморфна функција на $\mathbb{B}^n$ и $0 < |f(z)| < 1$, онда важи*

$$|f(w)|^{e^{b_{\mathbb{B}^n}(z,w)}} \le |f(z)| \le |f(w)|^{e^{-b_{\mathbb{B}^n}(z,w)}}, \qquad z,w \in \mathbb{B}^n. \tag{2.35}$$

Доказ. Нека је $u(z) = \ln \frac{1}{|f(z)|}$. Функција u је плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(0, +\infty)$.

На основу (2.8) и (2.33) имамо

$$-b_{\mathbb{B}^n}(z, w) \le \ln \frac{\frac{1}{|f(z)|}}{\frac{1}{|f(w)|}} \le b_{\mathbb{B}^n}(z, w)$$

односно

$$\ln \left(\frac{1}{|f(w)|} \right)^{e^{-b_{\mathbb{B}^n}(z,w)}} \le \ln \frac{1}{|f(z)|} \le \ln \left(\frac{1}{|f(w)|} \right)^{e^{b_{\mathbb{B}^n}(z,w)}}$$

што даје (2.35). □

Напомена 2.4. *Уочимо да у ставу 2.2 и последици 2.4 умјесто* $0 < |f(z)| < 1$ *можемо писати* $0 < |f(z)| < M$*, гдје је* M *позитивна константа. Наравно у том случају је* $u(z) = \ln \frac{M}{|f(z)|}$.

2.3 Процјене градијента за плурихармонијске функције

И у овом потпоглављу су представљене процјене Шварц-Пиковог типа у којима су дате процјене обичног и $\mathcal{M}$-инваријантног реалног градијента ограничене и позитивне плурихармонијске функције чији је домен или јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ или је домен јединична лопта $\mathbb{B}^n$ у $\mathbb{C}^n$. Чен и Расила [14] су дали Шварц--Пикове процјене парцијалних извода вишег реда ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску. Процјена обичног градијента ограничене плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ из $\mathbb{C}^n$ дата је у [81]. У сљедеће двије теореме дате су процјене градијента ограничене и позитивне хармонијске функције дефинисане на јединичном диску у комплексној равни и како је свака плурихармонијска функција у $\mathbb{D}$ хармонијска, наводимо их без доказа. Теорема 2.17 и теорема 2.18 су вишедимензионална уопштења теореме 2.15 и теореме 2.16, респективно.

Сљедећа теорема представља побољшање теореме из [36].

Теорема 2.15. *([13]) Ако је* u *(реална) хармонијска функција из* $\mathbb{D}$ *у* $(-1, 1)$*, онда важи*

$$|\nabla u(z)| \le \frac{4}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} u(z)\right)}{1 - |z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Претходна неједнакост је најбоља могућа за свако $z \in \mathbb{D}$.

Теорема 2.16. *(Харнакова неједнакост) Ако је u хармонијска функција из $\mathbb{D}$ у $(0, +\infty)$, онда важи*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2u(z)}{1-|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Теорема 2.17. *([21]) Нека је u плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(-1, 1)$. Тада важи*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{4}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} u(z)\right)}{1-|z|_\infty^2}, \qquad z \in \mathbb{D}^n.$$

Претходна неједнакост је најбоља могућа за свако $z \in \mathbb{D}^n$.

Доказ. На основу става 1.1 постоји холоморфна функција $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$. Коришћењем Коши-Риманових једначина добијамо

$$|f'(z)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial z_i}(z)\right|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(z)\right|^2 + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial y_i}(z)\right|^2}$$

и стога је

$$|\nabla u(z)| = |f'(z)|. \tag{2.36}$$

Функција

$$g(z) = \operatorname{tg} \frac{\pi f(z)}{4}$$

је холоморфна функција из $\mathbb{D}^n$ у $\mathbb{D}$ и како је

$$|g'(\mathbf{0})| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial g}{\partial z_i}(\mathbf{0})\right|^2} \leq \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial g}{\partial z_i}(\mathbf{0})\right|$$

примјеном става 2.1 добијамо да је

$$|g'(\mathbf{0})| \leq 1 - |g(\mathbf{0})|^2. \tag{2.37}$$

Међутим

$$f'(z) = \frac{4}{\pi} \frac{g'(z)}{1+g^2(z)}$$

и тада је према (2.36) и (2.37)

$$|\nabla u(\mathbf{0})| = |f'(\mathbf{0})| = \frac{4}{\pi} \frac{|g'(\mathbf{0})|}{|1+g^2(\mathbf{0})|} \leq \frac{4}{\pi} \frac{1-|g(\mathbf{0})|^2}{|1+g^2(\mathbf{0})|}.$$

Уочимо да је $1-|g|^2 = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{|\cos\left(\frac{\pi}{4}f\right)|^2}$ и $|1+g^2| = \frac{1}{|\cos\left(\frac{\pi}{4}f\right)|^2}$, те је

$$|\nabla u(\mathbf{0})| \leq \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} u(\mathbf{0})\right), \tag{2.38}$$

што је процјена модула градијента функције u у нули.

Функција $v = u \circ \psi_z$ је такође плурихармонијска функција (став 1.2) из $\mathbb{D}^n$ у $(-1,1)$, гдје је ψ_z аутоморфизам полидиска дат изразом (1.14), те важи

$$|\nabla v(\mathbf{0})| = |\nabla(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})| \leq \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})\right) = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right). \tag{2.39}$$

Како је $\nabla v(\mathbf{0}) = \nabla u(z) \cdot \psi_z'(\mathbf{0})$ и $\psi_z'(z)\psi_z'(\mathbf{0}) = I$, имамо да је $\nabla u(z) = \nabla v(\mathbf{0})\psi_z'(z)$, па је

$$|\nabla u(z)| = |\nabla v(\mathbf{0})\psi_z'(z)| \leq |\nabla v(\mathbf{0})| \cdot \|\psi_z'(z)\|.$$

Отуда, и како је $\|\psi_z'(z)\| = \frac{1}{1-|z|_\infty^2}$ на основу (2.39) добијамо

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right)}{1-|z|_\infty^2}.$$

Неједнакост (2.38) јесте најбоља могућа у сљедећем смислу: За свако $z \in \mathbb{D}^n$ постоји плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(-1,1)$ таква да је $|\nabla u(\mathbf{0})| = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(\mathbf{0})\right)$. Дефинишемо функцију

$$u_0(z) = \frac{2}{\pi}\arg\frac{1+iz_1}{1-iz_1}.$$

Непосредно се показује да је u_0 плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(-1,1)$ и да важи

$$|\nabla u_0(\mathbf{0})| = \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u_0(\mathbf{0})\right).$$

Штавише, ако је $|z|_\infty = |z_1|$, онда за функцију u_0 важи $|\nabla u_0(z)| = \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u_0(z)\right)}{1-|z|_\infty^2}$. □

Посљедица 2.5. *([21]) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(-1,1)$, онда је*

$$|\tilde{\nabla} u(z)| \leq \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right), \qquad z \in \mathbb{D}^n.$$

Доказ. Како је $|\tilde{\nabla} u(\mathbf{0})| = |\nabla u(\mathbf{0})|$ на основу (2.38) важи

$$|\tilde{\nabla} u(\mathbf{0})| \leq \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(\mathbf{0})\right).$$

Међутим, $u \circ \psi_z$ је такође плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(-1,1)$ тако да важи

$$|\tilde{\nabla}(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})| \leq \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})\right) = \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right), \qquad z \in \mathbb{D}^n.$$

С обзиром да је $|\tilde{\nabla} u(z)| = |\tilde{\nabla}(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})|$ доказали смо тврђење. □

Теорема 2.18. *([21]) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(0,+\infty)$, онда важи*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2u(z)}{1-|z|_\infty^2}, \qquad z \in \mathbb{D}^n.$$

Претходна неједнакост је најбоља могућа за свако $z \in \mathbb{D}^n$.

Доказ. Према ставу 1.1 постоји холоморфна функција $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{K}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$. Функција

$$g(z) = \frac{f(z)-1}{f(z)+1}$$

је холоморфна функција из $\mathbb{D}^n$ у $\mathbb{D}$ и

$$f'(z) = \frac{2}{1-g(z)^2} g'(z),$$

па на основу (2.36) имамо

$$|\nabla u(\mathbf{0})| = |f'(\mathbf{0})| = \frac{2}{|1-g(\mathbf{0})|^2}|g'(\mathbf{0})|.$$

Отуда и како је, на основу ставу 2.1,

$$|g'(\mathbf{0})| \leq 1-|g(\mathbf{0})|^2$$

добијамо да је

$$|\nabla u(\mathbf{0})| \leq 2\frac{1-|g(\mathbf{0})|^2}{|1-g(\mathbf{0})|^2}.$$

Како је $1-|g|^2 = \frac{4u}{|f+1|^2}$ и $|1-g|^2 = \frac{4}{|f+1|^2}$, онда важи

$$|\nabla u(\mathbf{0})| \leq 2u(\mathbf{0}). \tag{2.40}$$

За плурихармонијску функцију $v = u \circ \psi_z$, гдје је ψ_z аутоморфизам полидиска дат изразом (1.14), као и у доказу теореме 2.17, важи

$$|\nabla v(\mathbf{0})| = |\nabla(u\circ\psi_z)(\mathbf{0})| \leq 2(u\circ\psi_z)(\mathbf{0}) = 2u(z) \tag{2.41}$$

и стога је

$$|\nabla u(z)| = |\nabla v(\mathbf{0})\psi_z'(z)| \leq |\nabla v(\mathbf{0})| \cdot \|\psi_z'(z)\| \leq \frac{2u(z)}{1-|z|_\infty^2}.$$

Неједнакост (2.40) јесте најбоља могућа у слиједећем смислу: За свако $z \in \mathbb{D}^n$ постоји плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(0,+\infty)$ таква да је $|\nabla u(\mathbf{0})| = 2u(\mathbf{0})$. Дефинишемо функцију

$$u_0(z) = \frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1|^2}.$$

Непосредно се показује да је u_0 плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(0,+\infty)$ и да важи

$$|\nabla u_0(\mathbf{0})| = 2 = 2u_0(\mathbf{0}).$$

Такође, ако је $|z|_\infty = |z_1|$, онда за функцију u_0 важи $|\nabla u_0(z)| = \frac{2u_0(z)}{1-|z|_\infty^2}$.

□

У нули, на основу претходне теорема, имамо $|\tilde{\nabla} u(\mathbf{0})| \le 2u(\mathbf{0})$ и онда је

$$|\tilde{\nabla}(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})| \le 2(u \circ \psi_z)(\mathbf{0}) = 2u(z).$$

Како је $|\tilde{\nabla} u(z)| = |\tilde{\nabla}(u \circ \psi_z)(\mathbf{0})|$ доказана је сљедећа посљедица.

Посљедица 2.6. *Нека је u плурихармонијска функција из $\mathbb{D}^n$ у $(0,+\infty)$. Тада важи*

$$|\tilde{\nabla} u(z)| \le 2u(z), \qquad z \in \mathbb{D}^n.$$

Теорема 2.19. *([81], теорема 1.5.) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$, онда важи*

$$|\nabla u(z)| \le \frac{4}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} u(z)\right)}{1-|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{B}^n.$$

Доказ. Докажимо неједнакост за $z = 0$, тј. да је

$$|\nabla u(\mathbf{0})| \le \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} u(\mathbf{0})\right).$$

На основу става 1.1 постоји холоморфна функција $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$ и према (2.36) је $|\nabla u(z)| = |f'(z)|$. Функција

$$g(z) = \operatorname{tg} \frac{\pi f(z)}{4}$$

је холоморфна функција из $\mathbb{B}^n$ у $\mathbb{D}$ па је функција $g_\xi(\lambda) = g(\lambda\xi)$, гдје је $\xi \in \mathbb{C}^n$ и $|\xi| = 1$ холоморфна функција из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$. На основу Шварц-Пикове леме (теорема 2.2) важи

$$|g'(\mathbf{0})\xi| \le 1 - |g(\mathbf{0})|^2$$

и како је претходна неједнакост тачна за свако $|\xi| = 1$, онда важи

$$|g'(\mathbf{0})| \le 1 - |g(\mathbf{0})|^2. \tag{2.42}$$

Дакле,

$$|\nabla u(\mathbf{0})| = |f'(\mathbf{0})| = \frac{4}{\pi} \frac{1}{|1+g^2(\mathbf{0})|} |g'(\mathbf{0})| \le \frac{4}{\pi} \frac{1-|g(\mathbf{0})|^2}{|1+g^2(\mathbf{0})|}.$$

и с обзиром да је $1-|g|^2=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u\right)}{|\cos\left(\frac{\pi}{4}f\right)|^2}$ и $|1+g^2|=\frac{1}{|\cos\left(\frac{\pi}{4}f\right)|^2}$, онда важи

$$|\nabla u(\mathbf{0})|\leq\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(\mathbf{0})\right). \tag{2.43}$$

Функција $v=u\circ\phi_z$ је такође плурихармонијска функција (став 1.2) из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$, гдје је ϕ_z аутоморфизам јединичне лопте $\mathbb{B}^n$ дат изразом (1.15) па важи

$$|\nabla v(\mathbf{0})|=|\nabla(u\circ\phi_z)(\mathbf{0})|\leq\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(u\circ\phi_z)(\mathbf{0})\right)=\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right). \tag{2.44}$$

Како је $\nabla v(\mathbf{0})=\nabla u(z)\cdot\phi_z'(\mathbf{0})$ и $\phi_z'(z)\phi_z'(\mathbf{0})=I$, онда је $\nabla u(z)=\nabla v(\mathbf{0})\phi_z'(z)$. Отуда је

$$|\nabla u(z)|=|\nabla v(\mathbf{0})\phi_z'(z)|\leq|\nabla v(\mathbf{0})|\cdot\|\phi_z'(z)\|$$

и како је $\|\phi_z'(z)\|=\frac{1}{1-|z|^2}$ на основу (2.44) добијамо

$$|\nabla u(z)|\leq\frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right)}{1-|z|^2}.$$

Неједнакост (2.43) јесте најбоља могућа у сљедећем смислу: За свако $z\in\mathbb{B}^n$ постоји плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$ таква да је $|\nabla u(\mathbf{0})|=\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(\mathbf{0})\right)$. Дефинишимо функцију

$$u_0(z)=\frac{2}{\pi}\arg\frac{1+iz_1}{1-iz_1}.$$

Непосредно се показује да је u_0 плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$ и да важи

$$|\nabla u_0(\mathbf{0})|=\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u_0(\mathbf{0})\right).$$

□

Будући да је $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\leq 1-|x|^2$ за $-1\leq x\leq 1$, претходна теорема побољшава слиједећи резултат:

Теорема 2.20. *([35], теорема 2.3) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$, онда важи*

$$|\nabla u(z)|\leq\frac{4}{\pi}\frac{1-|u(z)|^2}{1-|z|^2},\qquad z\in\mathbb{B}^n.$$

Посљедица 2.7. *Нека је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$. Тада је*

$$|\tilde{\nabla}u(z)|\leq\frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}u(z)\right),\qquad z\in\mathbb{B}^n.$$

Доказ. Како је $|\tilde{\nabla} u(\mathbf{0})| = |\nabla u(\mathbf{0})|$ на основу (2.43) важи

$$|\tilde{\nabla} u(\mathbf{0})| \leq \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} u(\mathbf{0})\right).$$

Међутим $u \circ \phi_z$ је такође плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$ тако да важи

$$|\tilde{\nabla}(u \circ \phi_z)(\mathbf{0})| \leq \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(u \circ \phi_z)(\mathbf{0})\right) = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} u(z)\right), \qquad z \in \mathbb{B}^n.$$

С обзиром да је $|\tilde{\nabla} u(z)| = |\tilde{\nabla}(u \circ \phi_z)(\mathbf{0})|$ доказ је завршен. $\square$

Посљедица 2.7 поправља сљедећи резултат из [60].

Посљедица 2.8. *([60], теорема 1.4.) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(-1,1)$, онда је*

$$|\tilde{\nabla} u(z)| \leq \frac{4}{\pi}(1 - |u(z)|^2), \qquad z \in \mathbb{B}^n.$$

Теорема 2.21. *([4]) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(0, +\infty)$, онда важи*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2u(z)}{1 - |z|^2}, \qquad z \in \mathbb{B}^n.$$

Доказ. Као и у доказу теореме 2.19, постоји холоморфна функција $f \in H(\mathbb{B}^n, \mathbb{K})$ таква да је $u = \operatorname{Re} f$ и на основу (2.36) је $|\nabla u(z)| = |f'(z)|$. Функција

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

је холоморфна функција из $\mathbb{B}^n$ у $\mathbb{D}$ и на основу (2.42) је

$$|f'(\mathbf{0})| = \frac{2}{|1 - g(\mathbf{0})|^2} |g'(\mathbf{0})| \leq 2 \frac{1 - |g(\mathbf{0})|^2}{|1 - g(\mathbf{0})|^2}.$$

Како је $1 - |g|^2 = \frac{4u}{|f+1|^2}$ и $|1 - g|^2 = \frac{4}{|f+1|^2}$, онда је

$$|\nabla u(\mathbf{0})| \leq 2u(\mathbf{0}).$$

За плурихармонијску функцију $v = u \circ \phi_z$, при чему је је ϕ_z аутоморфизам јединичне лопте дат изразом (1.15), као и у доказу теореме 2.19, важи

$$|\nabla v(\mathbf{0})| = |\nabla(u \circ \phi_z)(\mathbf{0})| \leq 2(u \circ \phi_z)(\mathbf{0}) = 2u(z). \tag{2.45}$$

и стога је

$$|\nabla u(z)| = |\nabla v(\mathbf{0}) \phi_z'(z)| \leq |\nabla v(\mathbf{0})| \cdot \|\phi_z'(z)\| \leq \frac{2u(z)}{1 - |z|^2}.$$

$\square$

У нули, на основу претходне теореме важи $|\tilde{\nabla} u(\mathbf{0})| \leq 2u(\mathbf{0})$ и онда је

$$|\tilde{\nabla}(u \circ \phi_z)(\mathbf{0})| \leq 2(u \circ \phi_z)(\mathbf{0}) = 2u(z).$$

Како је $|\tilde{\nabla} u(z)| = |\tilde{\nabla}(u \circ \phi_z)(\mathbf{0})|$ доказана је сљедећа посљедица.

Посљедица 2.9. *([4]) Ако је u плурихармонијска функција из $\mathbb{B}^n$ у $(0, +\infty)$, онда важи*

$$|\tilde{\nabla} u(z)| \leq 2u(z), \qquad z \in \mathbb{B}^n.$$

3 Хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције

3.1 $\mathcal{M}$-хармонијске функције

У претходном потпоглављу проучавали смо плурихармонијске функције на $\mathbb{D}^n$ и $\mathbb{B}^n$ у односу на инваријантни реални градијент, а сада ћемо посматрати хармонијске функције у односу на инваријантни лапласијан. Обичан лапласијан је униформно елиптичан на $\mathbb{B}^n$, али инваријантни лапласијан је дегенеративан на граници $\partial\mathbb{B}^n$. У наредна два потпоглавља интересује нас која својства имају функције, дефинисане на $\mathbb{D}^n$ или на $\mathbb{B}^n$, које припадају истовремено двјема класама. Рудин [71] је доказао да ако је функција хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{B}^n$ да је онда она плурихармонијска.

Дефиниција 3.1. *Нека је Ω отворен подскуп од $\mathbb{B}^n, f \in C^2(\Omega)$ и $a \in \Omega$. Дефинишемо*

$$(\tilde{\Delta} f)(a) = \Delta(f \circ \phi_a)(\mathbf{0}),$$

гдје је $\phi_a \in Aut(\mathbb{B}^n)$ дат изразом (1.15).

Оператор $\tilde{\Delta}$ називамо инваријантни лапласијан јер комутира са групом аутоморфизама:

Теорема 3.1. *Ако је $f \in C^2(\Omega)$, гдје је $\Omega \subset \mathbb{B}^n$ и $\phi \in Aut(\mathbb{B}^n)$, онда је*

$$\tilde{\Delta}(f \circ \phi) = (\tilde{\Delta} f) \circ \phi.$$

Доказ. Нека је $z \in \phi^{-1}(\Omega)$ произвољна тачка и нека је $w = \phi(z)$. Тада је $(\phi_w \circ \phi \circ \phi_z)(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, па је према теореми 1.6, $\phi_w \circ \phi \circ \phi_z$ линеарна трансформација. С обзиром да су једине линеарне трансформације на $\mathbb{C}^n$ које чувају $\mathbb{B}^n$ унитарне трансформације, онда постоји унитарна трансформација U таква да је

$\phi_w \circ \phi \circ \phi_z = U$ и отуда је $\phi \circ \phi_z = \phi_w \circ U$. Према томе

$$\tilde{\Delta}(f \circ \phi)(z) = \Delta(f \circ \phi \circ \phi_z)(\mathbf{0}) = \Delta(f \circ \phi_w \circ U)(\mathbf{0}).$$

Ако је g класе C^2 у околини нуле, онда је $\Delta g(0) = \Delta(g \circ U)(0)$ за свако $U \in U(n)$ па је

$$\tilde{\Delta}(f \circ \phi)(z) = \Delta(f \circ \phi_w)(\mathbf{0}) = (\tilde{\Delta} f)(w) = (\tilde{\Delta} f)(\phi(z)).$$

□

Напомена 3.1. *Аналоīно дефинишемо инваријанши Лайласијан на $\mathbb{D}^n$,*

$$(\tilde{\Delta} f)(a) = \Delta(f \circ \psi_a)(0),$$

īдје је $\psi_a \in Aut(\mathbb{D}^n)$ даш изразом (1.14).

Теорема 3.2. *Нека је $u \in C^2(\mathbb{B}^n)$ и $a \in \mathbb{B}^n$. Инваријаншни Лайласијан на јединичној лойши у $\mathbb{C}^n$ даш је изразом*

$$(\tilde{\Delta} u)(a) = 4(1 - |a|^2) \sum_{i,k=1}^{n} (\delta_{ik} - \overline{a}_i a_k) \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_i} \partial z_k}(a), \tag{3.1}$$

īдје је $\delta_{ik} = 0$ ако је $i \neq k$ и $\delta_{ii} = 1$.

Доказ. Нека је $u \circ \phi_a = h = h(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$. С обзиром да су функције $\phi_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ холоморфне, на основу извода сложене функције за свако $j, 1 \leq j \leq n$ и $z \in \mathbb{B}^n$, имамо,

$$\frac{\partial}{\partial z_j}(u \circ \phi_a)(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial w_i}(w) \frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}(u \circ \phi_a)(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{w_i}}(w) \overline{\frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(z)},$$

гдје је $\phi_a(z) = w$, и тада је

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \overline{z_j} \partial z_j}(z) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{w_i} \partial w_k}(w) \overline{\frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(z)} \frac{\partial \phi_k}{\partial z_j}(z). \tag{3.2}$$

те добијамо

$$(\Delta h)(z) = 4 \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{w_i} \partial w_k}(w) \sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(z)} \frac{\partial \phi_k}{\partial z_j}(z). \tag{3.3}$$

Отуда је

$$(\Delta h)(\mathbf{0}) = 4 \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{w_i} \partial w_k}(a) \sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(\mathbf{0})} \frac{\partial \phi_k}{\partial z_j}(\mathbf{0}). \tag{3.4}$$

Примјетимо да $\phi_a(z)$ може бити записано у облику

$$
\begin{aligned}
\phi_a(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle z, a\rangle^k (a - P_a z - s_a(z - P_a z)) \\
&= \left(1 + \langle z, a\rangle + \sum_{k=2}^{\infty} \langle z, a\rangle^k\right)\left(a - s_a z - \frac{\langle z, a\rangle a}{s_a + 1}\right) \\
&= a - s_a z + \frac{s_a}{s_a+1}\langle z, a\rangle a - \langle z, a\rangle s_a z - \frac{\langle z, a\rangle^2 a}{s_a + 1} + \sum_{k=2}^{\infty}\langle z, a\rangle^k \left(a - s_a z - \frac{\langle z, a\rangle a}{s_a+1}\right).
\end{aligned}
$$

Означимо ради краћег записа ϕ_a са ϕ. Имамо

$$
\frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(\mathbf{0}) = s_a\left(-\delta_{ij} + \frac{1}{s_a+1} a_i \overline{a_j}\right)
$$

и

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial \phi_i}{\partial z_j}(\mathbf{0})}\frac{\partial \phi_k}{\partial z_j}(\mathbf{0}) &= s_a^2 \sum_{j=1}^{n}\left(-\delta_{ij} + \frac{1}{s_a+1}\overline{a_i} a_j\right)\left(-\delta_{kj} + \frac{1}{s_a+1}\overline{a_j} a_k\right) \\
&= s_a^2\left(\delta_{ik} - \frac{1}{s_a+1}\sum_{j=1}^{n}(\delta_{kj}\overline{a_i}a_j + \delta_{ij}\overline{a_j}a_k) + \left(\frac{2}{1+s_a} - 1\right)\overline{a_i}a_k\right) \\
&= s_a^2(\delta_{ik} - \overline{a_i}a_k),
\end{aligned}
$$

односно

$$
(\tilde{\Delta} u)(a) = (\Delta h)(\mathbf{0}) = 4(1 - |a|^2)\sum_{i,k=1}^{n}(\delta_{ik} - \overline{a_i}a_k)\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{w_i}\partial w_k}(a).
$$

□

Кажемо да је функција $u \in C^2(\mathbb{B}^n)$ $\mathcal{M}$-хармонијска, ако је $\tilde{\Delta} u = 0$ на $\mathbb{B}^n$. Простор свих $\mathcal{M}$-хармонијских функција на $\mathbb{B}^n$ означен је са $\mathcal{M}h(\mathbb{B}^n)$.

Теорема 3.3. *Ако је $u \in C^2(\mathbb{D}^n)$ и $a \in \mathbb{D}^n$, инваријантни Лапласијан на јединичном полидиску у $\mathbb{C}^n$ дат је изразом*

$$
(\tilde{\Delta} u)(z) = 4\sum_{j=1}^{n}(1 - |z_j|^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} = \sum_{j=1}^{n}(1 - |z_j|^2)^2 \Delta_j u(z). \tag{3.5}
$$

Доказ. Нека је $h = u \circ \psi_a$, при чему је $\psi_a = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ дат са (1.14). Уврштавајући

$$
\frac{\partial \psi_i}{\partial z_j}(\mathbf{0}) = \delta_{ij}(-1 + |a_j|^2)
$$

у формулу (3.4), која очито важи и у случају области $\mathbb{D}^n$, добијамо жељену формулу за инваријантни Лапласијан на $\mathbb{D}^n$. □

За функцију $u \in C^2(\mathbb{D}^n)$ кажемо да је $\mathcal{M}$-хармонијска, ако је $\tilde{\Delta} u = 0$ на $\mathbb{D}^n$. Простор свих $\mathcal{M}$-хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$ означен је са $\mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$.

Ако је $n = 1$, онда је $(\tilde{\Delta} u)(z) = (1 - |z|^2)^2 (\Delta u)(z)$, за свако $z \in \mathbb{D}$ тако да је функција $\mathcal{M}$-хармонијска ако и само ако је хармонијска на $\mathbb{D}$. Ако је $n > 1$ то не мора да важи (видјети примјер 3.1 у потпоглављу 3.3.). Нека су u и u^2 хармонијске функције на јединичном диску у комплексној равни. Како је $\Delta u^2 = 2u\Delta u + 8\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$, тада је или u холоморфна функција или је $\overline{u}$ холоморфна функција. У наредним потпоглављима ћемо посматрати функције које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције на јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ или на јединичном полидиску $\mathbb{D}^n$ у $\mathbb{C}^n$.

Нека је са P_k означен простор свих хомогених полинома по промјенљивим $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ (или, еквивалентно по промјенљивим $z_1, \overline{z_1}, \ldots, z_n, \overline{z_n}$), степена k, $k \geq 0$ и нека је $P_{-1} = P_{-2} = 0$. Нека је Ω или јединични полидиск $\mathbb{D}^n$ или јединична лопта $\mathbb{B}^n$. Ако је u реално аналитичка функција на Ω, онда по самој дефиницији у околини нуле u може бити записана у облику

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z), \qquad z \in \mathbb{D}^n, \quad (\text{или} \quad z \in \mathbb{B}^n), \quad |z| < r, \tag{3.6}$$

гдје $u_k \in P_k$, $k \geq 0$. Ред конвергира равномјерно на сваком компактном подскупу од $\{z : |z| < r\}$ и дозвољено је ред диференцирати члан по члан произвољан број пута. Свака хармонијска функција је реално аналитичка (видјети [6] теорема 1.2.8).

Џон [33] је доказао да ако је је L елиптички диференцијални оператор са реално аналитичким коефицијентима, онда су сва рјешења u, једначине $Lu = 0$, реално аналитичка.

Теорема 3.4. *([70] Свака $\mathcal{M}$-хармонијска функција дефинисана на $\mathbb{B}^n$ је реално аналитичка на $\mathbb{B}^n$.*

Доказ. Нека је, за свако $j, 1 \leq j \leq n$, $\frac{\partial}{\partial x_j} = v_j$, $\frac{\partial}{\partial y_j} = \omega_j, w_j = v_j + i\omega_j$. Тада $(\tilde{\Delta} u)(z)$, на основу (3.1), можемо записати у облику

$$(\tilde{\Delta} u)(z) = p(z, D)u,$$

гдје је

$$\begin{aligned} p(z, w) &= (1 - |z|^2) \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w_i} - \sum_{j,k=1} \overline{z_j} z_k w_j \overline{w_k} \right) \\ &= (1 - |z|^2)(|w|^2 - |\langle z, w \rangle|^2). \end{aligned}$$

Ово је полином по промјенљивим $w_j, \overline{w_k}$ чији су коефицијенти реално аналитичке функције које зависе од z. За свако z из $\mathbb{B}^n$, важи $|w|^2 - |\langle z, w\rangle|^2 \geq (1-|z|^2)|w|^2$. Према томе $p(z, D)$ је елиптички диференцијални оператор, па према [33] слиједи тврђење. □

Напомена 3.2. *Свака $\mathcal{M}$-хармонијска функција дефинисана на $\mathbb{D}^n$ је реално аналитичка на $\mathbb{D}^n$. Заиста, коришћењем ознака из претходне теореме и на основу (3.5), $\tilde{\Delta}u$ можемо записати на слиједећи начин*

$$(\tilde{\Delta}u)(z) = p(z, D)u,$$

гдје је $p(z, w) = \sum_{j=1}^{n}(1-|z_j|^2)^2 w_j \overline{w_j}$ полином по промјенљивој w_j чији су коефицијенти реално аналитичке функције по z.

Погодно је користити мулти-индексну нотацију прилагођену за наше потребе. За ненегативне цијеле бројеве $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ ставимо $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Називамо (p, q) *чисто* ако је $p \cdot q = \mathbf{0}$, у супротном (p, q) називамо *миксирано*. Примјетимо да је (p, q) *чисто* ако и само је $\langle p, q\rangle = \mathbf{0}$.
Ред мултииндекса (p, q) је $|(p, q)| = |p| + |q| = \sum_{j=1}^{n} p_j + q_j$. Нека је $p + 1_j = (p_1, \ldots, p_j+1, \ldots, p_n)$, $q+1_j = (q_1, \ldots, q_j+1, \ldots, q_n)$, и $p-1_j = (p_1, \ldots, p_j-1, \ldots, p_n)$, $q - 1_j = (q_1, \ldots, q_j - 1, \ldots, q_n)$. Овдје тумачимо $p_j - 1$ као нулу, ако је $p_j = 0$, слично томе и $q_j - 1$ тумачимо као нулу ако је $q_j = 0$. Дефинишемо мономе $z^p \bar{z}^q$ степена $|(p, q)|$ са

$$z^p \bar{z}^q = z_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n} \bar{z}_1^{q_1} \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n^{q_n}.$$

Уочимо да је $z^p \bar{z}^q$ холоморфна функција ако и само ако је $q = \mathbf{0}$. Користећи претходну нотацију функције u_k и u, дате изразом (3.6), можемо записати у облику

$$u_k(z) = \sum_{|(p,q)|=k} c_{p,q} z^p \bar{z}^q, \qquad u(z) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0^n\times\mathbb{N}_0^n} c_{p,q} z^p \bar{z}^q. \tag{3.7}$$

Тада је за свако $1 \leq i, j \leq n$,

$$\frac{\partial u}{\partial z_j} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0^n\times\mathbb{N}_0^n} c_{p,q} p_j z_1^{p_1} \cdot \ldots z_j^{p_j-1} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n} \bar{z}^q$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_i} \partial z_j} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0^n\times\mathbb{N}_0^n} c_{p,q} p_j q_i z_1^{p_1} \cdot \ldots z_j^{p_j-1} \cdot \ldots \cdot z_n^{p_n} \overline{z_1}^{q_1} \cdot \ldots \overline{z_i}^{q_i-1} \cdot \ldots \cdot \overline{z_n}^{q_n}. \tag{3.8}$$

Напомена 3.3. *Ове ознаке ћемо користити и у поглављу 4. У наставку је коришћен краћи запис (p, q) умјесто $(p, q) \in \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{N}_0^n$.*

3.2 Хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције на $\mathbb{B}^n$

Теорема 3.5. *([71]) Функција дефинисана на јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$ је плурихармонијска ако и само ако је хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{B}^n$.*

Доказ. Нека је u хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{B}^n$. Како је свака хармонијска функција реално аналитичка, функцију u можемо записати у облику

$$u(z) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}_0^n\times\mathbb{N}_0^n} c_{p,q} z^p \overline{z}^q.$$

Дефинишемо оператор L са

$$Lu(z) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z_i} z_j \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_i} z_j}(z). \tag{3.9}$$

Примјетимо да оператор L пресликава простор P_k свих хомогених полинома реда k у себе. Очигледно је да, за $a \in \mathbb{B}^n$, на основу (3.1), важи

$$\tilde{\Delta} u(a) = (1-|a|^2)(\Delta u(a) - 4Lu(a)). \tag{3.10}$$

На основу (3.8) је

$$Lu(z) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{(p,q)} c_{p,q} p_j q_i z^p \overline{z}^q = \sum_{(p,q)} c_{p,q} z^p \overline{z}^q \sum_{i,j=1}^{n} p_j q_i = \sum_{(p,q)} |p||q| c_{p,q} z^p \overline{z}^q.$$

Како је $\Delta u = 0$ и $\tilde{\Delta} u = 0$, на основу (3.10) добијамо да је $Lu = 0$ на $\mathbb{B}^n$. Отуда је $|p||q|c_{p,q} = 0$ за све p, q. Дакле $c_{p,q} = 0$ осим ако је $p = \mathbf{0}$ или $q = \mathbf{0}$. Према томе имамо да је

$$u(z) = \sum_{(p,0)} c_{p,0} z^p + \sum_{(0,q)} c_{0,q} \overline{z}^q,$$

односно $u = f + \bar{g}$, гдје су f и g холоморфне функције на $\mathbb{B}^n$, што значи да је u плурихармонијска функција на $\mathbb{B}^n$.

Очигледно је да за сваку плурихармонијску функцију, дефинисану на $\mathbb{B}^n$, важи $\Delta u = \tilde{\Delta} u = 0$. □

Ако је $\xi \in \partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}, \lambda \in \mathbb{D}$ и $z = \lambda\xi$, онда је за функцију $u : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ на основу (1.6)

$$4 \sum_{i,k=1}^{n} \overline{z_i} z_k \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_i} \partial z_k}(z) = \lambda\overline{\lambda}(\Delta u_\xi)(\lambda).$$

Отуда и на основу теореме 1.3, слиједи доказ теореме 3.5 на други начин ([19] Теорема 3.3.).

Теорема 3.6. *([2]) Нека су f и g неконстантне холоморфне функције на $\mathbb{B}^n$ и нека је $f\bar{g}$ $\mathcal{M}$-хармонијска.*

1. *Ако је $n = 2$, ово је немогуће.*
2. *Ако је $n \geq 3$, онда постоје:*
   (а) цијели број $m, 2 \leq m \leq n-1$,
   (б) унитарна трансформација $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,
   (в) цијеле функције $\varphi : \mathbb{C}^{m-1} \to \mathbb{C}$ и $\psi : \mathbb{C}^{n-m} \to \mathbb{C}$, такве да је

$$f(Uz) = \varphi\left(\frac{z_2}{1-z_1}, \ldots, \frac{z_m}{1-z_1}\right), \quad g(Uz) = \psi\left(\frac{z_{m+1}}{1-z_1}, \ldots, \frac{z_n}{1-z_1}\right). \tag{3.11}$$

Штавише, $f(\mathbb{B}^n) = \varphi(\mathbb{C}^{m-1}), g(\mathbb{B}^n) = \psi(\mathbb{C}^{n-m})$, и $(f\bar{g})(\mathbb{B}^n) = \mathbb{C}$.

Обратно, ако за функције f и g важи (3.11), онда је $\tilde{\Delta}(f\bar{g}) = 0$.

Прије него што прикажемо доказ теореме 3.6, навешћемо без доказа сљедећу теорему (теорема 2. из [2]), која је значајна за доказ теореме 3.6.

Теорема 3.7. *([2]) Нека су n и p позитивни цијели бројеви, и претпоставимо да су F и G холоморфна пресликавања из повезаног отвореног скупа $\Omega \subset \mathbb{C}^p$ у $\mathbb{C}^n$ тако да је*

$$\langle F(z), G(z)\rangle = 1 \quad \text{за свако} \quad z \in \Omega.$$

Тада постоји цијели број $m, 1 \leq m \leq n$, и постоји ортонормирана база $\{b_1, \ldots, b_n\}$ простора $\mathbb{C}^n$, тако да је:

(а) $\langle F, b_j\rangle = 0$, ако је $m+1 \leq j \leq n$,

(б) $\langle G, b_j\rangle = 0$, ако је $2 \leq j \leq m$,

(в) $\langle F, b_1\rangle$ и $\langle G, b_1\rangle$ су позитивне константе, $\langle F, b_1\rangle \langle G, b_1\rangle = 1$.

Штавише, ако F и G нису истовремено константне функције, онда је $m \geq 2$ и $n \geq 3$.

Доказ теореме 3.6. Како је $f\bar{g}$ $\mathcal{M}$-хармонијска функција, на основу (3.1) имамо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)\overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}(z)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}}(z)\sum_{k=1} z_k\frac{\partial f}{\partial z_k}(z), \tag{3.12}$$

односно

$$\langle \nabla f, \nabla g\rangle = \mathcal{R}f\overline{\mathcal{R}g}.$$

Ако је $\mathcal{R}f \equiv 0$ на $\mathbb{B}^n$, онда је f константна функција на сваком диску $l \cap \mathbb{B}^n$, гдје је l произвољна комплексна права кроз центар отворене јединичне лопте $\mathbb{B}^n$ и отуда је f константна функција на $\mathbb{B}^n$, што је у супротности са претпоставком. Према томе $\mathcal{R}f \not\equiv 0$ и такође је $\mathcal{R}g \not\equiv 0$, те је

$$\left\langle \frac{\nabla f}{\mathcal{R}f}, \frac{\nabla g}{\mathcal{R}g}\right\rangle = 1.$$

Нека је $\Omega = \{z \in \mathbb{B}^n : (\mathcal{R}f)(z) \neq 0, (\mathcal{R}g)(z) \neq 0\}$. На основу теореме 3.7, узимајући да је $p = n$, постоји: $m, 1 \leq m \leq n$, ортонормирана база $\{v_1, \dots, v_n\}$ векторског прстора $\mathbb{C}^n$ и позитивна константа $c > 0$, тако да је:

$$\begin{array}{l} \langle \nabla f(z), v_j\rangle = 0, \quad \text{ако је} \quad m+1 \leq j \leq n, \\ \langle \nabla g(z), v_j\rangle = 0, \quad \text{ако је} \quad 2 \leq j \leq m, \end{array} \tag{3.13}$$

и

$$\begin{array}{l} c\,\langle \nabla f(z), v_1\rangle = (\mathcal{R}f)(z) \\ \frac{1}{c}\,\langle \nabla g(z), v_1\rangle = (\mathcal{R}g)(z) \end{array} \tag{3.14}$$

за свако $z \in \Omega$. С обзиром да су градијент и радијални извод холоморфне функције на $\mathbb{B}^n$ такође холоморфни на $\mathbb{B}^n$ (3.13) и (3.14) важе за свако $z \in \mathbb{B}^n$.

Матрица прелаза $U = [u_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$ са стандардне ортонормиране базе $\{e_1, \dots, e_n\}$ векторског простора $\mathbb{C}^n$ на ортонормирану базу $\{v_1, \dots, v_n\}$ је унитарна, те је

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}e_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_{ij}e_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

и ако је $z = (z_1, \dots, z_n)$ и $Uz = (w_1, \dots, w_n)$, онда је

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}z_j \quad (1 \leq i \leq n).$$

За $z \in \mathbb{B}^n$ нека је

$$F(z) = f(Uz), \quad G(z) = g(Uz).$$

На основу извода сложене функције, за свако $k, 1 \leq k \leq n$, је

$$\frac{\partial F}{\partial z_k}(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial w_i}(Uz) u_{ik} = \langle \nabla f(Uz), v_k \rangle$$

и

$$\frac{\partial G}{\partial z_k}(z) = \langle \nabla g(Uz), v_k \rangle$$

и отуда је

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}F)(z) &= \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial F}{\partial z_j}(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} z_j \langle \nabla f(Uz), v_j \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} z_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial w_i}(Uz) u_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial w_i}(Uz) w_i \\
&= (\mathcal{R}f)(Uz).
\end{aligned}$$

Аналогна формула важи и за G, и тада из (3.13) добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial F}{\partial z_j}(z) = 0, \quad \text{ако је} \quad m+1 \leq j \leq n, \\
&\tfrac{\partial G}{\partial z_j}(z) = 0, \quad \text{ако је} \quad 2 \leq j \leq m,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

а из (3.14) да је

$$c \frac{\partial F}{\partial z_1}(z) = (\mathcal{R}F)(z), \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial G}{\partial z_1}(z) = (\mathcal{R}G)(z). \tag{3.17}$$

Према томе функција F зависи само од промјенљивих $z_1, \ldots, z_m$, а функција G зависи само од промјенљивих $z_1, z_{m+1}, \ldots, z_n$. Ако је $n = 2$ тада је или $m = 1$ или $m = 2$. За $m = 1$ F је функција од једне промјенљиве z_1 и из $c\frac{\partial F}{\partial z_1}(z) = (\mathcal{R}F)(z) = z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}(z)$ слиједи да је F константна функција, што је у супротности са претпоставком. Када је $m = 2 = n$, онда добијамо да је G константна функција.

Дакле $n \geq 3$ и $m < n$.

На основу (3.16) функција F је константна на $l \cap \mathbb{B}^n$, за сваку комплексну праву l која пролази кроз тачку $c\vec{e_1}$. Ако је $c < 1$, онда $c\vec{e_1} \in \mathbb{B}^n$ и отуда је F константа. Према томе $c \geq 1$. Аналогно, примјеном на функцију G, добијамо да је $1/c \geq 1$ односно $c \leq 1$.

Значи $c = 1$.

Како је F константна функција на диску $l \cap \mathbb{B}^n$, за сваку комплексну праву l која пролази кроз e_1,

$$F(z) = \varphi\left(\frac{z_2}{1-z_1}, \dots, \frac{z_m}{1-z_1}\right) \tag{3.18}$$

за неку функцију φ и аналогно је

$$G(z) = \psi\left(\frac{z_{m+1}}{1-z_1}, \dots, \frac{z_n}{1-z_1}\right)$$

за неку функцију ψ.

Треба да докажемо да је пресликавање $H : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ дато са

$$H\left(z_1, \dots, z_n\right) = \left(\frac{z_2}{1-z_1}, \dots, \frac{z_n}{1-z_1}\right)$$

сурјективно. Нека је $(w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ фиксирано и нека је: $\varepsilon = \frac{1}{1+|w|^2}, z_1 = 1-\varepsilon, z_j = \varepsilon w_j, (2 \leq j \leq m)$. Тада је

$$|z|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = (1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2 |w|^2 = 1 - \varepsilon < 1$$

те је z из $\mathbb{B}^n$ и $H(z) = (w_2, \dots, w_n)$. Но тада је према (3.18)

$$F\left(z_1, (1-z_1)\, w_2, \dots, (1-z_1)\, w_n\right) = \varphi\left(w_2, \dots, w_m\right)$$

и отуда је φ цијела функција. Аналогно се доказује да је ψ цијела функција.

□

Напомена 3.4. *Ако су f и g холоморфне функције на $\mathbb{B}^n$, онда је $f\bar{g} \in \mathcal{M}h(\mathbb{B}^n)$ ако и само ако важи*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)\overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}(z)} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i}\overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}}(z) \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z), \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Посљедица 3.1. *([2]) Ако је u $\bar{п}$лурихармонијска функција $\mathbb{B}^n, (n \geq 3)$ онда је u^2 $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{B}^n$ ако и само ако је $u = f + \bar{g}$ и важи* (3.11).

Грахам [23] је доказао да ако је $u \in C^n(\overline{\mathbb{B}^n})$ и $\tilde{\Delta} u = 0$, да је онда u плурихармонијска функција на $\mathbb{B}^n$.

Посљедица 3.2. *([2]) Нека је $u \in C^n(\overline{\mathbb{B}^n})$, $\tilde{\Delta} u = 0$ и $\tilde{\Delta} u^2 = 0$. Тада је $u = f + \bar{g}$ при чему су f и g дате са (3.11), ако је $n \geq 3$. Ако је $n = 2$, онда је u холоморфна или је $\overline{u}$ холоморфна функција.*

Доказ. Ако је $n \geq 3$ тврђење слиједи из посљедице (3.1) и теореме 3.6. Даље, ако $n = 2$ и $u = f + \bar{g}$ онда је или f или g константна функција. □

Став 3.1. *([40]) Ако је u $\mathcal{M}$-хармонијска функција на $\mathbb{B}^n$ таква да је u^2 плурихармонијска на $\mathbb{B}^n$, онда је u холоморфна или конјуговано холоморфна на $\mathbb{B}^n$.*

Доказ. Како је u^2 плурихармонијска функција, онда постоје холоморфне функције f и g на $\mathbb{B}^n$ тако да је $u^2 = f + \bar{g}$. За свако $a \in \mathbb{B}^n$, ако је $u(a) \neq 0$, онда постоји околина $V_a \subset \mathbb{B}^n$ тако да је $u = (f + \bar{g})^{\frac{1}{2}}$ за неку грану корјена. С обзиром да је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_i} \partial z_k}(z) = -\frac{1}{4}(f + \bar{g})^{-\frac{3}{2}} \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}}(z),$$

на основу (3.1) и претпоставке да је u $\mathcal{M}$-хармонијска функција на $\mathbb{B}^n$ добијамо да је

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i,k=1}^{n} (\delta_{ik} - \bar{z}_i z_k) \frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z_i} \partial z_k}(z) \\ &= -\frac{1}{4}(f + \bar{g})^{-\frac{3}{2}} \sum_{i,k=1}^{n} (\delta_{ik} - \overline{z_i} z_k) \frac{\partial f}{\partial z_k}(z) \overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}}(z). \end{aligned}$$

Отуда је

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_i}(z) \overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}}(z) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \overline{\frac{\partial g}{\partial z_i}}(z) \sum_{k=1} z_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(z),$$

гдје u не ишчезава и како је u непрекидна онда је $u \neq 0$ свугдје. Према напомени 3.4 $f\bar{g}$ је $\mathcal{M}$-хармонијска функција на $\mathbb{B}^n$ па можемо примјенити теорему 3.6. Ако је $n = 2$, онда је бар једна од функција f и g константна функција, па је или u или $\bar{u}$ холоморфна функција. Нека је $n \geqslant 3$ и претпоставимо да f и g нису константне функције. На основу теореме 3.6 онда постоји:

(а) цијели број $m, 2 \leq m \leq n - 1$,

(б) унитарна трансформација $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, (в) цијеле функције $\phi : \mathbb{C}^{m-1} \to \mathbb{C}$ и $\psi : \mathbb{C}^{n-m} \to \mathbb{C}$, такве да је

$$f(Uz) = \phi\left(\frac{z_2}{1-z_1}, \cdots, \frac{z_m}{1-z_1}\right), \; g(Uz) = \psi\left(\frac{z_{m+1}}{1-z_1}, \cdots, \frac{z_n}{1-z_1}\right)$$

тако да функцију u^2 можемо записати у слиједећем облику

$$u^2(z) = \phi\left(\frac{z_2}{1-z_1}, \cdots, \frac{z_m}{1-z_1}\right) + \overline{\psi}\left(\frac{z_{m+1}}{1-z_1}, \cdots, \frac{z_n}{1-z_1}\right).$$

Претпоставимо да је за неко $\zeta^{(1)} \in \mathbb{C}^{m-1}$ и неко $\zeta^{(2)} \in \mathbb{C}^{n-m}$ $\phi\left(\zeta^{(1)}\right) + \bar{\psi}\left(\zeta^{(2)}\right) = 0$. Изаберимо $x_1, (0 < x_1 < 1)$ тако да је $|\zeta^{(1)}| + |\zeta^{(2)}| < R = \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{\sqrt{2}(1-x_1)}$ и нека је

$$z^{(1)} = \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{\sqrt{2}}\xi^{(1)}, \quad \xi^{(1)} \in \mathbb{C}^{m-1}, \quad |\xi^{(1)}| < 1,$$
$$z^{(2)} = \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{\sqrt{2}}\xi^{(2)}, \quad \xi^{(2)} \in \mathbb{C}^{n-m}, \quad |\xi^{(2)}| < 1.$$

Тада је $|x_1|^2+|z^{(1)}|^2+|z^{(2)}|^2 = |x_1|^2+\frac{1-x_1^2}{2}|\xi^{(1)}|^2+\frac{1-x_1^2}{2}|\xi^{(2)}|^2 < 1$ те $\left(x_1, z^{(1)}, z^{(2)}\right) \in \mathbb{B}^n$. Даље, можемо изабрати $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ тако да је

$$\frac{z^{(1)}}{1-x_1} = \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{\sqrt{2}\,(1-x_1)}\xi^{(1)} = \zeta^{(1)}$$
$$\frac{z^{(2)}}{1-x_1} = \frac{\sqrt{1-x_1^2}}{\sqrt{2}\,(1-x_1)}\xi^{(2)} = \zeta^{(2)}$$

Према томе

$$u^2\left(x_1, z^{(1)}, z^{(2)}\right) = \phi\left(\zeta^{(1)}\right) + \bar{\psi}\left(\zeta^{(2)}\right) = 0.$$

Нека су x_1 и $z^{(2)}$ фиксирани. Тада је $u^2\left(x_1, z^{(1)}, z^{(2)}\right)$ холоморфна функција по промјенљивој $z^{(1)}$ па u^2 узима све вриједности у околини 0. То је немогуће јер тада функција u не може имати непрекидан други корјен. Дакле или је f или је g константна функција и отуда или је u холоморфна функција или је $\bar{u}$ холоморфна функција. □

3.3 Хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске функције на $\mathbb{D}^n$

У примјеру 3.2. је показано да функција, дефинисана на $\mathbb{D}^n$, која је истовремено хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска не мора бити плурихармонијска. Осим тога дата су два описа простора функција које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске. Највећи дио овог потпоглавља је настао коришћењем рада [5]. Остала литература ће бити накнадно цитирана.

За $n > 1$ од интереса је посматрати инклузије између простора $h(\mathbb{D}^n)$, $\mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$, $sh(\mathbb{D}^n)$ и $ph(\mathbb{D}^n)$. Подсјетимо читаоца да је простор свих хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$ означен са $h(\mathbb{D}^n)$, простор свих $\mathcal{M}$-хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$ означен је са $\mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$, да са $sh(\mathbb{D}^n)$ означавамо простор свих појединачно хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$ и да је $ph(\mathbb{D}^n)$ простор свих плурихармонијских функција на $\mathbb{D}^n$. Сљедећи ставови нам дају инклузије између неких од тих простора.

Став 3.2. *Ако је u појединачно хармонијска на $\mathbb{D}^n$, онда је u хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска функција.*

Доказ. Став слиједи из $\Delta = \sum_{j=1}^n \Delta_j$ и $\tilde{\Delta} = \sum_{j=1}^n (1-|z_j|^2)^2 \Delta_j$. □

Нека је $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$. Функција $u(z) = z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}$ је хармонијска на $\mathbb{D}^2$, али није појединачно хармонијска на $\mathbb{D}^2$.

Примјер 3.1. *([78], страна 24.) За $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{D}^2$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{T}^2$ и $\lambda_1, \lambda_2 > -\frac{1}{2}$, посматрајмо функцију*

$$u(z_1, z_2) = \left[\frac{1-|z_1|^2}{|1-z_1\overline{\zeta}_1|^2}\right]^{\lambda_1+\frac{1}{2}} \left[\frac{1-|z_2|^2}{|1-z_2\overline{\zeta}_2|^2}\right]^{\lambda_2+\frac{1}{2}} = [P_1(z_1,\zeta_1)]^{\lambda_1+\frac{1}{2}} \, [P_2(z_2,\zeta_2)]^{\lambda_2+\frac{1}{2}}.$$

За $j, 1 \leq j \leq 2$, имамо

$$\frac{\partial P_j^{\lambda_j+\frac{1}{2}}}{\partial z_j} = \left(\lambda_j + \frac{1}{2}\right) \frac{\overline{\zeta_j}\, [P_j(z_j,\zeta_j)]^{\lambda_j-\frac{1}{2}}}{(1-z_j\overline{\zeta_j})^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 P_j^{\lambda_j+\frac{1}{2}}}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} = \left(\lambda_j^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{[P_j(z_j,\zeta_j)]^{\lambda_j+\frac{1}{2}}}{(1-|z_j|^2)^2}.$$

Према томе

$$\Delta u(z_1,z_2) = \Delta_1 u(z_1,z_2) + \Delta_2 u(z_1,z_2) = 4\left[\frac{\lambda_1^2 - \frac{1}{4}}{(1-|z_1|^2)^2} + \frac{\lambda_2^2 - \frac{1}{4}}{(1-|z_2|^2)^2}\right] u(z_1,z_2)$$

и

$$(\tilde{\Delta} u)(z_1,z_2) = 4\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \frac{1}{2}\right) u(z_1,z_2).$$

Ако су $\lambda_1, \lambda_2 \neq \frac{1}{2}$ и $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{1}{2}$, функција u је $\mathcal{M}$-хармонијска али није појединачно хармонијска на $\mathbb{D}^2$.

Став 3.3. *Ако је u плурихармонијска функција на $\mathbb{D}^n$, онда је u појединачно хармонијска. Специјално u је хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска функција.*

Доказ. Свака реално вриједносна плурихармонијска функција u на $\mathbb{D}^n$ је реални дио холоморфне функције на основу става 1.1. Због тога, плурихармонијску функцију на $\mathbb{D}^n$ можемо представити, локално, као суму $f + \bar{g}$, гдје су f и g холоморфне функције. Отуда слиједи да је u појединачно хармонијска функција. □

Поставља се питање, посматрајући Рудинову теорему 3.5, да ли је довољан услов да је функција u, дефинисана на $\mathbb{D}^n$, плурихармонијска, ако је истовремено хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{D}^n$. Одговор је не, као што видимо у сљедећем примјеру.

Примјер 3.2. *Нека је $u : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ дефинисана са $u(z_1, z_2, \ldots z_n) = z_1\bar{z}_2 z_3 \cdots z_n$. Тада је u хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$, али није плурихармонијска на $\mathbb{D}^n$.*

Заиста, за фиксиране $z_1, z_3, \ldots, z_n$ ова функција је конјуговано холоморфна по промјенљивој z_2 и за фиксиране $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_n$ је холоморфна по $z_i, i \in \{1, 3, \ldots, n\}$. Отуда је u појединачно хармонијска, те на основу става 3.2, функција u је и хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска. Међутим,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z_2}} = 1 \neq 0, \quad i \neq 2,$$

те u није плурихармонијска функција на $\mathbb{D}^n$.

Видимо да класа функција које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске има сасвим различиту природу у случајевима домена $\mathbb{B}^n$ и домена $\mathbb{D}^n, (n \geq 2)$.

Да бисмо представили још једну класу функција дефинисаних на отвореном јединичном полидиску уведимо сљедећу нотацију.

За $J \subset \{1, \ldots, n\} = I_n$ дефинишемо $C_J : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ са $C_J(z) = w$, при чему је $w_j = z_j$ ако $j \notin J$ и $w_j = \overline{z_j}$ ако $j \in J$. Уочимо да је C_J бијективно пресликавање.

Нека је

$$h_J(\mathbb{D}^n) = \{f \circ C_J : f \in H(\mathbb{D}^n)\}. \tag{3.19}$$

Фиксирајмо J. Ако је $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, онда су $f \circ C_J$ холоморфне функције по промјенљивој z_j за $j \notin J$ и конјуговано холоморфне по промјенљивој z_j за $j \in J$. Отуда, за холоморфну функцију f, функција $f \circ C_J$ је, увијек, појединачно хармонијска функција. Уочимо да је $h_J(\mathbb{D}^n)$ векторски простор за фиксирано $J \subset \{1, \ldots, n\} = I_n$.

Дакле, функције из $h_J(\mathbb{D}^n)$ су конјуговано холоморфне по промјенљивој z_j за $j \in J$ и холоморфне по преосталим промјенљивим.

Сума ових простора функција је сљедећи векторски простор:

$$\Sigma h(\mathbb{D}^n) = \left\{ \sum_{J\subset I_n} g_J : g_J \in h_J(\mathbb{D}^n) \text{ за свако } J \subset I_n \right\}. \tag{3.20}$$

Очигледно је да су све холоморфне и конјуговано холоморфне функције из простора $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$. На основу става 3.2, става 3.3 и горе наведене напомене, добијамо сљедеће инклузије:

$$ph(\mathbb{D}^n) \cup \Sigma h(\mathbb{D}^n) \subset sh(\mathbb{D}^n) \subset h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n). \tag{3.21}$$

Сваки потпростор $h_J(\mathbb{D}^n)$ од $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ је алгебра функција, јер је затворен у односу на операцију множења. Међутим, простор $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ није алгебра: на примјер функција $f(z_1, z_2) = z_1 + \overline{z}_1 z_2$, дефинисана на $\mathbb{D}^2$, је из $\Sigma h(\mathbb{D}^2)$ али f^2 није из $\Sigma h(\mathbb{D}^2)$.

Осим тога, сума

$$\Sigma h(\mathbb{D}^n) = \sum_{J\subset I_n} h_J(\mathbb{D}^n)$$

није директна сума, чак иако се факторишу константе. На примјер: Нека је $K = J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, при чему су $J_1, J_2 \subset I_n$ различити скупови. Тада свака функција f из $h_K(\mathbb{D}^n)$, која зависи само од промјенљивих z_j, гдје је $j \in K$, припада и простору $h_{J_1}(\mathbb{D}^n)$ и простору $h_{J_2}(\mathbb{D}^n)$.

Уочимо да $z^p \overline{z}^q$ припада $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ ако и само ако је (p, q) *чисто*.

Претпоставимо да је (p, q) *чисто* и нека је $J = \{j : q_j \neq 0\}$. Тада моном $z^p \overline{z}^q$ припада $h_J(\mathbb{D}^n)$ и отуда $u = \sum_{(p,q)} c_{p,q} z^p \overline{z}^q$ припада $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ ако и само ако је $c_{p,q} = 0$ за све *миксиране* (p, q).

Уведимо линеарне парцијалне диференцијалне операторе другог реда на простору реално аналитичких функција.

Наиме, нека је

$$\Lambda u(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j \Delta_j u(z) \tag{3.22}$$

и

$$\Psi u(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2 \bar{z}_j^2 \Delta_j u(z). \tag{3.23}$$

Дакле, ако је u реално аналитичка функција на $\mathbb{D}^n$ облика (3.7), тада је, примјеном (3.8),

$$\Lambda u(z) = 4\sum_{(p,q)}(p_1q_1 + \cdots + p_nq_n)c_{p,q}z^p\bar{z}^q \tag{3.24}$$

и

$$\Psi u(z) = 4\sum_{(p,q)}\sum_{j=1}^{n} p_jq_jc_{p,q}z^{p+1_j}\bar{z}^{q+1_j}. \tag{3.25}$$

Уочимо да оператор Λ пресликава простор P_k свих хомогених полинома реда k у себе, оператор Δ пресликава P_k у P_{k-2} док оператор Ψ пресликава P_k у P_{k+2}. На основу (3.5), (3.22) и (3.23) важи

$$\tilde{\Delta}u = \Delta u - 2\Lambda u + \Psi u. \tag{3.26}$$

Лема 3.1. *Нека је u хармонијска функција на јединичном полидиску и нека је*

$$u(z) = \sum_{(p,q)} c_{p,q}z^p\bar{z}^q \tag{3.27}$$

развој функције u у ред чији су чланови мономи по промјенљивим z_j и $\bar{z}_j$. Тада је u $\mathcal{M}$-хармонијска функција ако и само ако коефицијенти $c_{p,q}$ задовољавају сљедећу рекурентну формулу:

$$\langle p,q\rangle c_{p,q} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(p_j-1)(q_j-1)c_{p-1_j,q-1_j}. \tag{3.28}$$

Доказ. С обзиром да је $\Delta u = 0$, примјеном (3.26), добијамо да је $\tilde{\Delta}u = 0$ ако и само ако је $\Psi u = 2\Lambda u$ на $\mathbb{D}^n$. Међутим, оператор Ψ дат са (3.25) можемо записати у сљедећем облику:

$$\Psi u(z) = 4\sum_{j=1}^{n}\sum_{(p,q)}(p_j-1)(q_j-1)c_{p-1_j,q-1_j}z^p\bar{z}^q. \tag{3.29}$$

Према томе, на основу (3.24) и (3.29), хармонијска функција u је $\mathcal{M}$-хармонијска ако и само ако је

$$\sum_{(p,q)}\sum_{j=1}^{n}(p_j-1)(q_j-1)c_{p-1_j,q-1_j}z^p\bar{z}^q = 2\sum_{(p,q)}(p_1q_1+\cdots+p_nq_n)c_{p,q}z^p\bar{z}^q. \tag{3.30}$$

Једнакост (3.30) је еквивалентна са (3.28) због јединствености развоја реално аналитичке функције у ред. □

Теорема 3.8. $\Sigma h(\mathbb{D}^n) = sh(\mathbb{D}^n) = h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$.

Доказ. Према (3.21) довољно је да докажемо да је

$$h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n) \subset \Sigma h(\mathbb{D}^n).$$

Нека је $u \in h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$. Како је свака хармонијска и свака $\mathcal{M}$-хармонијска функција реално аналитичка функција, функцију u можемо представити у облику

$$u(z) = \sum_{(p,q)} a_{p,q} z^p \bar{z}^q = \sum_{(p,q)\ \text{\it чисто}} a_{p,q} z^p \bar{z}^q + \sum_{(p,q)\ \text{\it миксирано}} a_{p,q} z^p \bar{z}^q = u_1(z) + u_2(z). \tag{3.31}$$

Очигледно u_1 припада $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ и u_2 припада $h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$. Треба да докажемо да је $u_2 = 0$.

Нека је

$$u_2(z) = \sum_{(p,q)} c_{p,q} z^p \bar{z}^q, \qquad z \in \mathbb{D}^n, \tag{3.32}$$

гдје је $c_{p,q} = 0$ за *чисто* (p,q) и $c_{p,q} = a_{p,q}$ за *миксирано* (p,q). Тврђење ћемо доказати принципом математичке индукције. Очигледно је $c_{p,q} = 0$ за $|(p,q)| \leq 1$. На основу леме 3.1 за коефицијенте $c_{p,q}$ из (3.32) важи (3.28). Тада је за *миксирано* (p,q)

$$\begin{aligned} |c_{p,q}| \leq & \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^n p_j q_j} \sum_{j=1}^n (p_j - 1)(q_j - 1) |c_{p-1_j, q-1_j}| \\ \leq & \frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq n} |c_{p-1_j, q-1_j}| \end{aligned}$$

и отуда је

$$\max_{|(p,q)| = k+2} |c_{p,q}| \leq \frac{1}{2} \max_{|(p,q)| = k} |c_{p,q}|, \quad k \geq 0.$$

Стога, ако је $c_{p,q} = 0$ за све $|(p,q)| = k$, онда је $c_{p,q} = 0$ за све *миксиране* (p,q) такве да је $|(p,q)| = k+2$. Како је $c_{p,q} = 0$ за све *чисто* (p,q) доказ је завршен. $\square$

Значај теореме 3.8 је да даје два описа простора функција које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске на $\mathbb{D}^n$.

У наставку су дате неке примјене теореме 3.8. Повезани резултати, у случају јединичне лопте $\mathbb{B}^n$ дати су у потпоглављу 3.2.

Став 3.4. *Нека је u реално вриједносна хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$ и претпоставимо да је $\tilde{\Delta} u^s = 0$ за неки цијели број $s \geq 2$. Тада је u константна функција.*

Доказ. За свако $1 \leq j \leq n$ важи

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} = s u^{s-1} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} + s(s-1) u^{s-2} \frac{\partial u}{\partial z_j} \frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}}.$$

Како је u реално вриједносна функција, онда је $\frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = \overline{\frac{\partial u}{\partial z_j}}$ и тада је

$$\Delta_j u^s = s u^{s-1} \Delta_j u + 4s(s-1) u^{s-2} \left| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right|^2 \tag{3.33}$$

за свако $1 \leq j \leq n$.

С обзиром да је u из $h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$, на основу теореме 3.8, u је појединачно хармонијска. Дакле

$$\Delta_j u^s = 4s(s-1) u^{s-2} \left| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right|^2, \quad \text{за свако} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Осим тога, како је $u^s \in \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$ добијамо да је

$$0 = s(s-1) u^{s-2} \sum_{j=1}^{n} (1 - |z_j|^2)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right|^2$$

и отуда је $\frac{\partial u}{\partial z_j} = 0$ за свако $j = 1, 2, \ldots, n$. Међутим, тада је и $\frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = 0$ за свако $j = 1, 2, \ldots, n$. Дакле u је константа. $\square$

Став 3.5. *Ако је u реална $\mathcal{M}$-хармонијска функција на јединичном полидиску таква да је $u^s \in h(\mathbb{D}^n) \cap \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$ за неки цијели број $s \geq 2$, онда је u константна функција.*

Доказ. Ако је $u \equiv 0$ тврђење очигледно важи. Нека је $u(z) \neq 0$ за неко $z \in \mathbb{D}^n$. На основу теореме 3.8 и (3.33), добијамо

$$u \Delta_j u + 4(s-1) \left| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right|^2 = 0, \quad \text{за свако} \quad 1 \leq j \leq n,$$

односно

$$\Delta_j u = -4(s-1) u^{-1} \left| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right|^2, \quad \text{за свако} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Из $u \in \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$ слиједи да је $\sum_{j=1}^{n} (1 - |z_j|^2)^2 \Delta_j u(z) = 0$ и тада је

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - |z_j|^2)^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z_j} \right|^2 = 0$$

Према томе за свако $j = 1, 2, \ldots, n$ $\frac{\partial u}{\partial z_j} = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = 0$. $\square$

Став 3.5 за $s = 2$ и реално-вриједносну функцију u је аналог става 3.1 за полидиск.

Став 3.6. *Нека је $u \in \Sigma h(\mathbb{D}^n)$ и нека је $s \geq 2$ цијели број. Тада је u^s из $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ ако и само ако u припада $h_J(\mathbb{D}^n)$ за неко $J \subset I_n$.*

Доказ. Ако је u из $h_J(\mathbb{D}^n)$ за неко $J \subset I_n$, онда је $u^s \in h_J(\mathbb{D}^n)$, јер је $h_J(\mathbb{D}^n)$ алгебра.

Претпоставимо да су u и u^s из $\Sigma h(\mathbb{D}^n)$ за неки цијели број $s \geq 2$. На основу теореме 3.8 u и u^s су појединачно хармонијске функције и отуда за свако $1 \leq j \leq n$ важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\Delta_j(u^s) =& su^{s-1}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} + s(s-1)u^{s-2}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = 0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} =& 0.\end{aligned}$$

Отуда је

$$u^{s-2}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}} = 0$$

и $u^{s-2}\frac{\partial u}{\partial z_j}\frac{\partial u}{\partial \overline{z_j}}$ је производ три реално аналитичке функције те бар једна од тих функција мора бити једнака нули. Искључимо тривијалан случај када је $u \equiv 0$. Тада u не зависи од z_j и $\overline{z_j}$ истовремено. Дакле $u \in \cup_{J \subset I_n} h_J(\mathbb{D}^n)$. □

У теореми 3.8 је доказано да је на отвореном јединичном полидиску $\mathcal{M}$-хармонијска функција појединачно хармонијска ако и само ако је хармонијска. Међутим, сљедећи став је доказан у [55].

Став 3.7. *([55], посљедица 1.2.) Ако је $u \in C(\overline{\mathbb{D}^n})$ $\mathcal{M}$-хармонијска функција, онда је u појединачно хармонијска.*

Став 3.8. *Нека је $u \in C(\overline{\mathbb{D}^n})$, $\tilde{\Delta} u = 0$ и претпоставимо да је $\tilde{\Delta} u^s = 0$ за неки цијели број $s \geq 2$. Тада u припада $h_J(\mathbb{D}^n)$ за неко $J \subset I_n$.*

Доказ. Став слиједи из става 3.7, теореме 3.8 и става 3.6. □

4 H^p простори појединачно (α,β)-хармонијских функција у јединичном полидиску

4.1 Хардијеви простори појединачно хармонијских функција у $\mathbb{D}^n$

Када разматрамо гранично понашање појединачно хармонијских функција полазимо од функције дефинисане на $\mathbb{T}^n$ и проширимо је на појединачно хармонијску функцију у $\mathbb{D}^n$. Први проблем такве природе је Дирилеов проблем: за дату $\psi \in C(\mathbb{T}^n)$ треба наћи функцију u дефинисану на $\mathbb{D}^n$ такву да је је u појединачно хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$, непрекидна на $\overline{\mathbb{D}^n}$ и $u|_{\mathbb{T}^n} = \psi$. Тај проблем је рјешен Пуасоновом интегралном формулом (видјети [69]).

Ако је $z \in \mathbb{D}^n, \zeta \in \mathbb{T}^n, z_j = r_j e^{i\theta_j}, \zeta = e^{i\varphi_j}$ онда је Пуасоново језгро производ

$$P(z,\zeta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1 - r_j^2}{|1 - r_j e^{i(\theta_j - \varphi_j)}|^2}.$$

Уочимо да је $P(z,\zeta) > 0$, $\int_{\mathbb{T}^n} P(z,\zeta) dm_n(\zeta) = 1$ као и да је

$$P(z,\zeta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} r_1^{|m_1|} \cdots r_n^{|m_n|} e^{i\langle m, \theta - \varphi\rangle}.$$

Ако је μ комплексна Борелова мјера на $\mathbb{T}^n$, Пуасонов интеграл мјере $P[d\mu]$ је функција

$$P[d\mu](z) = \int_{\mathbb{T}^n} P(z,\zeta) d\mu(\zeta), \quad (z \in \mathbb{D}^n)$$

и онда је на основу претходног

$$P[d\mu](z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{\mu}(m) r_1^{|m_1|} \cdots r_n^{|m_n|} e^{i\langle m, \theta\rangle}$$

при чему су $\hat{\mu}(m)$ Фуријеови коефицијенти

$$\hat{\mu}(m) = \int_{\mathbb{T}^n} \overline{\zeta}^m d\mu(\zeta), \quad m \in \mathbb{Z}^n.$$

Отуда је очигледно да је $P[d\mu]$ појединачно хармонијска функција. Ако је $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, простор свих интеграбилних функција у односу на m_n, означавамо са $P[f]$ умјесто $P[f dm_n]$.

За $z \in \mathbb{D}^n$ и функцију $u : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$ дефинишемо $u_z : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ са $u_z(\zeta) = u(z \cdot \zeta)$. Ако је $z = (r, r, \ldots, r)$ гдје је $0 \leq r < 1$ пишемо u_r умјесто u_z. Посебно, ако је $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n) \in [0, 1)^n$, онда је $u_{\mathbf{r}}(\zeta) = u(r_1\zeta_1, \ldots, r_n\zeta_n)$.

Теорема 4.1. *([69, 85]) Ако је $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$ тада је $u = P[f]$ продужење функције f на $\mathbb{D}^n$ и u је ограничена појединачно хармонијска функција. Штавише,*

$$|P[f](z)| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} \quad \textit{за} \quad z \in \mathbb{D}^n.$$

Теорема 4.2. *([69])*

(а) Ако је $f \in C(\mathbb{T}^n)$ тада је $P[f]$ непрекидно продужење функције f на $\overline{\mathbb{D}^n}$ и $P[f]$ је појединачно хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$.

(б) Ако је u појединачно хармонијска фунција на $\mathbb{D}^n$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}^n}$, тада је $u(z) = P[f](z)$ за $z \in \mathbb{D}^n$.

Теорема 4.3. *([85]) Ако је $f \in L^p(\mathbb{T}^n), (1 \leq p < +\infty)$ и ако је $u = P[f]$, тада је продужење функције f на $\mathbb{D}^n$ појединачно хармонијска функција и кад $\mathbf{r} \to 1$ функције $u_{\mathbf{r}}$ конвергирају ка f у L^p норми тј. $\lim_{\mathbf{r}\to 1}\|u_{\mathbf{r}} - f\|_{L^p} = 0$.*

Дефиниција 4.1. *([10]) За $1 \leq p < +\infty$ скуп $sh^p(\mathbb{D}^n)$ је дефинисан као скуп свих појединачно хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$ за које је норма*

$$\sup_{\mathbf{r}\in[0,1)^n} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |u_{\mathbf{r}}(\zeta)|^p dm_n(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Простор $L^p(\mathbb{T}^n), (1 < p \leq +\infty)$ је дуални простор простора $L^q(\mathbb{T}^n)$ при чему су p и q конјуговани експоненти $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Али простор $L^1(\mathbb{T}^n)$ није дуални простор нити једног простора. Међутим, простор комплексних Борелових мјера на $\mathbb{T}^n$ је дуални простор простора $C(\mathbb{T}^n)$ свих непрекидних функција на $\mathbb{T}^n$. Осим тога за дату појединачно хармонијску функцију u дефинисану на $\mathbb{D}^n$ и $a \in \mathbb{D}^n$ функција $u(a{\cdot}z)$ је појединачно хармонијска по $z \in \mathbb{D}^n$. Калдерон и Зигмунд ([10], лема 1) су доказали да је потребан и довољан услов да појединачно хармонијска функција дефинисана на $\mathbb{D}^n$ буде Пуасонов интеграл мјере $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ је да је

$$\sup_{\mathbf{r}\in[0,1)^n} \int_{\mathbb{T}^n} |u_{\mathbf{r}}(\zeta)| dm_n(\zeta) < +\infty.$$

Такође су доказали да је потребан и довољан услов да појединачно хармонијска функција u буде Пуасонов интеграл мјере $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n), \mu \geq 0$, је да је $u \geq 0$ у $\mathbb{D}^n$ (видјети[10], лема 2).

Теорема 4.4. *([76], теорема 1) Претпоставимо да је u појединачно хармонијска функција на $\mathbb{D}^n, 1 < p \leq +\infty$ и да је*

$$\sup_{0\leq r<1} \|u_r\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} < +\infty.$$

Тада постоји јединствена функција $\psi \in L^p(\mathbb{T}^n)$ таква да је $u = P[\psi]$.

Прије него што формулишемо Фатуов тип теореме за појединачно хармонијске функције на $\mathbb{D}^n$ потребни су нам неки појмови и тврђења за вишеструке Фуријеове редове и диференцирање n-интеграла.

Према Лебегу [51] релација

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) dm(y) = f(x)$$

важи за скоро свако $x \in \mathbb{R}^n$, кадгод је f локално интеграбилна функција дефинисана на $\mathbb{R}^n$. При разматрању таквих лимеса је често корисно посматрати одговарајућу максималну функцију, која настаје када лимес замијенимо супремумом, а функцију апсолутном вриједношћу функције. Према томе за $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ дефинишемо њену максималну функцију $Mf : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ формулом

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dm(y).$$

Главни резултати за максималну функцију и диференцирање интеграла дати су у слиједећој теореми и посљедици.

Теорема 4.5. *Нека је функција f дефинисана на $\mathbb{R}^n$.*

(а) Ако је $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq +\infty$, онда је Mf коначна скоро свуда.

(б) Ако је $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, онда је за свако $\lambda > 0$

$$m\{x : (Mf)(x) > \lambda\} \geq \frac{A}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f| dm(x), \tag{4.1}$$

гдје је A константа која зависи само од димензије n (нпр. $A = 5^n$).

(в) Ако $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq +\infty$, онда $Mf \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p,$$

гдје константа A_p зависи само од p и n.

Посљедица 4.1. *Ако је $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq +\infty$, или уопштеније ако је f локално интеграбилна онда је*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dm(y) = f(x)$$

за скоро свако $x \in \mathbb{R}^n$.

Ако је $p = 1$ пресликавање $f \to Mf$ није ограничено на $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ ако f није једнака нули скоро свуда.

Умјесто лопти $B(x, r)$ могу се посматрати контролисано сажимајући скупови.

Природно је запитати се када је

$$\lim_{diam(Q)\to 0} \frac{1}{m(Q)} \int_Q f(y)dm(y) = f(x) \tag{4.2}$$

скоро свуда за $x \in \mathbb{R}^n$ и $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $Q \in \mathcal{F}$, гдје је $\mathcal{F}$ фамилија свих правоугаоника која садржи x.

Ако је $\mathcal{F}$ фамилија свих правоугаоника произвољне оријентације који садрже тачку x, онда (4.2) не мора да важи и када је f ограничена. Према Гузману [26] то је уочио Зигмунд посматрајући скуп који је конструисао Никодим [62]. Сакс [73] је неколико година касније, доказао и ако се ограничимо на правоугаонике са странама паралелним координатним осама, (4.2) не важи за неке интеграбилне функције. За фамилију $\mathcal{F}$ правоугаоника са странама паралелним осама Зигмунд [82] је доказао да важи (4.2), ако је $f \in L^p(\mathbb{R}^n), p > 1$.

Ако дефинишемо

$$\tilde{M}(f)(x) = \sup_{Q\in\mathcal{F}} \frac{1}{m(Q)} \int_{x+Q} |f(y)|dm(y),$$

за такву фамилију $\mathcal{F}$ је $\|\tilde{M}f\|_p \leq A_p\|f\|_p, 1 < p \leq +\infty$. Једну годину касније Јенсен, Марцинкјевич и Зигмунд [32] су доказали да (4.2) важи ако је $|f|(\ln^+|f|)^{n-1} \in L^1(Q_0)$ и такође су доказали да се услов $|f|(\ln^+|f|)^{n-1} \in L^1(Q_0)$ не може побољшати.

Проблем диференцирања n-интеграла повезан је са сумабилности Фуријеовог реда.

Нека је Q n-димензионална коцка

$$-\pi \leq \xi_j \leq \pi, \quad j = 1, 2, \dots n. \tag{4.3}$$

Фуријеови коефицијенти функције $f \in L^1(Q)$ су

$$c_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q f(y) e^{-i\langle m, y\rangle} dy, \quad m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$$

и пишемо $f(\xi) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e^{i\langle m, \xi\rangle}$ за $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in Q$.

За $f \in L^1(Q)$ Чезарове $(C, 1)$ (прве аритметичке) средине дате су са

$$\sigma_m(\xi; f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q f(\xi + \theta) \prod_{m_j} K_{m_j}(\theta_j) d\theta_1 \dots d\theta_n, \tag{4.4}$$

гдје је $K_{m_j}(\theta_j) = \frac{1}{m_j+1} \left(\frac{\sin \frac{(m_1+1)\theta_j}{2}}{\sin \frac{\theta_j}{2}} \right)^2$ Фејерово језгро, а Абелове средине су дате са

$$A_{\mathbf{r}}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_Q f(\xi + \theta) \prod_{j=1}^n P_{r_j}(\theta_j) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Абелове средине $A_{\mathbf{r}}(f)(\xi)$ су појединачно хармонијске функције по $z_j = r_j e^{i\xi_j}, 1 \leq j \leq n$. Претпоставимо ради једноставности да је $n = 2$. Зигмунд [82] је доказао слиједећу теорему

Теорема 4.6. *([82]) Ако је $f(\xi_1, \xi_2) \in L^p(\mathbb{T}^2), p > 1$, онда*

$$\sigma_{m_1, m_2}(\xi_1, \xi_2) \to f(\xi_1, \xi_2)$$

скоро свуда када $m_1, m_2 \to \infty$ независно један од другога, односно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(m_1 \geq N \land m_2 \geq N) \Rightarrow |\sigma_{m_1, m_2}(\xi_1, \xi_2) - f(\xi_1, \xi_2)| < \varepsilon.$$

Јенсен, Марцинкјевич и Зигмунд [32] су доказали да ако су f и $|f| \ln^+ |f|$ Лебег интеграбилне на $\mathbb{T}^2$, онда

$$\sigma_{m_1, m_2}(\xi_1, \xi_2) \to f(\xi_1, \xi_2)$$

скоро свуда када $m_1, m_2 \to \infty$ независно један од другога.

Теорема 4.7. *([56]) Нека је $f(\xi_1, \xi_2)$ функција која је 2π периодична у односу на ξ_1 и ξ_2 и Лебег интеграбилна на $\mathbb{T}^2$. Ако m_1 и m_2 теже ка $+\infty$ тако да је $\max_{j,k} \frac{m_j}{m_k} \leq B, j, k = 1, 2,\ 1 \leq B < \infty$, онда*

$$\sigma_{m_1, m_2}(\xi_1, \xi_2) \to f(\xi_1, \xi_2) \quad \textit{скоро свуда.}$$

Доказ теореме (4.7) се заснива на слиједећим чињеницама:

(а) Скуп свих тригонометријских полинома од двије промјенљиве је густ у $L^1(\mathbb{T}^2)$.

(б) Леми о покривању: Нека је t позитиван број и нека $E \subset \mathbb{R}^2$ произвољан скуп такав да је $0 < m(E) < +\infty$. Даље, нека је $\mathcal{F}$ фамилија свих правоугаоника $P = P_{\xi_1,\xi_2}$ са центром у тачки $(\xi_1, \xi_2) \in E$ и са странама $\delta = \delta(P)$ и $t\delta$ које су паралелне координатним осама. Тада постоји коначан број дисјунктних правоугаоника $P_j = P_{\xi_1^j,\xi_2^j}$, $j = 0, 1, \dots, s$, таквих да је

$$\sum_{j=0}^{s} m(P_j) \geq \frac{1}{26} m(E).$$

(в) Неједнакост за σ_{m_1,m_n} слабог (1,1)-типа: Ако је

$$\widetilde{M_B} f(x) = \sup_{\substack{\frac{m_j}{m_k} \leq B, \\ j,k=1,2,}} |\sigma_{m_1,m_2} f|, x \in [-\pi, \pi]^2,$$

онда је

$$m\left\{\widetilde{M_B} f > \lambda\right\} \leq \frac{AB}{\lambda}\|f\|_1, \quad f \in L^1(\mathbb{T}^2)$$

где је $1 \leq B < +\infty$ и $\lambda > 0$ и при томе су коришћене слиједеће неједнакости за Фејерово језгро:

$$K_m(\theta) \leq Am, \quad K_m(\theta) \leq \frac{A}{m\theta^2}, \quad (m \geq 1, 0 < \theta \leq \pi),$$

где је A апсолутна константа.

Ограничену $(C, 1)$ сумабилност двоструког Фуријеовог реда је први разматрао Мур [61]. Одговарајући резултати важе и за Абелове средине $\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{m_1 m_2} r_1^{|m_1|} r_2^{|m_2|} e^{i(m_1\xi_1+m_2\xi_2)}$ од $\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} c_{m_1 m_2} e^{i(m_1\xi_1+m_2\xi_2)}$ кад $r_1, r_2 \to 1$. Услов ограничености за $\frac{m_1}{m_2}$ и $\frac{m_2}{m_1}$ замијењен је условом да су $\frac{1-r_1}{1-r_2}$ и $\frac{1-r_2}{1-r_1}$ ограничени. Детаљније важи слиједећа теорема.

Теорема 4.8. *([56]) За дато $1 \leq B < +\infty$ и дату $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ важи*

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi_1+\theta_1, \xi_2+\theta_2)\frac{1-r_1^2}{1-2r_1\cos\theta_1+r_1^2}\frac{1-r_2^2}{1-2r_2\cos\theta_2+r_2^2}d\theta_1 d\theta_2 \to f(\xi_1, \xi_2)$$

скоро свуда, гдје

$$r_1 \to 1, \quad r_2 \to 1, \quad \max\left\{\frac{1-r_1}{1-r_2}, \frac{1-r_2}{1-r_1}\right\} \leq B. \tag{4.5}$$

Штавише то важи и када $z_1 = r_1 e^{i\phi_1}, z_1 = r_1 e^{i\phi_2}$ тежe ка $e^{i\xi_1}, e^{i\xi_2}$ респективно дуж нетангенцијалног пута.

Вјероватносни приступ неким аспектима H^p теорије 2-хармонијске функције дат је у [24], а новији рад о појединачно хармонијским функцијама је [76]. Ганди и Стејн [24] су показали да се H^p простори на бидиску могу окарактерисати или у смислу нетангенцијалне максималне функције и интеграла површине или њихових вјероватносних аналога који резултирају увођењем двоструког Брауновог кретања. Више детаља о диференцирању интеграла као и за јаку максималну функцију и јаке Лебегове тачке може се наћи, осим у већ наведеној литератури, и у [9], [26], [80], [85], као и у литератури која је тамо цитирана.

4.2 (α, β)-хармонијске функције у $\mathbb{D}$

У овом потпоглављу су дефинисане и проучаване (α, β)-хармонијске функције. Оне задовољавају једначину $L_{\alpha,\beta} u = 0$ која је конкретан примјер једначине

$$L_{\alpha,\beta} = \Delta + \alpha L_1 + \beta L_2 + Q_{\alpha,\beta}.$$

Оператор Δ је Лаплас–Белтрамијев оператор на области Ω, L_1 и L_2 су линеарни диференцијални оператори првог реда, а $Q_{\alpha,\beta}$ је оператор нултог реда. Рани рад који се дотиче ове теме је [22] гдје је Ω Зигелов горњи полупростор типа II односно простор $\mathbf{U}^{n+1} = \{[z_0, z] \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n : h = \operatorname{Im} z_0 - |z|^2 > 0\}$. Гелер [22] је користио (α, β)-хармонијске функције да би добио резултате за H^p теорију на Хајзенберговој групи $\partial \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{H}^n$. Осим тога, Гелер([22], страна 368.) је увео једну варијанту тих диференцијабилних оператора

$$\Delta_{\alpha,\beta} = (1 - |z|^2) \left[\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - z_i \overline{z_j}) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} + \alpha R + \beta \overline{R} - \alpha\beta \right], \tag{4.6}$$

гдје је $\mathcal{R}$ радијални извод дат са $\sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ а $\overline{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}$. Примјетимо да је $\Delta_{0,0}$ инваријантни Лапласијан за јединичну лопту $\mathbb{B}^n$. Ахерн, Бруна и Касканте [1] су проучавали функције u дефинисане на јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$ такве да је $\Delta_{\alpha,\beta} u = 0$, гдје је $\Delta_{\alpha,\beta}$ оператор дат изразом (4.6) и такве функције називамо (α, β)-хармонијске функције у $\mathbb{B}^n$. Осим што су развили у ред (α, β)-хармонијске функције, развили су и H^p теорију за такве функције. Клинтборг и Олофсон [42] су детаљније испитивали развој у ред (α, β)-хармонијских функција које су дефинисане на јединичном диску $\mathbb{D}$ у комплексној равни $\mathbb{C}$. Специјални случајеви када је у питању један параметар могу се наћи у [39, 52, 53, 66, 64] и

[63]. У наведеним радовима оператори $L_{\alpha,\beta}$ су униформно елиптички, али дегенерисани близу границе домена: члановима нижег реда $\alpha L_1, \beta L_2$ и $Q_{\alpha,\beta}$ не доминира главни дио осим ако $\alpha = \beta = 0$. Највећи дио овог потпоглавља настао је комбиновањем литературе која је већ цитирана као и литературе која ће бити цитирана у наставку.

До на заједнички множитељ $1 - |z|^2$ слиједећа дефиниција је заправо разматран случај (4.6) у случају $n = 1$.

Дефиниција 4.2. *Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Функција $u \in C^2(\mathbb{D})$ је (α,β)-хармонијска на отвореном јединичном диску $\mathbb{D}$, ако је*

$$L_{\alpha,\beta} u = 0,$$

гдје је

$$L_{\alpha,\beta} = (1 - |z|^2)\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} + \alpha z \frac{\partial}{\partial z} + \beta \overline{z} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} - \alpha\beta. \tag{4.7}$$

Оператор $L_{\alpha,\beta}$ је елиптички парцијални диференцијални оператор па је свака (α,β)-хармонијска функција дефинисана на диску у комплесној равни класе $C^\infty(\mathbb{D})$. Простор свих (α,β)-хармонијских функција дефинисаних на отвореном јединичном диску $\mathbb{D}$ означен је са $h_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$.

Напомена 4.1. *Ако је функција u (α,β)-хармонијска функција, онда је $\overline{u}$ $(\bar{\beta},\bar{\alpha})$-хармонијска функција.*

Како је

$$\partial_z[u(\zeta z)] = \zeta(\partial_z u)(\zeta z), \quad \partial_{\overline{z}}[u(\zeta z)] = \overline{\zeta}(\partial_{\overline{z}} u)(\zeta z), \qquad \zeta \in \mathbb{C}, \quad u \in C^1(\mathbb{D})$$

добијамо да је

$$L_{\alpha,\beta}[u(\zeta z)] = (1-|z|^2)|\zeta|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}}(\zeta z) + \alpha \zeta z (\partial_z u)(\zeta z) + \beta \overline{\zeta z}(\partial_{\overline{z}} u)(\zeta z) - \alpha\beta u(\zeta z). \tag{4.8}$$

Посљедица ове формуле је слиједећа ротациона инваријантност од $L_{\alpha,\beta}$, која се појављује у [42]:

$$L_{\alpha,\beta}(\zeta \cdot u) = \zeta \cdot (L_{\alpha,\beta} u), \quad |\zeta| = 1. \tag{4.9}$$

Дефиниција 4.3. *За функцију u на диску $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ кажемо да је m-хомогена, гдје је $m \in \mathbb{Z}$, ако је*

$$(e^{i\theta} \cdot u)(z) = u(e^{i\theta} \cdot z) = e^{im\theta} u(z), \qquad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{4.10}$$

Нека је $m \in \mathbb{Z}$ фиксирано и претпоставимо да је функција $u \in C^\infty(\mathbb{D})$ m-хомогена за $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$. Осим тога, нека је $z = r$ за $0 < r < 1$ и $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Тада је

$$u(re^{i\theta}) = e^{im\theta}u(r),$$

односно функција $\frac{u(z)}{z^m}$ је радијална тј. зависи само од $|z|$, па постоји $f \in C^\infty(0,1)$ таква да је

$$u(z) = z^m f(|z|^2), \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}.$$

Обратно, ако је $f \in C^\infty(0,1)$ и $u(z) = z^m f(|z|^2)$ за $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$, онда је u m-хомогена.

Теорема 4.9. *Нека је $(f_m)_{m=0}^\infty$ низ из $C^\infty[0,1)$ шакав да је*

$$\limsup_{m\to\infty}\left(\max_{0\leq x\leq r}\left|f_m^{(n)}(x)\right|\right)^{1/m} \leq 1$$

за $n \in \mathbb{N}$ и $0 < r < 1$. Ако је

$$u_m(z) = f_m\left(|z|^2\right)z^m, \quad z \in \mathbb{D},$$

за $m \in \mathbb{N}_0$, онда је

$$\limsup_{m\to\infty}\|u_m\|_{p,q;K}^{\frac{1}{m}} < 1 \tag{4.11}$$

за све $(p,q) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ и сваки компакт $K \subset \mathbb{D}$, ӣдје је семинорма $\|\cdot\|_{p,q;K}$ дата са (1.20).

Доказ. Фиксирајмо компакт $K \subset \mathbb{D}$ и $p,q \in \mathbb{Z}_+$ и нека је $r = \max_{z\in K}|z| < 1$. За свако $z \in \mathbb{D}$ је

$$\bar{\partial}^q u_m(z) = z^{m+q} f_m^{(q)}\left(|z|^2\right)$$

и отуда примјеном Лајбницове формуле за p-ти извод ($m \geq p$) и извода сложене функције добијамо

$$\begin{aligned}
\partial^{(p,q)}u_m(z) &= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\left(z^{m+q}\right)^{(p-j)}\left[f_m^{(q)}\left(|z|^2\right)\right]^{(j)} \\
&= \sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{(m+q)!}{(m+q-(p-j))!}z^{m+q-(p-j)}f_m^{(q+j)}\left(|z|^2\right)\bar{z}^j \\
&= z^{m+q-p}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\frac{(m+q)!}{(m+q+j-p)!}|z|^{2j}f_m^{(q+j)}\left(|z|^2\right).
\end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}\|u_m\|_{p,q;K} &\le r^{m+q-p}\left(\sum_{j=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ j\end{pmatrix}\frac{(m+q)!}{(m+q+j-p)!}r^{2j}\right)\max_{q\le s\le p+q}\left\|f_m^{(s)}\right\|_{[0,r^2]}\\ &\le r^{m+q-p}(m+q)^p\left(\sum_{j=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ j\end{pmatrix}r^{2j}\right)\max_{q\le s\le p+q}\left\|f_m^{(s)}\right\|_{[0,r^2]}\\ &= r^{m+q-p}(m+q)^p\left(1+r^2\right)^p\max_{q\le s\le p+q}\left\|f_m^{(s)}\right\|_{[0,r^2]}\end{aligned}$$

за $m\ge p$.

С обзиром да је $\limsup\limits_{m\to\infty}(m+q)^{\frac{p}{m}}=\lim\limits_{m\to\infty}(m+q)^{\frac{p}{m}}=1$, добијамо да је

$$\limsup_{m\to\infty}\|u_m\|_{p,q;K}^{\frac{1}{m}}\le r$$

и како је $0<r<1$ стога важи (4.11). $\square$

Дефиниција 4.4. *За $u\in C(\mathbb{D})$ и $m\in\mathbb{Z}$ m-та хомогена компонента u_m од u је дефинисана са*

$$u_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\theta}u(e^{i\theta}\cdot z)d\theta=\int_{\mathbb{T}}\overline{\zeta}^m u(\zeta\cdot z)dm_1(\zeta),\qquad z\in\mathbb{D}. \tag{4.12}$$

Ако је u из $C^k(\mathbb{D})$, тада диференцирањем под знаком интеграла слиједи да $u_m\in C^k(\mathbb{D})$ за $0\le k\le\infty$.

Нека је $\theta\in\mathbb{R}$ произвољно. Како је

$$(e^{i\theta}\cdot u_m)(z)=u_m(e^{i\theta}\cdot z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\tau}u_m(e^{i\tau}\cdot e^{i\theta}z)d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\tau}(e^{i(\tau+\theta)}\cdot u_m)(z)d\tau$$

смјеном промјенљиве добијамо да је

$$(e^{i\theta}\cdot u_m)(z)=\frac{e^{im\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\tau}(e^{i\tau}\cdot u_m)(z)d\tau=\frac{e^{im\theta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-im\tau}u_m(e^{i\theta}\cdot z)d\tau=e^{im\theta}u_m$$

и с обзиром да је θ произвољно m-та хомогена компонента u_m од u је m-хомогена.

Нека је $m\in\mathbb{Z}$. Ако је u_m m-та хомогена компонента функције u, из (4.12) непосредно слиједи да је

$$\sup_{|z|=r}|u_m(z)|\le\sup_{|z|=r}|u(z)|,\quad 0\le r<1. \tag{4.13}$$

Лема 4.1. *Нека су $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Ако је $u\in h_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$, онда је за свако $m\in\mathbb{Z}$ њена m-хомогена компонента u_m такође (α,β)-хармонијска функција на $\mathbb{D}$.*

Доказ. С обзиром да је $u_m \in C^2(\mathbb{D})$ јер је $u \in C^2(\mathbb{D})$, добијамо да је

$$L_{\alpha,\beta}u_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\tau} L_{\alpha,\beta}(e^{i\tau}\cdot u)(z)d\tau.$$

На основу ротационе инваријантности (4.9) важи

$$L_{\alpha,\beta}u_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\tau} e^{i\tau}\cdot (L_{\alpha,\beta}u)(z)d\tau = 0$$

јер је u (α,β)-хармонијска функција. □

Теорема 4.10. *Нека су $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ фиксирани. Ако је $u \in C^2(\mathbb{D})$ функција облика*

$$u(z) = z^m f(|z|^2), \quad z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$$

за неко $f \in C^2(0,1)$ и $m \in \mathbb{N}$, онда је u (α,β)-хармонијска у $\mathbb{D}\backslash\{0\}$ ако и само ако функција $f(x), 0 < x < 1$ задовољава хипергеометријску једначину

$$x(1-x)f''(x) + (m+1-(m+1-\alpha-\beta)x)f'(x) - \alpha(\beta-m)f(x) = 0. \tag{4.14}$$

Доказ. За свако $z \in \mathbb{D}\setminus\{0\}$, имамо

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = mz^{m-1}f(|z|^2) + z^m\overline{z}f'(|z|^2) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z) = z^{m+1}f'(|z|^2)$$

и отуда је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}(z) = (m+1)z^m f'\left(|z|^2\right) + z^{m+1}\overline{z}f''\left(|z|^2\right).$$

Према томе важи

$$\begin{aligned}L_{\alpha,\beta}u(z) =& \left(1-|z|^2\right)\left((m+1)z^m f'\left(|z|^2\right) + z^m|z|^2 f''\left(|z|^2\right)\right) + \beta\overline{z}z^{m+1}f'\left(|z|^2\right)\\ &+ \alpha z\left(mz^{m-1}f\left(|z|^2\right) + z^m\overline{z}f'\left(|z|^2\right)\right) - \alpha\beta z^m f\left(|z|^2\right)\\ =& z^m\left(|z|^2\left(1-|z|^2\right)f''\left(|z|^2\right) + \left(m+1-(m+1-\alpha-\beta)|z|^2\right)f'\left(|z|^2\right)\right.\\ &\left.-\alpha(\beta-m)f\left(|z|^2\right)\right).\end{aligned}$$

Дакле, функција u је (α,β)-хармонијска ако и само ако је

$$|z|^2\left(1-|z|^2\right)f''\left(|z|^2\right)+\left(m+1-(m+1-\alpha-\beta)|z|^2\right)f'\left(|z|^2\right)-\alpha(\beta-m)f\left(|z|^2\right) = 0,$$

тј. ако и само ако, смјеном $|z|^2 = x$, функција $f(x)$ задовољава хипергеометријску једначину

$$x(1-x)f''(x) + (m+1-(m+1-\alpha-\beta)x)f'(x) - \alpha(\beta-m)f(x) = 0.$$

□

Став 4.1. *Нека су $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Функција*

$$u_m(z)=\begin{cases} F\left(-\alpha,m-\beta;m+1;|z|^2\right)z^m, & \text{ако је } m\in\mathbb{N},\\ F\left(-\beta,|m|-\alpha;|m|+1;|z|^2\right)\bar{z}^{|m|}, & \text{ако је } m\in\mathbb{Z}^-\end{cases}$$

је (α,β)-хармонијска функција за свако $z\in\mathbb{D}$, гдје је F хипергеометријска функција дата са (1.18).

Доказ. Очигледно је $u_m\in C^\infty(\mathbb{D})$ за свако $m\in\mathbb{Z}$.

Нека је $m\in\mathbb{N}$. Хипергеометријска функција $F(-\alpha,m-\beta;m+1;\cdot)$ задовољава хипергеометријску једначину (4.14), па је према теореми 4.10 функција u_m (α,β)-хармонијска.

Нека је $m\in\mathbb{Z}^-$. Како је

$$\overline{u_m(z)}=F\left(-\bar\beta,|m|-\bar\alpha;|m|+1;|z|^2\right)z^{|m|},\quad z\in\mathbb{D},$$

према претходном, функција $\overline{u_m}$ је $(\bar\beta,\bar\alpha)$-хармонијска функција па према напомени 4.1 закључујемо да је функција u_m (α,β)-хармонијска функција. □

Теорема 4.11. *Нека су $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ и $m\in\mathbb{N}$. Ако је $u\in C^2(\mathbb{D})$ m-хомогена онда је u (α,β)-хармонијска ако и само ако је облика*

$$u(z)=cF\left(-\alpha,m-\beta;m+1;|z|^2\right)z^m,\quad z\in\mathbb{D} \tag{4.15}$$

за неко $c\in\mathbb{C}$, гдје је F хипергеометријска функција дата изразом (1.18).

Доказ. На основу става 4.1 свака функција u облика (4.15) је (α,β)-хармонијска.

Нека је функција u (α,β)-хармонијска. Како је u m-хомогена, онда је функција u облика

$$u(z)=z^mf(|z|^2)$$

за неко $f\in C^2(0,1)$.

За свако $z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}$, на основу теореме 4.10, из услова да је $L_{\alpha,\beta}u(z)=0$ добијамо функција $f(x),(0<x<1)$ задовољава хипергеометријску једначину

$$x(1-x)f''(x)+(m+1-(m+1-\alpha-\beta)x)f'(x)-\alpha(\beta-m)f(x)=0.$$

Како је функција u ограничена у околини нуле, онда је $f(x)=O(x^{-\frac{m}{2}})$ кад $x\to0$. Осим тога, како је $\frac{\partial u}{\partial\bar z}(z)=z^{m+1}f'(|z|^2)$ за $z\in\mathbb{D}\backslash\{0\}$, онда је и $\overline{\partial}u$ ограничена у околини нуле и стога је $f'(x)=O(x^{-\frac{m+1}{2}})$ кад $x\to0$. Дакле,

$$(m+1)f'(x)+\alpha(m-\beta)f(x)=O(x^{-\frac{m+1}{2}})+O(x^{-\frac{m}{2}})=o(x^{-(m+1)})$$

и стога је, према напомени 1.6,

$$f(x) = cF(-\alpha, m-\beta; m+1; x).$$

Рјешења система једначина

$$\begin{aligned} a+b =& m-\alpha-\beta \\ ab =& \alpha(\beta-m) \end{aligned}$$

су $(a,b) = (-\alpha, m-\beta)$ или $(a,b) = (m-\beta, -\alpha)$. Дакле

$$u(z) = cF\left(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2\right) z^m, \quad z \in \mathbb{D}.$$

□

Ако се посебно не нагласи, подразумјева се да су α и β комплексни бројеви.

Теорема 4.12. *Ако је функција u, дефинисана на $\mathbb{D}$, (α,β)-хармонијска функција и ако је u_m њена m-та хомогена компонента за неко $m \in \mathbb{N}$, онда је*

$$(4.16) \qquad u_m(z) = c_m F\left(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2\right) z^m, \quad z \in \mathbb{D}$$

за неко $c_m \in \mathbb{C}$, гдје је F хипергеометријска функција дата са (1.18).

Доказ. Тврђење слиједи директно на основу леме 4.1 и теореме 4.11. □

Посљедица 4.2. *Нека је $u \in h_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$ и u_m њена m-та хомогена компонента за неко $m \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{Z}_+$. Тада је*

$$(4.17) \qquad u_m(z) = c_m F\left(-\beta, |m|-\alpha; |m|+1; |z|^2\right) \bar{z}^{|m|}, \quad z \in \mathbb{D},$$

за неко $c_m \in \mathbb{C}$.

Доказ. Функција $\overline{u_m}$ је -m = $|m|$-та хомогена компонента функције $\bar{u}$ која је $(\bar{\beta},\bar{\alpha})$-хармонијска. На основу теореме 4.12 је

$$\overline{u_m(z)} = a_m F\left(-\bar{\beta}, |m|-\bar{\alpha}; |m|+1; |z|^2\right) z^{|m|}, \quad z \in \mathbb{D}$$

за неко $a_m \in \mathbb{C}$ и отуда је

$$u_m(z) = \overline{a_m} F\left(-\beta, |m|-\alpha; |m|+1; |z|^2\right) \bar{z}^{|m|}.$$

□

Теорема 4.13. *Ако је $u \in h_{\alpha,\beta}(\mathbb{D})$, онда важи*

$$\begin{aligned} u(z) = &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m u}{m!}(0) F(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2) z^m \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\partial}^m u}{m!}(0) F(m-\alpha, -\beta; m+1; |z|^2) \overline{z}^m, \qquad |z| < 1. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ред (4.18) *конвергира у топологији простора $C^\infty(\mathbb{D})$.*

Доказ. За (α,β)-хармонијску функцију u, m-та хомогена компонента је за $m \in \mathbb{N}$, на основу теореме 4.12, облика (4.16) и за $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_+$, на основу посљедице 4.2, је облика (4.17), гдје је $c_m \in \mathbb{C}$ за $m \in \mathbb{Z}$. Како је $u_m(z)$ m-ти Фуријеов коефицијент функције $u_z \in C^\infty(\mathbb{T})$, гдје је $u_z(\zeta) = u(\zeta \cdot z)$, онда је

$$u_z(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m(z) e^{im\theta}$$

и за $\theta = 0$ добијамо

$$u(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_m(z).$$

Значи

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m F(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2) z^m + \sum_{m=-\infty}^{-1} c_m F\left(-\beta, |m|-\alpha; |m|+1; |z|^2\right) \overline{z}^{|m|}.$$

За конвергенцију у топологији простора $C^\infty(\mathbb{D})$ је довољно доказати да је

$$\limsup_{|m|\to\infty} \|u_m\|_{p,q;K}^{\frac{1}{|m|}} < 1$$

за све $p, q \in \mathbb{N}$ и сваки компактан скуп $K \subset \mathbb{D}$. Заиста тада је, на основу Кошијевог теста,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \|u_m\|_{p,q;K} < +\infty$$

за све $p, q \in \mathbb{N}$ и сваки компактан скуп $K \subset \mathbb{D}$.

Нека је $m \in \mathbb{N}$ и $0 < r < 1$. На основу неједнакости (4.13) је

$$|c_m| \left| F\left(-\alpha, m-\beta; m+1; r^2\right) \right| r^m \le \max_{|z|=r} |u(z)|$$

а како је примјеном теореме 1.7

$$\lim_{m\to\infty} F\left(-\alpha, m-\beta; m+1; r^2\right) = \left(1-r^2\right)^\alpha \neq 0,$$

тада је

$$\limsup_{m\to\infty} |c_m|^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{r}$$

односно

$$\limsup_{m\to\infty} |c_m|^{\frac{1}{m}} \leq 1,$$

јер је $r, 0<r<1$ произвољно.

Низ функција $(f_m)_{m=0}^\infty$, гдје је $f_m(x) = F(-\alpha, m-\beta; m+1; x)$, на основу става 1.3, испуњава претпоставку теореме 4.9 и примјеном исте теореме важи

$$\limsup_{m\to\infty} \|u_m\|_{p,q;K}^{\frac{1}{m}} < 1$$

за све $p,q\in\mathbb{N}$ и сваки компактан скуп $K\subset\mathbb{D}$.

Ако је $m\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{Z}_+$, онда је $\overline{u_m}$ $(-m)$-та хомогена компонента од $\bar{u}\in h_{\overline{\beta},\overline{\alpha}}(\mathbb{D})$. Дакле,

$$\limsup_{m\to-\infty} \|u_m\|_{p,q;K}^{\frac{1}{|m|}} = \limsup_{m\to\infty} \|(\bar{u})_m\|_{p,q;K}^{\frac{1}{m}} < 1$$

за све $p,q\in\mathbb{N}$ и сваки компактан скуп $K\subset\mathbb{D}$.

За $m\geq 0$ развој функције u у Тејлоров ред око нуле је

$$u(z) = \sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q\leq m}} \frac{1}{p!q!}\partial^{(p,q)}u(0)z^p\bar{z}^q + O\left(|z|^{m+1}\right), \quad z\to 0$$

и тада је

$$\begin{aligned} I_m(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta}u(re^{i\theta})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{\substack{p,q\geq 0\\ p+q\leq m}} \frac{1}{p!q!}\partial^{(p,q)}u(0)r^{p+q}e^{i(p-q)\theta}\right)e^{-im\theta}d\theta + O(r^{m+1}) \\ &= \frac{\partial^m u(0)}{m!}r^m + O(r^{m+1}), \quad r\to 0. \end{aligned}$$

С друге стране је

$$I_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta}u(re^{i\theta})d\theta = c_m F(-\alpha, m-\beta; m+1; r^2)r^m,$$

и онда је

$$c_m F(-\alpha, m-\beta; m+1; r^2)r^m = \frac{\partial^m u(0)}{m!}r^m + O(r^{m+1}).$$

Дијељењем обје стране са r^m и пуштајући да $r \to 0$, добијамо

$$c_m = \frac{\partial^m u(0)}{m!}.$$

Аналогно добијамо да је

$$I_{-m}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\theta} u(re^{i\theta})d\theta = \frac{\bar{\partial}^m u(0)}{m!} r^m + O(r^{m+1}) \quad r \to 0$$

Такође важи

$$I_{-m}(r) = c_m F(-\beta, m-\alpha; m+1; r^2) r^m.$$

Дакле

$$c_{-m} = \frac{\bar{\partial}^m u(0)}{m!}.$$

□

За реално $t > -1$ посматрајмо функцију

$$u_t(z) = \frac{(1-|z|^2)^{t+1}}{|1-z|^{t+2}}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.19}$$

Олофсон и Витсен [64] су уочили и доказали слиједеће особине функције u_t за реално $t > -1$, које су битне за ову дисертацију:

- функција $u_t(re^{i\theta})$ је парна функција по промјенљивој $\theta \in (-\pi,\pi)$ и монотоно опадајућа по $\theta \in (0,\pi)$ за фиксирано $0 \le r < 1$.
- (лема 2.3.)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u_t(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{(1-r^2)^{t+1}}{|1-re^{i\theta}|^{t+2}}d\theta \le \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma^2\left(\frac{t}{2}+1\right)} \quad \text{за} \quad 0 \le r < 1. \tag{4.20}$$

- (став 2.7.)

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u_t(re^{i\theta})d\theta = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma^2\left(\frac{t}{2}+1\right)}.$$

Теорема 4.14 ([42], теорема 1.4 и теорема 6.4.)**.** *Нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Тада је функција*

$$u_{\alpha,\beta}(z) = \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z)^{\alpha+1}(1-\overline{z})^{\beta+1}}, \qquad |z| < 1 \tag{4.21}$$

(α,β)-хармонијска на $\mathbb{D}$. Штавише, ако је $\operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta > -1$, важи:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u_{\alpha,\beta}(re^{i\theta})|d\theta \le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha - \operatorname{Im}\beta|}\frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta + 1)}{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta}{2}+1\right)}, \qquad 0 \le r < 1. \tag{4.22}$$

Доказ. Први дио тврђења је рачунског карактера. Детаљи су пажљиво изложени у [42].

Потребно је још доказати да је

$$\|(u_{\alpha,\beta})_r\|_{L^1(\mathbb{T})} \le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha-\operatorname{Im}\beta|}\frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta}{2}+1\right)}, \quad 0\le r<1.$$

при чему је $\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta>-1$.

Функцију $u_{\alpha,\beta}$ можемо записати у облику

$$\begin{aligned}
u_{\alpha,\beta}(z) =& e^{(\alpha+\beta+1)\ln\left(1-|z|^2\right)}e^{-(\alpha+1)(\ln|1-z|+i\arg(1-z))}e^{-(\beta+1)(\ln|1-\overline{z}|+i\arg(1-\overline{z}))}\\
=& e^{(\alpha+\beta+1)\ln\left(1-|z|^2\right)}e^{-(\alpha+\beta+2)\ln|1-z|}e^{-i(\alpha-\beta)\arg(1-z)}\\
=& (1-|z|^2)^{\operatorname{Re}(\alpha+\beta+1)+i\operatorname{Im}(\alpha+\beta)}|1-z|^{-\operatorname{Re}(\alpha+\beta+2)-i\operatorname{Im}(\alpha+\beta)}e^{(\operatorname{Im}(\alpha-\beta)-i\operatorname{Re}(\alpha-\beta))\arg(1-z)}
\end{aligned}$$

за $z\in\mathbb{D}$.

Примјетимо да функција $w=1-z$ пресликава $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ у $\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w>|w|^2\}$ и стога за $z\in\mathbb{D}$ је $\operatorname{Re}(1-z)>0$ односно $|\arg(1-z)|<\frac{\pi}{2}$.

Дакле, за свако $z\in\mathbb{D}$ важи

$$|u_{\alpha,\beta}(z)|\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha-\operatorname{Im}\beta|}\frac{\left(1-|z|^2\right)^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1}}{|1-z|^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+2}} \tag{4.23}$$

и онда је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u_{\alpha,\beta}\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha-\operatorname{Im}\beta|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-r^2\right)^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1}}{|1-re^{i\theta}|^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+2}}d\theta$$

за $0\le r<1$.

Према (4.20) за $t=\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta$ је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\left(1-r^2\right)^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1}}{|1-re^{i\theta}|^{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+2}}d\theta\le\frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta}{2}+1\right)}$$

и стога је

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|u_{\alpha,\beta}\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha-\operatorname{Im}\beta|}\frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta}{2}+1\right)}$$

за $0\le r<1$. □

Уочимо да је $u_t(z)=|u_{0,t}(z)|$ за реално $t>-1$ и $z\in\mathbb{D}$. Језгро $u_{0,t}(z)$, за реално $t>-1$, се појављује у [64] гдје су аутори анализирали оператор u_t и добили теореме типа Фатуа за јединични диск $\mathbb{D}$.

Нека су комплексни бројеви $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ такви да је $\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta>-1$. Дефинишемо (α,β)-Пуасоново језгро на $\mathbb{D}\times\mathbb{T}$ са

$$P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)=c_{\alpha,\beta}\frac{(1-|z|^2)^{\alpha+\beta+1}}{(1-z\overline{\zeta})^{\alpha+1}(1-\overline{z}\zeta)^{\beta+1}}=c_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}(z\overline{\zeta}),\quad z\in\mathbb{D},\zeta\in\mathbb{T},\tag{4.24}$$

гдје је $c_{\alpha,\beta}=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$.

Такође, напоменимо да (α,β)-Пуасонов интеграл мјере $\mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T})$ дефинишемо на слиједећи начин:

$$P_{\alpha,\beta}[d\mu](z)=\int_{\mathbb{T}}P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)d\mu(\zeta),\qquad z\in\mathbb{D},\tag{4.25}$$

а за $f\in L^1(\mathbb{T})$ дефинишемо $P_{\alpha,\beta}[f]=P_{\alpha,\beta}[fdm_1]$, тј.

$$P_{\alpha,\beta}[f](z)=\int_{\mathbb{T}}P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)f(\zeta)dm_1(\zeta),\qquad z\in\mathbb{D}.\tag{4.26}$$

Посматрајмо слиједећи Дирихлеов проблем: Да ли за дату функцију $\varphi\in C(\mathbb{T})$ постоји непрекидна функција u на $\overline{\mathbb{D}}$ таква да је $L_{\alpha,\beta}u=0$ на $\mathbb{D}$ и $u=\varphi$ на $\mathbb{T}$. Клинтборг и Олофсон [42] су доказали да (α,β)-Пуасонов интеграл рјешава Дирихлеов проблем за отворен јединични диск $\mathbb{D}$.

Теорема 4.15 ([42], теорема 7.1)**.** *Горе наведен Дирихлеов проблем има јединствено рјешење $u\in C(\overline{\mathbb{D}})$ које је дато слиједећом формулом:*

$$u(z)=\begin{cases}P_{\alpha,\beta}[\varphi](z), & z\in\mathbb{D}\\ \varphi(z), & z\in\mathbb{T}.\end{cases}\tag{4.27}$$

За дато $\zeta=e^{i\theta_0}\in\mathbb{T}$ и $0<A<\infty$ Штолцов угао отвора A у ζ је дат са

$$S_A(e^{i\theta_0})=\{re^{i(\theta_0-\theta)}:|\theta|\le A(1-r)\}.\tag{4.28}$$

Прије него што размотримо Фатуов тип теорема за $(0,\beta)$-хармонијске функције при чему је реалан број $\beta>-1$ докажимо елементарну лему.

Лема 4.2. *За $t>-1$*

$$u_t(re^{i(\theta_0-\theta)})\le(1+A)^{t+2}u_t(re^{i\theta_0})$$

за $z=re^{i(\theta_0-\theta)}\in S_A(e^{i\theta_0})$ и $0<A<\infty$.

Доказ. На основу неједнакости троугла и да је $|\theta| \le A(1-r)$ имамо

$$\begin{aligned}
|1 - re^{i\theta_0}| \le& |1 - re^{i(\theta_0-\theta)}| + |re^{i(\theta_0-\theta)} - re^{i\theta_0}| \\
\le& |1 - re^{i(\theta_0-\theta)}| + |\theta| \\
\le& |1 - re^{i(\theta_0-\theta)}| + A(1-r) \\
\le& |1 - re^{i(\theta_0-\theta)}| + A|1 - re^{i(\theta_0-\theta)}| \\
=& (1+A)|1 - re^{i(\theta_0-\theta)}|.
\end{aligned}$$

и онда је

$$u_t(re^{i(\theta_0-\theta)}) = \frac{(1-r^2)^{t+1}}{|1-re^{i(\theta_0-\theta)}|^{t+2}} \le (1+A)^{t+2}\frac{(1-r^2)^{t+1}}{|1-re^{i\theta_0}|^{t+2}} = (1+A)^{t+2}u_t(re^{i\theta_0}).$$

□

За дато $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ и $0 < h \le \pi$ са $I_h(e^{i\theta})$ означен је отворен лук

$$I_h(e^{i\theta}) = \{e^{i\varphi} \in \mathbb{T} : \theta - h < \varphi < \theta + h\}.$$

Максималну функцију M_μ комплексне Борелове мјере $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ дефинишемо са

$$M_\mu(e^{i\theta}) = \sup_{0<h\le\pi} \frac{|\mu|(I_h(e^{i\theta}))}{2h},$$

гдје је $|\mu|$ варијација комплексне мјере μ, а извод мјере μ дефинишемо са

$$D\mu(e^{i\theta}) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mu(I_h(e^{i\theta}))}{2h}, \quad \text{ако лимес постоји.}$$

Максимална функција функције $f \in L^1(\mathbb{T})$ је функција

$$M_f(e^{it}) = \sup_{0<h\le\pi} \frac{1}{2h}\int_{I_h(e^{i\theta})} |f| d\theta$$

и слично за 2π периодичне функције на $\mathbb{R}$.

Лема 4.3. *([37], лема 2.4 страна 99.) Нека је k ненегативна парна функција на $(-\pi,\pi)$, монотоно нерастућа на $(0,\pi)$. Тада је за свако $f \in L^1(\mathbb{T})$*

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} k(t-s)f(s)ds\right| \le M_f(t)\|k\|_1.$$

Познато је да ако је $d\mu = fdm_1 + d\mu_s$ Лебег–Радон–Никодим разлагање комплексне Борелове мјере μ на $\mathbb{T}$, гдје је $f \in L^1(\mathbb{T})$ и $\mu_s \perp m_1$ онда је $D\mu = f$ и $D\mu_s = 0$ скоро свуда у односу на мјеру m_1,(видјети [72], теорема 7.14.)

Теорема 4.16. *([64],теорема 6.2.) Нека је реалан број $t > -1$ и нека је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ таква да је $D|\mu|(e^{i\theta_0}) = 0$ за $e^{i\theta_0} \in \mathbb{T}$. Тада је*

$$\lim_{S_A(e^{i\theta_0}) \ni z \to e^{i\theta_0}} P_{0,t}[d\mu](z) = 0$$

за свако $0 < A < +\infty$.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно мало. С обзиром да је $D|\mu|(e^{i\theta_0}) = 0$, онда постоји $\delta > 0$ тако да је

$$\frac{|\mu|(I_h(e^{i\theta_0}))}{2h} < \varepsilon$$

за $0 < h \leq \delta$. Нека је μ_1 рестрикција од $|\mu|$ на $I_\delta(e^{i\theta_0})$ и ставимо да је $\mu_2 = |\mu| - \mu_1$. Примјетимо да је $M_{\mu_1}(e^{i\theta_0}) \leq \varepsilon$. На основу неједнакости троугла и основне интегралне неједнакости је

$$|P_{0,t}[d\mu](z)| \leq \int_{I_\delta(e^{i\theta_0})} |P_{0,t}(z,\zeta)|d|\mu|(\zeta) + \int_{\mathbb{T}\backslash I_\delta(e^{i\theta_0})} |P_{0,t}(z,\zeta)|d|\mu|(\zeta).$$

Уочимо да постоји $\rho = \rho_{A,\delta} > 0$ такво да је $\operatorname{dist}(z, \mathbb{T}\backslash I_\delta(e^{i\theta_0})) \geq \rho$ за свако z из $S_A(e^{i\theta_0})$. Одатле слиједи да је

$$\lim_{\substack{z \to e^{i\theta_0} \\ z \in S_A(e^{i\theta_0})}} |P_{0,t}(z,\zeta)| = 0 \quad \text{равномјерно по} \quad \zeta \in \mathbb{T}\backslash I_\delta(e^{i\theta_0}).$$

Дакле

$$\int_{\mathbb{T}\backslash I_\delta(e^{i\theta_0})} |P_{0,t}(z,\zeta)|d\mu(\zeta) \to 0 \quad \text{кад} \quad z \to e^{i\theta_0}.$$

На основу леме 4.2 и леме 4.3 за $z = re^{i(\theta_0 - \theta)} \in S_A(e^{i\theta_0})$ и $\zeta = e^{i\varphi} \in I_\delta(e^{i\theta_0})$ је

$$\begin{aligned}
\int_{I_\delta(e^{i\theta_0})} |P_{0,t}(z,\zeta)|d|\mu|(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}} |P_{0,t}(z,\zeta)|d\mu_1(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} u_t(re^{i(\theta_0-\theta)}e^{-i\varphi})d\mu_1(e^{i\varphi}) \\
&= \int_{\mathbb{T}} u_t(re^{i((\theta_0-\varphi)-\theta))}d\mu_1(e^{i\varphi}) \\
&\leq (1+A)^{t+2}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma^2\left(\frac{t}{2}+1\right)} M_{\mu_1}(e^{i\theta_0}) \\
&\leq (1+A)^{t+2}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma^2\left(\frac{t}{2}+1\right)} \varepsilon
\end{aligned}$$

и онда је

$$\limsup_{S_A(e^{i\theta_0}) \ni z \to e^{i\theta_0}} |P_{0,t}[d\mu](z)| \leq (1+A)^{t+2}\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma^2\left(\frac{t}{2}+1\right)} \varepsilon$$

и како је ε произвољно мало доказ је завршен. □

Навешћемо слиједећу посљедицу (посљедица 6.4 из [64]) без доказа.

Посљедица 4.3. *([64], посљедица 6.4.) Нека је $t > -1$. Ако је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ и $u = P_{0,t}[d\mu]$ онда је*

$$\lim_{S_A(e^{i\theta}) \ni z \to e^{i\theta}} u(z) = f(e^{i\theta}), \quad \text{за скоро свако} \quad e^{i\theta} \in \mathbb{T}$$

и свако $0 < A < +\infty$, гдје је $d\mu = f dm_1 + d\mu_s$ Лебег–Радон–Никодим разлагање $d\mu$ на апсолутно непрекидни дио $f dm_1$ и сингуларни дио $d\mu_s$.

Примјетимо да је у претходној посљедици дат резултат за $(0,t)$-хармонијске функције, гдје је реалан број $t > -1$. У наставку ће бити доказано не само уопштење за (α, β)-хармонијске функције при чему су $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}^-$, $\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Im} \beta > -1$ већ и вишедимензионално уопштење претходне посљедице, (видјети теорему 4.31).

4.3 Појединачно (α, β)-хармонијске функције у $\mathbb{D}^n$

У овом потпоглављу је дефинисана нова класа појединачно (α, β)-хармонијских функција, оне задовољавају систем парцијалних диференцијалних једначина. Такође, дат је развој у ред таквих функција. Затим, у наредна четири потпоглавља између осталог рјешен је Дирихлеов проблем за непрекидну функцију дефинисану на истакнутој граници $\mathbb{T}^n$, развијена је H^p теорија за појединачно (α, β)-хармонијске функције, и доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α, β)-хармонијске функције у диску и за појединачно хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску.

Дефиниција 4.5. *Нека су $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$. За функцију u из $C^2(\mathbb{D}^n)$ кажемо да је појединачно (α, β)-хармонијска на отвореном јединичном полидиску $\mathbb{D}^n$, ако је $L_{\alpha_j, \beta_j} u = 0$ за свако $1 \le j \le n$, гдје је*

$$L_{\alpha_j, \beta_j} = (1 - |z_j|^2) \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \overline{z_j}} + \alpha_j z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \beta_j \overline{z_j} \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} - \alpha_j \beta_j, \qquad 1 \le j \le n.$$

Са $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ означен је векторски простор свих појединачно (α, β)-хармонијских функција у $\mathbb{D}^n$.

Уочимо да је L_{α_j,β_j} линеарни парцијални диференцијални оператор другог реда који дјелује само на промјенљиву $z_j = x_j + iy_j$, и због тога је коришћен термин „појединачно". Ови оператори посматрани у диску су униформно елиптички. Члановима $\alpha_j z_j$ и $\beta_j \overline{z_j}$ не доминира $1-|z_j|^2$, осим ако је $\alpha_j = \beta_j = 0$, те је L_{α_j,β_j} дегенерисан у близини $\mathbb{T}$.
Ако је $\alpha_j = \beta_j = 0$, онда је $L_{\alpha_j,\beta_j} = 4^{-1}(1-|z_j|^2)\Delta_j$, гдје је Δ_j Лапласов оператор у односу на промјенљиве x_j и y_j. Према томе $sh_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\mathbb{D}^n)$ је простор појединачно хармонијских функција на $\mathbb{D}^n$. Чак и у специјалном случају простор $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ није алгебра: ако је u хармонијска функција, онда u^2 не мора да буде хармонијска функција.На примјер функција $u = |z_1|^2 - |z_2|^2$ је хармонијска на бидиску али u^2 није.

Лема 4.4. $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset C^\infty(\mathbb{D}^n)$.

Доказ. Свака појединачно (α,β)-хармонијска функција u је рјешење линеарне елиптичке парцијалне диференцијалне једначине

$$Lu = 0,$$

при чему оператор

$$L = L_{\alpha_1,\beta_1} + \cdots + L_{\alpha_n,\beta_n}$$

има C^∞ коефицијенте. Према томе, према елиптичкој регуларности, u је из $C^\infty(\mathbb{D}^n)$. $\square$

За свако $1 \le j \le n, \zeta \in \mathbb{C}^n, u \in C^2(\mathbb{D}^n)$ је
(4.29)

$$L_{\alpha_j,\beta_j}[u(\zeta\cdot z)] = (1-|z_j|^2)|\zeta_j|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_j}(\zeta\cdot z) + \alpha_j \zeta_j z_j \frac{\partial u}{\partial z_j}(\zeta\cdot z) + \beta_j \overline{\zeta_j z_j} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_j}(\zeta\cdot z) - \alpha_j\beta_j u(\zeta\cdot z).$$

па ротациона инваријантност важи за било коју димензију $n \ge 1$:

$$L_{\alpha_j,\beta_j}(\zeta\cdot u) = \zeta\cdot(L_{\alpha_j,\beta_j} u), \qquad \zeta \in \mathbb{T}^n, \quad 1 \le j \le n. \tag{4.30}$$

Наш циљ, у овом потпоглављу, је да развијемо у ред појединично (α,β)-хармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску $\mathbb{D}^n$, односно да проширимо теорему 4.13. на појединично (α,β)-хармонијске функције на $\mathbb{D}^n$.

Подсетимо да је $(p,q) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$ чисто ако је $p\cdot q = (p_1q_1,\ldots,p_nq_n) = \mathbf{0}$. Скуп свих таквих мултииндекса (p,q) означен је са H. Такође је коришћена природна бијекција $\mathbb{Z}^n \ni m \mapsto (m^+,m^-) \in H$ за промјену индекса сумирања. Напоменимо да пишемо $z^{(m)}$ умјесто $z^{m^+}\overline{z}^{m^-}$, гдје је $m \in \mathbb{Z}^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$.

Нека је $n = 1$ и нека је (p, q) чисто. Тада је или $p = 0$ или је $q = 0$. Ако је $p = 0$, онда је

$$F(q-\alpha, -\beta; q+1; |z|^2) = F(p-\beta, q-\alpha; p+q+1; |z|^2),$$

а ако је $q = 0$, онда је

$$F(-\alpha, p-\beta; p+1; |z|^2) = F(p-\beta, q-\alpha; p+q+1; |z|^2).$$

Дакле, ако је

$$F_{p,q}(z) = F(p-\beta, q-\alpha; p+q+1; z), \qquad |z| < 1,$$

за $(p, q) \in H$, онда

$$\begin{aligned} u(z) = &\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m u}{m!}(0) F(-\alpha, m-\beta; m+1; |z|^2) z^m \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\overline{\partial}^m u}{m!}(0) F(m-\alpha, -\beta; m+1; |z|^2) \overline{z}^m, \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

можемо записати у облику

$$u(z) = \sum_{(p,q)\in H} \frac{\partial^{(p,q)} u}{p!q!}(0) F_{p,q}(|z|^2) z^p \overline{z}^q, \qquad |z| < 1. \tag{4.31}$$

За општи случај $n \geq 1$, за $(p, q) \in H$ дефинишемо

$$\mathcal{F}_{p,q}(z) = \prod_{j=1}^{n} F_{p_j,q_j}(|z_j|^2), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.32}$$

Теорема 4.17. *Ако је u појединачно (α, β)-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$, онда важи*

$$u(z) = \sum_{(p,q)\in H} \frac{\partial^{(p,q)} u}{p!q!}(0) \mathcal{F}_{p,q}(z) z^p \overline{z}^q, \qquad z \in \mathbb{D}^n \tag{4.33}$$

и конвергенција је у топологији простора $C^\infty(\mathbb{D}^n)$.

Ову теорему доказујемо методама које користе Клинтборг и Олофсон ([42], $n = 1$) и те методе су представљене у претходном потпоглављу. Осим тога потребни су нам неки прелиминарни концепти и резултати.

Дефиниција 4.6. *За функцију u која је непрекидна на $\mathbb{D}_0^n = \{z \in \mathbb{D}^n : \prod_j z_j \neq 0\}$ кажемо да је m-хомогена, гдје је $m \in \mathbb{Z}^n$, ако је*

$$(\zeta \cdot u)(z) = u(\zeta \cdot z) = \zeta^m u(z), \qquad z \in \mathbb{D}_0^n, \quad \zeta \in \mathbb{T}^n. \tag{4.34}$$

Ово значи да је $u(e^{i\theta_1}z_1, \dots, e^{i\theta_n}z_n) = e^{im_1\theta_1} \cdot \dots \cdot e^{im_n\theta_n}u(z)$ за свако $z \in \mathbb{D}_0^n$ и све $\theta_j \in \mathbb{R}$.

Став 4.2. *За свако $(p,q) \in H$ функција $\mathcal{F}_{p,q}(z)z^p\overline{z}^q$ је појединачно (α,β)-хармонијска на $\mathbb{D}^n$ и $(p-q)$-хомогена.*

Доказ. Имамо

$$\mathcal{F}_{p,q}(z)z^p\overline{z}^q = g(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)F_{p_i,q_i}(|z_i|^2)z_i^{p_i}\overline{z_i}^{q_i},$$

при чему је $g(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) = \prod_{j\neq i} F_{p_j,q_j}(|z_j|^2)z_j^{p_j}\overline{z_j}^{q_j}$ и фиксирајмо $n-1$ промјенљиву $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n$. Како је $p \cdot q = \mathbf{0}$ тада је или $p_i = 0$ или $q_i = 0$ па је функција $F_{p_i,q_i}(|z_i|^2)z_i^{p_i}\overline{z_i}^{q_i}$ очигледно је $(p_i - q_i)$-хомогена. Осим тога, на основу става 4.1 функција $F_{p_i,q_i}(|z_i|^2)z_i^{p_i}\overline{z_i}^{q_i}$ је (α_i, β_i)-хармонијска па је $L_{\alpha_j,\beta_i}(\mathcal{F}_{p,q}(z)z^p\overline{z}^q) = 0$ и стога је за свако $(p,q) \in H$ функција $\mathcal{F}_{p,q}(z)z^p\overline{z}^q$ појединачно (α,β)-хармонијска на $\mathbb{D}^n$ и $(p-q)$-хомогена. □

Дефиниција 4.7. *За $u \in C(\mathbb{D}^n)$ и $m \in \mathbb{Z}^n$ m-та хомогена компонента u_m од u је дефинисана са*

$$u_m(z) = \int_{\mathbb{T}^n} \overline{\zeta}^m u(\zeta \cdot z) dm_n(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.35}$$

u_m је m-хомогена и то се једноставно доказује смјеном променљивих као и у димензији $n = 1$. Ако $u \in C^k(\mathbb{D}^n)$, онда диференцирањем под знаком интеграла слиједи да је $u_m \in C^k(\mathbb{D}^n)$ за $0 \leq k \leq \infty$.

Став 4.3. *Ако је $u_m(z)$ m-та хомогена компонента од $u \in C^\infty(\mathbb{D}^n)$ за $m \in \mathbb{Z}^n$, онда је*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m(z) = u(z) \qquad \text{у топологији простора} \quad C^\infty(\mathbb{D}^n). \tag{4.36}$$

Доказ. Фиксирајмо компактан скуп $K = r\overline{\mathbb{D}}^n, 0 < r < 1$, и $(\gamma, \delta) \in \mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$. За дато $m \in \mathbb{Z}^n$ нека је $l_j = N$ ако је $m_j \neq 0$ и $l_j = 0$ ако је $m_j = 0$. Отуда је $l \in \mathbb{Z}_+^n$ такво да је $|l| \leq Nn$. Како је $u \in C^\infty(\mathbb{D}^n)$ дозвољено је диференцирати испод знака интеграла и методом парцијалне интеграције добијамо:

$$\begin{aligned}\partial_z^{(\gamma,\delta)} u_m(z) &= \int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} \partial_z^{(\gamma,\delta)} u(e^{i\theta_1}z_1,\dots,e^{i\theta_n}z_n)\prod_{j=1}^n e^{-im_j\theta_j}\frac{d\theta_1\dots d\theta_n}{(2\pi)^n}\\ &= \frac{(2\pi)^{-n}}{(im_1)^{l_1}\cdot\ldots\cdot(im_n)^{l_n}}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\partial_\theta^l\partial_z^{(\gamma,\delta)}u(e^{i\theta_1}z_1,\dots,e^{i\theta_n}z_n)\\ &\prod_{j=1}^n e^{-im_j\theta_j}d\theta_1\dots d\theta_n, \qquad z\in\mathbb{D}^n.\end{aligned}$$

Отуда је за $z \in K$:

$$(4.37)\qquad |\partial_z^{(\gamma,\delta)} u_m(z)| \le \max_{|(s,t)|\le|\gamma|+|\delta|+Nn}\|\partial^{(s,t)}u\|_{C(K)}\prod_{j=1}^n\frac{1}{|m_j|^N}, \qquad N\in\mathbb{N}, N\ge 2,$$

гдје је $\frac{1}{m_j^N} = 1$ ако је $m_j = 0$. С обзиром да вишеструки ред

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|m_1|^{-2}\cdot\ldots\cdot|m_n|^{-2}$$

конвергира имамо да је

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\|u_m\|_{\gamma,\delta,K} < \infty$$

за свако $(\gamma,\delta)\in\mathbb{Z}_+^n\times\mathbb{Z}_+^n$ и свако $K = r\overline{\mathbb{D}}^n$. Слиједи да ред $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}u_m(z)$ конвергира у топологији простора $C^\infty(\mathbb{D}^n)$.

Докажимо да $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}u_m(z)$ конвергира ка $u(z)$ за фиксирано $z\in\mathbb{D}^n$. Заиста, $u_m(z)$ је m-ти Фуријеов коефицијент функције $u_z \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ и због тога је

$$u_z(\zeta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n}u_m(z)\zeta^m.$$

Узимајући $\zeta = \mathbf{1}$ добијамо (4.36). □

Слиједећа лема је вишедимензионално уопштење леме 4.1.

Лема 4.5. *Ако је $u \in sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$, онда је за свако $m\in\mathbb{Z}^n$ њена m-хомогена компонента u_m такође појединачно (α,β)-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$.*

Доказ. На основу ротационе инваријантности (4.30) добијамо, за свако $1\le j\le n$:

$$L_{\alpha_j,\beta_j}u_m(z) = L_{\alpha_j,\beta_j}\int_{\mathbb{T}^n}\overline{\zeta}^m(\zeta\cdot u)(z)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n}\overline{\zeta}^m L_{\alpha_j,\beta_j}(\zeta\cdot u)(z)dm_n(\zeta) = 0.$$

□

У теореми 4.11 је одређен потребан и довољан услов да m-хомогена функција $u \in C^2(\mathbb{D})$ буде (α,β)-хармонијска на $\mathbb{D}$. Одговори на питања који је потребан и који је довољан услов да m-хомогена функција дефинисана на јединичном полидиску буде појединачно (α,β)-хармонијска дати су у слиједећем ставу.

Став 4.4. *Ако је u појединачно (α,β)-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$ и m-хомогена за неко $m \in \mathbb{Z}^n$, онда је, за неку константу c, функција u облика*

$$u(z) = c\mathcal{F}_{m^+,m^-}(z)z^{(m)} = c\prod_{j=1}^{n} F_{m_j^+,m_j^-}(|z_j|^2)z_j^{(m_j)}, \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.38}$$

Обратно, свака функција $u(z)$ облика (4.38) је m-хомогена и појединачно (α,β)-хармонијска.

Доказ. Принципом математичке индукције доказујемо први дио тврђења. Случај $n = 1$ је теорема 4.11 ([42], теорема 2.4). Нека је $n > 1$ и претпоставимо да тврђење важи за $n-1$. Нека је $z' \in \mathbb{D}^{n-1}$ фиксирано. На основу теореме 4.11 функција $U_{z'}(z_n) = u(z', z_n)$ је (α_n, β_n)-хармонијска па је

$$u(z) = U_{z'}(z_n) = v(z')F_{m_n^+,m_n^-}(|z_n|^2)z_n^{(m_n)}.$$

Функција v је $((\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}),(\beta_1,\dots,\beta_{n-1}))$-хармонијска на $\mathbb{D}^{n-1}$ и $m' = (m_1,\dots,m_{n-1})$-хомогена. Отуда на основу индуктивне претпоставке добијамо да је функција u облика (4.38). Обратно тврђење слиједи из чињенице да је $(m^+, m^-) \in H$ и става 4.2. $\square$

Доказ теореме 4.17.

Функција u је из $C^\infty(\mathbb{D}^n)$ на основу леме 4.4 и отуда према ставу 4.3 имамо развој функције u у ред

$$u(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} u_m(z)$$

гдје је општи члан реда m-та хомогена компонента u_m и ред конвергира ка u у топологији простора $C^\infty(\mathbb{D}^n)$. На основу леме 4.5 све u_m су појединачно (α,β)-хармонијске функције. Отуда, с обзиром да је свака u_m m-хомогена, према ставу 4.4 имамо да су све u_m облика (4.38). Стога важи

$$u(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} c_m \prod_{j=1}^{n} F_{m_j^+,m_j^-}(|z_j|^2)z_j{}^{(m_j)} = \sum_{(t,s)\in H} c_{t,s}\mathcal{F}_{t,s}(z)z^t\overline{z}^s, \quad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.39}$$

Докажимо сада да је $c_{p,q} = \frac{\partial^{(p,q)}u}{p!q!}(\mathbf{0})$ за све чисте мултииндексе (p,q) из $\mathbb{Z}_+^n \times \mathbb{Z}_+^n$. Фиксирајмо $(p,q) \in H$ и нека је $k = |p| + |q|$. Тејлоров ред функције u у околини нуле гласи

$$u(z) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{|t|+|s|=j} \frac{\partial^{(t,s)}u(\mathbf{0})}{t!s!} z^t \overline{z}^s + O(\|z\|^{k+1}), \quad z \to \mathbf{0}. \tag{4.40}$$

Користећи ортогоналност стандардне базе $(\zeta^p \overline{\zeta}^q), (p,q) \in H$ простора $L^2(\mathbb{T}^n)$ добијамо

$$\begin{aligned} I(r) &= \int_{\mathbb{T}^n} u_r(\zeta) \overline{\zeta}^p \zeta^q dm_n(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{j=0}^{k} \sum_{|t|+|s|=j} \frac{\partial^{(t,s)}u(\mathbf{0})}{t!s!} r^{t+s} \zeta^t \overline{\zeta}^s \overline{\zeta}^p \zeta^q dm_n(\zeta) + O(r^{k+1}) \\ &= \frac{\partial^{(p,q)}u(\mathbf{0})}{p!q!} r^k + O(r^{k+1}). \end{aligned} \tag{4.41}$$

Уочимо да је $\mathcal{F}_{t,s}(\mathbf{0}) = 1$ за свако (s,t) из H јер је $F(a,b;c;0) = 1$. Када уврстимо $z = r\zeta$ у (4.39) добијамо

$$u_r(\zeta) = u(r\zeta) = \sum_{(t,s)\in H} c_{t,s} \mathcal{F}_{t,s}(r\zeta) r^{t+s} \zeta^t \overline{\zeta}^s$$

па је

$$I(r) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{(t,s)\in H} c_{t,s} \mathcal{F}_{t,s}(r\zeta) r^{t+s} \zeta^t \overline{\zeta}^s \overline{\zeta}^p \zeta^q dm_n(\zeta) = c_{p,q} r^k \mathcal{F}_{p,q}(r, r \ldots, r).$$

Дакле

$$c_{p,q} r^k \mathcal{F}_{p,q}(r, r \ldots, r) = \frac{\partial^{(p,q)}u(\mathbf{0})}{p!q!} r^k + O(r^{k+1}).$$

Дијељењем обје стране са r^k и пуштајући да $r \to 0$ добијамо да је

$$c_{p,q} = \frac{\partial^{(p,q)}u}{p!q!}(\mathbf{0}).$$

□

4.4 (α,β)-Пуасонова репрезентација функција из $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$

Ако се посебно не нагласи, подразумјева се да су $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$ такви да је

$$\operatorname{Re}\alpha_j + \operatorname{Re}\beta_j > -1 \quad \text{и} \quad \alpha_j, \beta_j \notin \mathbb{Z}^- \qquad \text{за свако} \qquad 1 \le j \le n. \tag{4.42}$$

Нека је, за $j, (1 \le j \le n)$

$$c_{\alpha_j,\beta_j} = \frac{\Gamma(\alpha_j+1)\Gamma(\beta_j+1)}{\Gamma(\alpha_j+\beta_j+1)}, \tag{4.43}$$

и

$$v_{\alpha_j,\beta_j}(z) = c_{\alpha_j,\beta_j} u_{\alpha_j,\beta_j}(z_j), \qquad z_j \in \mathbb{D}, \tag{4.44}$$

при чему је $u_{\alpha_j,\beta_j}(z_j) = \frac{(1-|z_j|^2)^{\alpha_j+\beta_j+1}}{(1-z_j\overline{\zeta_j})^{\alpha_j+1}(1-\overline{z_j}\zeta_j)^{\beta_j+1}}$.

Дефиниција 4.8. *(α,β)-Пуасоново језгро се задаје формулом:*

$$P_{\alpha,\beta}(z,\zeta) = \prod_{j=1}^{n} c_{\alpha_j,\beta_j} \frac{(1-|z_j|^2)^{\alpha_j+\beta_j+1}}{(1-z_j\overline{\zeta_j})^{\alpha_j+1}(1-\overline{z_j}\zeta_j)^{\beta_j+1}}, \quad z \in \mathbb{D}^n, \zeta \in \mathbb{T}^n, \tag{4.45}$$

гдје су константе c_{α_j,β_j} дефинисане са (4.43).

Ако је $\operatorname{Re}\alpha_j = \alpha_j = \beta_j > -\frac{1}{2}$ за свако $j = 1,\dots,n$, онда је $P_{\alpha,\beta}$ реално и позитивно. У случају да је $\alpha = \beta = \mathbf{0}$, онда добијамо Пуасоново језгро за појединачно хармонијске функције на $\mathbb{D}^n \times \mathbb{T}^n$.

Нека је

$$V_{\alpha,\beta}(z) = \prod_{j=1}^{n} v_{\alpha_j,\beta_j}(z_j), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.46}$$

Тада је, за свако $z \in \mathbb{D}^n$ и свако $\zeta \in \mathbb{T}^n$,

$$P_{\alpha,\beta}(z,\zeta) = \prod_{j=1}^{n} P_{\alpha_j,\beta_j}(z_j,\zeta_j) = \prod_{j=1}^{n} v_{\alpha_j,\beta_j}(z_j\overline{\zeta}_j) = V_{\alpha,\beta}(z\cdot\overline{\zeta}). \tag{4.47}$$

За свако $1 \le j \le n$, на основу (4.30) и теореме 4.14, је $L_{\alpha_j,\beta_j}[u_{\alpha_j,\beta_j}(\overline{\zeta}_j z_j)] = 0$ и према томе $u_{\alpha_j,\beta_j}(\overline{\zeta}_j z_j)$ је (α_j,β_j)-хармонијска за $1 \le j \le n$. Дакле, важи слиједећа лема:

Лема 4.6. *(α,β)-Пуасоново језгро $P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)$ је појединачно (α,β)-хармонијска функција у односу на промјенљиву $z \in \mathbb{D}^n$ за свако фиксирано $\zeta \in \mathbb{T}^n$.*

Дефиниција 4.9. *(α,β)-Пуасонов интеграл мјере $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ дефинишемо формулом:*

$$P_{\alpha,\beta}[d\mu](z) = \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)d\mu(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.48}$$

За $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ дефинишемо $P_{\alpha,\beta}[f] = P_{\alpha,\beta}[fdm_n]$, тј.

$$P_{\alpha,\beta}[f](z) = \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)f(\zeta)dm_n(\zeta), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.49}$$

Користимо ознаку $P_{\alpha,\beta}$ и за оператор и за интегрално језгро тог оператора.

Нека је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in [0,1)^n$. За $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ имамо

$$u(r_1 e^{it_1}, \dots, r_n e^{it_n}) = \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} v_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{i(t_j-\zeta_j)}) d\mu(\zeta) \tag{4.50}$$

и стога је

$$(P_{\alpha,\beta}[d\mu])_{\mathbf{r}} = (V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}} * d\mu. \tag{4.51}$$

Када уврстимо $d\mu = f dm_n$ у (4.51) добијамо

$$(P_{\alpha,\beta}[f])_{\mathbf{r}} = (V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}} * f, \qquad f \in L^1(\mathbb{T}^n). \tag{4.52}$$

На основу (4.21), (4.22), (4.43), (4.44) и (4.46) и примјеном Фубинијеве теореме добијамо

$$\begin{aligned} \|(V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}}\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} &= \int_{\mathbb{T}^n} |(V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}}(\zeta)|\, dm_n(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} \left|(v_{\alpha_j,\beta_j})_{r_j}(\zeta_j)\right| dm_n(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} \left|c_{\alpha_j,\beta_j}(u_{\alpha_j,\beta_j})_{r_j}(\zeta_j)\right| dm_n(\zeta) \\ &\le K(\alpha,\beta), \qquad \mathbf{r} \in [0,1)^n \end{aligned} \tag{4.53}$$

гдје је

$$K(\alpha,\beta) = e^{\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{n}|\operatorname{Im}\alpha_j - \operatorname{Im}\beta_j|} \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{\Gamma(\alpha_j+1)\Gamma(\beta_j+1)}{\Gamma(\alpha_j+\beta_j+1)}\right| \frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha_j + \operatorname{Re}\beta_j + 1)}{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j}{2}+1\right)}. \tag{4.54}$$

Неједнакост (4.53) можемо записати у облику

$$\int_{\mathbb{T}^n} |P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)| dm_n(\zeta) \le K(\alpha,\beta), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.55}$$

Непосредна посљедица леме 4.6 је слиједећи став:

Став 4.5. *За било коју комплексну Борелову мјеру μ на $\mathbb{T}^n$ њен (α,β)-Пуасонов интеграл $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ је поједначно (α,β)-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$.*

4.5 H^p теорија за $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ функције

Дирихлеов проблем за систем $L_{\alpha_j,\beta_j}u = 0, 1 \leq j \leq n$

У овом потпоглављу разматрано је гранично понашање појединачно (α, β)-хармонијских функција и дато је уопштење теореме 4.15 о Дирихлеовом проблему у $\mathbb{D}$ на вишедимензиони случај.

Дефиниција 4.10. *Нека су α и β из $\mathbb{C}^n$. Дефинишемо*

$$sh^{\infty}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) = sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \cap L^{\infty}(\mathbb{D}^n)$$

и

$$Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) = \{u \in C(\overline{\mathbb{D}^n}) : u|_{\mathbb{D}^n} \in sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)\}.$$

Очигледно је $Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^{\infty}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и оба простора су Банахови простори у односу на супремум норму.

Нека је $\operatorname{Re}\alpha_j + \operatorname{Re}\beta_j > -1$ за свако $j, 1 \leq j \leq n$ и нека је $(p, q) \in H$ фиксирано. Уочимо да ред којим је задана хипергеометријска функција $F(p_j - \beta_j, q_j - \alpha_j; p_j + q_j + 1, |z_j|^2)$ конвергира апсолутно за $|z_j| \leq 1$.

Функција

$$\varphi_{p,q}(z) = \mathcal{F}_{p,q}(z) z^p \overline{z}^q, \qquad z \in \overline{\mathbb{D}}^n \tag{4.56}$$

је непрекидна на $\overline{\mathbb{D}^n}$, а на основу става 4.2 важи $\varphi_{p,q}|_{\mathbb{D}^n} \in sh_{\alpha,\beta}$. Дакле, за свако (p, q) из H функција дата са (4.56) је из простора $Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$.

Теорема 4.18. *Ако је $\varphi \in L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$, онда $P_{\alpha,\beta}[\varphi] \in sh^{\infty}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$. Штавише,*

$$\|P_{\alpha,\beta}[\varphi]\|_{L^{\infty}(\mathbb{D}^n)} \leq K(\alpha, \beta)\|\varphi\|_{L^{\infty}(\mathbb{T}^n)}. \tag{4.57}$$

Оператор $P_{\alpha,\beta}$ је ограничен линеаран оператор из $L^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ у $sh^{\infty}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$.

Доказ. На основу става 4.5 функција $P_{\alpha,\beta}[\varphi]$ је из $sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$. Како је за свако $z \in \mathbb{D}^n$

$$|P_{\alpha,\beta}[\varphi](z)| \leq \int_{\mathbb{T}^n} |P_{\alpha,\beta}(z, \zeta)||\varphi(\zeta)| dm_n(\zeta) \leq \|\varphi\|_{L^{\infty}(\mathbb{T}^n)} \int_{\mathbb{T}^n} |P_{\alpha,\beta}(z, \zeta)| dm_n$$

на основу неједнакости (4.55) добијамо (4.57).

□

Нека су $\{j_1, \ldots, j_k\}$ и $\{i_1, \ldots, i_{n-k}\}$ дисјунктни скупови индекса таквих да је њихова унија $\{1, \ldots, n\}$ и $j_1 < \ldots < j_k$ и $i_1 < \ldots < i_{n-k}$. Ако је $u \in Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и ако су $\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_{n-k}} \in \mathbb{T}$ фиксиране, поставља се питање да ли аналогне особине важе и за функцију $u_{\zeta_{i_1},\ldots,\zeta_{i_{n-k}}}$ дефинисану на $\mathbb{D}^k, k < n$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $\{j_1, \ldots, j_k\} = \{1, \ldots, k\}$.

Лема 4.7. *Нека је $1 \leq k < n$, и $\zeta_j \in \mathbb{T}$, $k < j \leq n$, и нека је $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и $\beta' = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Ако је $u \in Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$, онда је функција*

$$u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n}(z_1, \ldots, z_k) = u(z_1, \ldots, z_k, \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)$$

из простора $Csh_{\alpha',\beta'}(\mathbb{D}^k)$.

Доказ. Изаберимо низ тачака $w_l = (w^l_{k+1}, \ldots, w^l_n)$ из $\mathbb{D}^{n-k}$ који конвергира ка $\zeta = (\zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)$ и нека је $u_l(z_1, \ldots, z_k) = u(z_1, \ldots, z_k, w^l_{k+1}, \ldots, w^l_n)$. Тада u_l равномјерно конвергира ка $u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n}$ на $\overline{\mathbb{D}^k}$ и осим тога функција $u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n}$ је непрекидна на $\overline{\mathbb{D}^k}$. Отуда и како је $L_{\alpha_j,\beta_j} u_l = 0$ на $\mathbb{D}^k$ $L_{\alpha_j,\beta_j} u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n} = 0$ у слабом смислу, $1 \leq j \leq k$. Тада је $Lu_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n} = 0$ у слабом смислу, гдје је $L = L_{\alpha_1,\beta_1} + \cdots + L_{\alpha_k,\beta_k}$. Како је L елиптички оператор, на основу елиптичке регуларности је $u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n} \in C^\infty(\mathbb{D}^k)$ и стога је $L_{\alpha_j,\beta_j} u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n} = 0$ у класичном смислу за свако $1 \leq j \leq k$. Из тога слиједи да $u_{\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_n} \in Csh_{\alpha',\beta'}(\mathbb{D}^k)$. □

Уочимо да претходна лема важи за све $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^n$.

Теорема која показује да свака функција u која је појединачно (α, β)-хармонијска на $\mathbb{D}^n$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}^n}$ може бити реконструисана из њене граничне вриједности на истакнутој граници гласи:

Теорема 4.19. *Ако је $u \in Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$, онда је $u(z) = P_{\alpha,\beta}[u|_{\mathbb{T}^n}](z)$ за свако $z \in \mathbb{D}^n$.*

Доказ. Нека је $z = (z', z_n) \in \mathbb{D}^n$ и нека је $g_{z'}(\lambda) = u(z', \lambda)$, $|\lambda| \leq 1$. Јасно је да је $g_{z'}$ непрекидна $\overline{\mathbb{D}}$ и (α_n, β_n)-хармонијска на $\mathbb{D}$. Отуда, на основу теореме 4.15 добијамо

$$u(z', z_n) = g_{z'}(z_n) = \int_{\mathbb{T}} P_{\alpha_n,\beta_n}(z_n, \zeta_n) u(z', \zeta_n) dm_1(\zeta_n).$$

Функција $u_{\zeta_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = u(z_1, \ldots, z_{n-1}, \zeta_n)$ је, на основу леме 4.7, $((\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}), (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}))$-хармонијска за свако $\zeta_n \in \mathbb{T}$, па аналогно добијамо

$$u_{\zeta_n}(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \int_{\mathbb{T}} P_{\alpha_{n-1},\beta_{n-1}}(z_{n-1}, \zeta_{n-1}) u_{\zeta_{n-1},\zeta_n}(z_1, \ldots, z_{n-2}) dm_1(\zeta_{n-1})$$

и онда је

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}} P_{\alpha_n,\beta_n}(z_n,\zeta_n) \left(\int_{\mathbb{T}} P_{\alpha_{n-1},\beta_{n-1}}(z_{n-1},\zeta_{n-1}) u(z_1,\ldots,z_{n-2},\zeta_{n-1},\zeta_n) dm_1(\zeta_{n-1}) \right) dm_1(\zeta_n).$$

Јасно је да можемо поновити овај поступак, користећи лему 4.7 у сваком кораку и добити n-тоструки (узастопни) интеграл и отуда примјеном Фубинијеве теореме важи

$$u(z) = \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} P_{\alpha_j,\beta_j}(z_j,\zeta_j) u(\zeta) dm_n(\zeta) = P_{\alpha,\beta}[u|_{\mathbb{T}^n}](z).$$

$\square$

Теорема 4.20. *Ако је $\psi \in C(\mathbb{T}^n)$ онда $P_{\alpha,\beta}[\psi]$ има нейрекидно йродужење и на $\overline{\mathbb{D}^n}$, йри чему је $u \in Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и $u|_{\mathbb{T}^n} = \psi$.*

Доказ. Нека је Y скуп свих комплексно-вриједносних функција дефинисаних на $\mathbb{D}^n$ које се могу непрекидно продужити на $\overline{\mathbb{D}^n}$. Простор $X = CB(\mathbb{D}^n)$ свих непрекидних ограничених функција на $\mathbb{D}^n$ са супремум нормом је Банахов простор и Y је затворен векторски потпростор простора X.

Нека је A скуп свих коначних сума функција облика

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta_1)\psi_2(\zeta_2)\cdots\psi_n(\zeta_n), \qquad \zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n) \in \mathbb{T}^n, \tag{4.58}$$

гдје су ψ_j комплексно-вриједносне непрекидне функције на $\mathbb{T}$ за свако $1 \le j \le n$. Скуп A је алгебра непрекидних функција на компактном Хаусдорфовом скупу $\mathbb{T}^n$. Осим тога алгебра A је затворена у односу на конјуговање, раздваја тачке из $\mathbb{T}^n$ и садржи константе. Отуда, на основу теореме Стоун-Вајерштраса, A је густ скуп у $C(\mathbb{T}^n)$.

За функције ψ облика (4.58) према (4.47) вриједи

$$P_{\alpha,\beta}[\psi](z_1,\ldots,z_n) = \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)\psi(\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} P_{\alpha_j,\beta_j}(z_j,\zeta_j)\psi_j(\zeta_j)dm_n(\zeta)$$

па на основу Фубинијеве теореме је

$$P_{\alpha,\beta}[\psi](z_1,\ldots,z_n) = \prod_{j=1}^{n} (P_{\alpha_j,\beta_j}[\psi_j])(z_j).$$

На основу теореме 4.15 $P_{\alpha_j,\beta_j}[\psi_j]$ представља продужење функције ψ_j на $\overline{\mathbb{D}}$ за свако $1 \leq j \leq n$ и отуда је

$$P_{\alpha,\beta} : A \to Y$$

и рестрикција од $P_{\alpha,\beta}[\psi]$ на $\mathbb{T}^n$ је једнако ψ, за $\psi \in A$. Штавише, на основу теореме 4.18 је за $\psi \in C(\mathbb{T}^n)$ и $\varphi \in A$

$$\|P_{\alpha,\beta}[\psi] - P_{\alpha,\beta}[\varphi]\|_{L^\infty(\mathbb{D}^n)} = \|P_{\alpha,\beta}[\psi - \varphi]\|_{L^\infty(\mathbb{D}^n)} \leq K(\alpha,\beta)\|\psi - \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}$$

па је $P_{\alpha,\beta} : C(\mathbb{T}^n) \to CB(\mathbb{D}^n)$ непрекидан. Како је A густ у $C(\mathbb{T}^n)$ и Y затворен потпростор простора X слиједи да $P_{\alpha,\beta}$ пресликава $C(\mathbb{T}^n)$ у Y и овим је доказ завршен. □

Из теореме 4.20 и теореме 4.19 слиједи да су $C(\mathbb{T}^n)$ и $Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ изоморфни као Банахови простори, јер оператор $P_{\alpha,\beta} : C(\mathbb{T}^n) \to Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ омогућава изоморфизам (не нужно изометријски).

Осим тога, непосредна посљедица теореме 4.20 и теореме 4.19 је слиједеће рјешење Дирихлеовог проблема за наш систем парцијалних диференцијалних једначина.

Став 4.6. *За свако $\varphi \in C(\mathbb{T}^n)$ Дирихлеов проблем*

$$\begin{cases} L_{\alpha_j,\beta_j} u = 0, & z \in \mathbb{D}^n, \quad 1 \leq j \leq n \\ u(z) = \varphi(z), & z \in \mathbb{T}^n. \end{cases}$$

има јединствено рјешење и из простора $Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ при чему је $u(z) = P_{\alpha,\beta}[\varphi](z)$ за $z \in \mathbb{D}^n$.

Слиједећа теорема је локална верзија теореме 4.20.

Теорема 4.21. *Претпоставимо да је $\varphi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ непрекидна у $\zeta^0 = (e^{i\theta_1^0}, \ldots, e^{i\theta_n^0})$ на $\mathbb{T}^n$ и да припада $L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Тада $u = P_{\alpha,\beta}[\varphi]$ има непрекидно продужење на $\mathbb{D}^n \cup \{\zeta^0\}$.*

Доказ. Размотримо помоћну функцију $\varphi(\zeta) - \varphi(\zeta^0)$. За константну функцију $\psi(\zeta) = \varphi(\zeta^0)$, на основу теореме 4.20, $P_{\alpha,\beta}[\psi]$ има непрекидно продужење на $\overline{\mathbb{D}^n}$, тако да без умањења општости можемо претпоставити да је $\varphi(\zeta^0) = 0$.

За $z = (r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_n e^{i\theta_n})$ из $\mathbb{D}^n$ на основу основне интегралне неједнакости, Фубинијеве теореме и (4.47) имамо

$$\begin{aligned}
|u(z)| =& \left| \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} P_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{i\theta_j}, \zeta_j)\varphi(\zeta) dm_n(\zeta) \right| \\
\leq& \int_{\mathbb{T}^n} |\varphi(\zeta)| \prod_{j=1}^{n} |P_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{i\theta_j}, \zeta_j)| dm_n(\zeta) \\
=& (2\pi)^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \mid \varphi(e^{it_1}, \dots, e^{it_n}) \mid \prod_{j=1}^{n} \mid v_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{i(\theta_j - t_j)}) \mid dt_1 \dots dt_n \\
=& (2\pi)^{-n} \int_{-\pi}^{\pi} \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \left|\varphi(e^{i(\theta_1 - t_1)}, \dots, e^{i(\theta_n - t_n)})\right| \prod_{j=1}^{n} \left|v_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{it_j})\right| dt_1 \dots dt_n
\end{aligned}$$

Нека је, за $0 < \delta < \pi$ и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in [-\pi, \pi]^n$,

$$M_\infty(\varphi, \theta, \delta) = \sup_{|\theta'_j - \theta_j| < \delta} |\varphi(e^{i\theta'_1}, \dots, e^{i\theta'_n})|.$$

Комплемент скупа $[-\delta, \delta]^n$ у односу на $[-\pi, \pi]^n$ је садржан у унији скупова

$$S_j = \{\theta \in [-\pi, \pi]^n : |\theta_j| \geq \delta\}, \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Према томе

$$|u(z)| \leq I_0(z, \delta) + I_1(z, \delta) + I_2(z, \delta) + \cdots + I_n(z, \delta),$$

гдје је

$$I_0(z, \delta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[-\delta,\delta]^n} |\varphi(e^{i(\theta_1 - t_1)}, \dots, e^{i(\theta_n - t_n)})| \prod_{j=1}^{n} |v_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{it_j})| dt_1 \dots dt_n$$

и за свако $j, 1 \leq j \leq n$:

$$I_j(z, \delta) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{S_j} |\varphi(e^{i(\theta_1 - t_1)}, \dots, e^{i(\theta_n - t_n)})| \prod_{k=1}^{n} |v_{\alpha_k,\beta_k}(r_k e^{it_k})| dt_1 \dots dt_n.$$

За $t \in [-\delta, \delta]^n$ је $|(\theta_j - t_j) - \theta_j| \leq \delta$ за свако $j, 1 \leq j \leq n$, па је

$$I_0(z, \delta) \leq \frac{M_\infty(\varphi, \theta, \delta)}{(2\pi)^n} \int_{[-\delta,\delta]^n} \prod_{j=1}^{n} |v_{\alpha_j,\beta_j}(r_j e^{it_j})| dt_1 \dots dt_n$$

и онда је на основу (4.53)

$$I_0(z, \delta) \leq K(\alpha, \beta) M_\infty(\varphi, \theta, \delta)$$

гдје је $K(\alpha,\beta)$ дато са (4.54).

За $1\le j\le n$, како је $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T}^n)$, на основу Фубинијеве теореме је

$$I_j(z,\delta)\le \frac{\|\varphi\|_\infty}{(2\pi)^n}\prod_{k\ne j}\int_{-\pi}^{\pi}|v_{\alpha_k,\beta_k}(r_ke^{it_k})|dt_k\cdot\int_{\delta<|t_j|\le\pi}|v_{\alpha_j,\beta_j}(r_je^{it_j})|dt_j$$

и отуда је на основу (4.53)

$$I_j(z,\delta)\le\frac{\pi-\delta}{\pi}K_j(\alpha,\beta)\|\varphi\|_\infty\sup_{\delta<|t_j|\le\pi}|u_{\alpha_j,\beta_j}(r_je^{it_j})|,$$

гдје је $K_j(\alpha,\beta)=K(\alpha,\beta)e^{-\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j-\operatorname{Im}\beta_j|}\frac{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j}{2}+1\right)}{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1)}$.

За свако $0\le r<1$ и $-\pi<\theta<\pi$ важи елементарна неједнакост $|1-re^{i\theta}|\ge\frac{|\theta|}{\pi}$ па на основу неједнакости (4.23), за $\pi\ge|t_j|>\delta$, важи

$$\begin{aligned}\left|u_{\alpha_j,\beta_j}(re^{it_j})\right| &\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j-\operatorname{Im}\beta_j|}\frac{\left(1-r_j^2\right)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}}{\left|1-re^{it_j}\right|^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}\\ &\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j-\operatorname{Im}\beta_j|}\frac{\left(1-r_j^2\right)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}}{\left|t_j\right|^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}\cdot\pi^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}\\ &< e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j-\operatorname{Im}\beta_j|}\frac{\left(1-r_j^2\right)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}}{\delta^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}\cdot\pi^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}\end{aligned}$$

и отуда је

$$\sup_{\delta<|t_j|\le\pi}|u_{\alpha_j,\beta_j}(r_je^{it_j})|\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j-\operatorname{Im}\beta_j|}\frac{\pi^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}{\delta^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}(1-r_j^2)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}.$$

Нека је, за $1\le j\le n$

$$C_j(\delta)=\frac{\pi-\delta}{\pi}e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j-\operatorname{Im}\beta_j|}\frac{\pi^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}{\delta^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}}.$$

Тада је

$$I_j(z,\delta)\le C_j(\delta)K_j(\alpha,\beta)(1-r_j^2)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}\|\varphi\|_\infty.$$

Означимо $C_{\alpha,\beta}(\delta)=\max_j C_j(\delta)K_j(\alpha,\beta)$. Тада је

$$|u(z)|\le K(\alpha,\beta)M_\infty(\varphi,\theta,\delta)+C_{\alpha,\beta}(\delta)\|\varphi\|_\infty\sum_{j=1}^n(1-r_j^2)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}. \tag{4.59}$$

Нека је $\zeta=(e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n})$. С обзиром да је функција φ непрекидна у ζ^0, онда за задано $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тако да кадгод је $|\ \theta_j-\theta_j^0\ |<2\delta$, $1\le j\le n$, онда је $|\ \varphi(\zeta)\ |<\varepsilon$. Дакле, ако је $|\ \theta_j-\theta_j^0\ |<\delta$, за свако $1\le j\le n$, онда је $M_\infty(\varphi,\theta,\delta)\le\varepsilon$. Како је $\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j>-1$ за свако $j,(1\le j\le n)$ и знајући да $z=(r_1e^{i\theta_1},\dots,r_ne^{i\theta_n})$ конвергира ка ζ^0 ако и само ако $r_j\to1$ за свако $1\le j\le n$ и $\theta_j\to\theta_j^0$ за свако $1\le j\le n$, тврђење слиједи из (4.59). $\square$

Већ је показано да је функција $\varphi_{p,q}(z) = \mathcal{F}_{p,q}(z)z^p\overline{z}^q$ из простора $Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$. Примјетимо да је $\varphi_{p,q}(\zeta) = \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})\zeta^p\overline{\zeta}^q$ за $\zeta \in \mathbb{T}^n$. На основу става 4.6 за функцију $\varphi_{p,q}(\zeta) = \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})\zeta^p\overline{\zeta}^q \in C(\mathbb{T}^n)$ постоји јединствено рјешење $u \in Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ тако да је

$$u(z) = P_{\alpha,\beta}[\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})\zeta^p\overline{\zeta}^q](z) \quad \text{за} \quad z \in \mathbb{D}^n \quad \text{и} \quad u(\zeta) = \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})\zeta^p\overline{\zeta}^q$$

и отуда је

$$P_{\alpha,\beta}[\zeta^p\overline{\zeta}^q](z) = \frac{\mathcal{F}_{p,q}(z)}{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})}z^p\overline{z}^q, \qquad z \in \mathbb{D}^n, \tag{4.60}$$

јер због јединствености рјешења мора бити $u(z) = \varphi_{p,q}(z)$ за $z \in \mathbb{D}^n$. С обзиром да је $\|\zeta^p\overline{\zeta}^q\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)} = 1$ на основу теореме 4.18 добијамо слиједећи став.

Став 4.7. *За свако $(p,q) \in H$ вриједи слиједећа процјена:*

$$\left|\frac{\mathcal{F}_{p,q}(z)}{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})}z^p\overline{z}^q\right| \le K(\alpha,\beta), \qquad z \in \overline{\mathbb{D}}^n. \tag{4.61}$$

Ако је $n = 1$ за свако $p \in \mathbb{N}_0$ на основу (4.61) добијамо слиједећу процјену

$$\begin{aligned}&\max\left\{\left|\frac{F(-\alpha,p-\beta;p+1,|z|^2)}{F(-\alpha,p-\beta;p+1,1)}z^p\right|,\left|\frac{F(-\beta,p-\alpha;p+1,|z|^2)}{F(-\beta,p-\alpha;p+1,1)}z^p\right|\right\}\\ &\le e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha-\operatorname{Im}\beta|}\left|\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right|\frac{\Gamma(\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta+1)}{\Gamma^2\left(\frac{\operatorname{Re}\alpha+\operatorname{Re}\beta}{2}+1\right)}.\end{aligned}$$

гдје је $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) > -1$ и $|z| \le 1$.

На основу теореме 4.14 функција $U_{\alpha,\beta}(z) = \prod_{j=1}^n u_{\alpha,\beta}(z_j)$ је појединачно (α,β)-хармонијска на $\mathbb{D}^n$. Већ је уочено да је, за свако $1 \le j \le n$, функција $u_{\alpha_j,\beta_j}(\overline{\zeta_j}z_j)$ (α_j,β_j)-хармонијска, при чему је $|\zeta_j| = 1$ фиксирано и отуда је $U_{\alpha,\beta}(\zeta\cdot z)$ појединачно (α,β)-хармонијска за фиксирано $\zeta \in \mathbb{T}^n$. С друге стране, уврштавањем $\zeta = \mathbf{r}$ у (4.29) добијамо

$$L_{\alpha_j,\beta_j}[U(\mathbf{r}\cdot z)] = (L_{\alpha_j,\beta_j}U)(r\cdot z) - (1-r_j^2)\frac{\partial^2 U}{\partial z_j\partial\overline{z_j}}(\mathbf{r}\cdot z), \qquad \mathbf{r} \in [0,1)^n, \tag{4.62}$$

што показује да за појединачно (α,β)-хармонијску функцију U функција $z \mapsto U(\mathbf{r}\cdot z)$ не мора да буде појединачно (α,β)-хармонијска, осим у случају појединачно $(\mathbf{0},\mathbf{0})$-хармонијске функције тј. појединачно хармонијске функције за коју је функција $z \mapsto U(\mathbf{r}\cdot z)$ појединачно хармонијска. То доводи до потешкоћа у примјени стандардних аргумената на интегралне репрезентације које укључују Банах–Алаоглуову теорему. Слиједећа теорема омогућава нам да превазиђемо ове потешкоће, видјети доказ теореме 4.26 и доказ теореме 4.27.

Теорема 4.22. *Ако је u појединачно (α,β)-хармонијска на $\mathbb{D}^n$, онда важи*

$$\lim_{\mathbf{r}\to 1} P_{\alpha,\beta}[u_{\mathbf{r}}](z) = u(z), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.63}$$

Доказ. На основу теореме 4.17 функција u је облика

$$u(z) = \sum_{(p,q)\in H} c_{p,q}\mathcal{F}_{p,q}(z) z^p \overline{z}^q, \qquad z \in \mathbb{D}^n, \quad c_{p,q} = \frac{\partial^{(p,q)}u}{p!q!}(\mathbf{0}), \tag{4.64}$$

и ред равномјерно конвергира на сваком компактном скупу $K \subset \mathbb{D}^n$. Отуда и како је $\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r}\cdot\zeta) = \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r}), \zeta \in \mathbb{T}^n$, имамо

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathbf{r}\to 1} P_{\alpha,\beta}[u_{\mathbf{r}}](z) &= \lim_{\mathbf{r}\to 1} \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta) u(\mathbf{r}\cdot\zeta) dm_n(\zeta) \\
&= \lim_{\mathbf{r}\to 1} \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta) \sum_{(p,q)\in H} c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r}\cdot\zeta)\zeta^p\overline{\zeta}^q dm_n(\zeta) \\
&= \lim_{\mathbf{r}\to 1} \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta) \sum_{(p,q)\in H} c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r})\zeta^p\overline{\zeta}^q dm_n(\zeta) \\
&= \lim_{\mathbf{r}\to 1} \sum_{(p,q)\in H} c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r}) \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)\zeta^p\overline{\zeta}^q dm_n(\zeta) \\
&= \lim_{\mathbf{r}\to 1} \sum_{(p,q)\in H} c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r}) P_{\alpha,\beta}[\zeta^p\overline{\zeta}^q](z)
\end{aligned}$$

и онда је, на основу (4.60),

$$\lim_{\mathbf{r}\to 1} P_{\alpha,\beta}[u_{\mathbf{r}}](z) = \lim_{\mathbf{r}\to 1} \sum_{(p,q)\in H} c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \frac{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r})}{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})} \mathcal{F}_{p,q}(z) z^p\overline{z}^q. \tag{4.65}$$

Нека је

$$A(p,q,\mathbf{r},z) = c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \frac{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r})}{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})} \mathcal{F}_{p,q}(z) z^p\overline{z}^q.$$

Треба да докажемо да ред $\sum_{(p,q)\in H} A(p,q,\mathbf{r},z)$ равномерно конвергентан по $\mathbf{r} \in [0,1)^n$ за свако фиксирано $z \in \mathbb{D}^n$ и да постоји $\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{1}} A(p,q,\mathbf{r},z)$ за свако $(p,q) \in H$. На основу неједнакости (4.37) за $(\gamma,\delta) = (\mathbf{0},\mathbf{0})$ и $N = 2$ добијамо да је

$$|A(p,q,\mathbf{r},z)| \le C_z \left|\frac{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r})}{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})}\right| \mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \prod_{j=1}^n p_j^{-2} q_j^{-2},$$

гдје је $C_z = \max\limits_{|(s,t)|\le 2n} \|\partial^{(s,t)}u\|_{C(r\overline{\mathbb{D}}^n)}$ а $r \in (0,1)$ бирамо тако да $z \in r\overline{\mathbb{D}}^n$ и при чему је $p_j^{-2} = 1$, ако је $p_j = 0$ и $q_j^{-2} = 1$, ако је $q_j = 0$. Отуда примјеном неједнакости

(4.61) добијамо да је

$$|A(p,q,\mathbf{r},z)| \leq C_z K(\alpha,\beta)\prod_{j=1}^{n} p_j^{-2} q_j^{-2}.$$

С обзиром да ред

$$\sum_{(p,q)\in H}\prod_{j=1}^{n} p_j^{-2} q_j^{-2}$$

конвергира и чланови реда

$$\sum_{(p,q)\in H} C_z K(\alpha,\beta)\prod_{j=1}^{n} p_j^{-2} q_j^{-2}$$

не зависе од $\mathbf{r}$, дозвољено је да лимес и сума замијене мјесто па је

$$\lim_{\mathbf{r}\to 1} P_{\alpha,\beta}[u_{\mathbf{r}}](z) = \sum_{(p,q)\in H}\lim_{\mathbf{r}\to 1} c_{p,q}\mathbf{r}^p\mathbf{r}^q \frac{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r})}{\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})}\mathcal{F}_{p,q}(z) z^p \overline{z}^q.$$

Ако је $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$, хипергеометријска функција $F(a,b;c,x)$ има граничну вриједност у 1 и како је

$$\lim_{\mathbf{r}\to 1}\mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{r}) = \lim_{\mathbf{r}\to 1}\prod_{j=1}^{n} F_{p_j,q_j}(r_j^2) = \mathcal{F}_{p,q}(\mathbf{1})$$

доказ је завршен. □

$sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ простори

Дефиниција 4.11. *Нека је $1 \leq p < \infty$. Дефинишемо простор $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ као простор свих $u \in sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ таквих да је*

$$\|u\|_{\alpha,\beta;p} = \sup_{\mathbf{r}\in[0,1)^n}\left(\int_{\mathbb{T}^n} |u_{\mathbf{r}}(\zeta)|^p dm_n(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4.66}$$

Јасно је да је простор $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ Банахов простор у односу на дату норму.

Став 4.8. *Ако је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$, онда $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ припада простору $sh^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и*

$$\|u\|_{\alpha,\beta;1} \leq K(\alpha,\beta)\|\mu\|.$$

Доказ. На основу става 4.5 функција u је појединачно (α,β)-хармонијска а на основу (4.51) и (4.53) важи

$$\|u_{\mathbf{r}}\|_1 = \|(V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}} * d\mu\|_1 \leq \|(V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}}\|_1\|\mu\| \leq K(\alpha,\beta)\|\mu\|, \qquad \mathbf{r}\in[0,1)^n.$$

□

У ставу 4.8 је доказано да је $P_{\alpha,\beta}$ ограничен линеаран оператор из $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ у $sh^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и да је норма оператора $P_{\alpha,\beta}$ мања или једнака од $K(\alpha,\beta)$.

Следећа лема ће бити корисна у аргументима који укључују дуалност.

Лема 4.8. *Претпоставимо да су μ и ν комплексне Борелове мјере на $\mathbb{T}^n$, $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ и $v = P_{\beta,\alpha}[d\nu]$ и нека је $\mathbf{r} \in [0,1)^n$. Тада је*

$$\langle u_{\mathbf{r}}, d\nu\rangle = \langle v_{\mathbf{r}}, d\mu\rangle,$$

или експлицитно

$$\int_{\mathbb{T}^n} (P_{\alpha,\beta}[d\mu])(\mathbf{r}\cdot\zeta)d\nu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} (P_{\beta,\alpha}[d\nu])(\mathbf{r}\cdot\xi)d\mu(\xi). \tag{4.67}$$

Доказ. Покажимо да је $P_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}\cdot\zeta,\xi) = P_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}\cdot\xi,\zeta)$. На основу (4.45) важи

$$\begin{aligned}
P_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}\cdot\zeta,\xi) &= \prod_{j=1}^n c_{\alpha_j,\beta_j}\frac{(1-r_j^2)^{\alpha_j+\beta_j+1}}{(1-r_j\zeta_j\overline{\xi_j})^{\alpha_j+1}(1-r_j\overline{\zeta_j}\xi_j)^{\beta_j+1}}\\
&= \prod_{j=1}^n c_{\alpha_j,\beta_j}\frac{(1-r_j^2)^{\alpha_j+\beta_j+1}}{(1-r_j\xi_j\overline{\zeta_j})^{\beta_j+1}(1-r_j\overline{\xi_j}\zeta_j)^{\alpha_j+1}}\\
&= P_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}\cdot\xi,\zeta)
\end{aligned}$$

и отуда је на основу (4.48) и Фубинијеве теореме

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} (P_{\alpha,\beta}[d\mu])(\mathbf{r}\cdot\zeta)d\nu(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(\mathbf{r}\cdot\zeta,\xi)d\mu(\xi)\right)d\nu(\zeta)\\
&= \int_{\mathbb{T}^n}\left(\int_{\mathbb{T}^n} P_{\beta,\alpha}(\mathbf{r}\cdot\xi,\zeta)d\nu(\zeta)\right)d\mu(\xi)\\
&= \int_{\mathbb{T}^n} (P_{\beta,\alpha}[d\nu])(\mathbf{r}\cdot\xi)d\mu(\xi).
\end{aligned}$$

□

У [76] је доказано ако је $f(z) = P[d\mu](z)$ гдје је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$, да онда $f_r dm \to d\mu$ слабо* када $r \to 1$ при чему је P Пуасоново језгро за појединачно хармонијске функције (случај $\alpha_j = \beta_j = 0$). Сљедећа теорема је уопштење тог резултата за појединачно (α,β)-хармонијске функције и у исто вријеме доказана је слаба* конвергенција при општијим лимесима.

Теорема 4.23. *Нека је $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ гдје је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Тада $u_{\mathbf{r}} dm_n$ конвергира слабо* ка $d\mu$ када $\mathbf{r} = (r_1,\ldots,r_n) \to (1,\ldots,1) = \mathbf{1}$ у $[0,1)^n$.*

Доказ. Фиксирајмо $\varphi \in C(\mathbb{T}^n)$ и нека је $v = P_{\beta,\alpha}[\varphi]$. Треба да докажемо да

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{1}} \int_{\mathbb{T}^n} u(\mathbf{r}\cdot\zeta)\varphi(\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\xi)d\mu(\xi).$$

На основу леме 4.8 за $d\nu = \varphi dm_n$ важи

$$\int_{\mathbb{T}^n} u(\mathbf{r}\cdot\zeta)\varphi(\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} v(\mathbf{r}\cdot\xi)d\mu(\xi).$$

Међутим, на основу теореме 4.20, на скупу $\mathbb{T}^n$

$$v(\mathbf{r}\cdot\xi) \rightrightarrows \varphi(\xi) \quad \text{кад} \quad \mathbf{r}\to\mathbf{1}.$$

Отуда је

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{1}} \int_{\mathbb{T}^n} u(\mathbf{r}\cdot\zeta)\varphi(\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} \varphi(\xi)d\mu(\xi).$$

□

Теорема 4.24. *Ако је $\psi \in L^p(\mathbb{T}^n)$ за неко $1 \le p \le \infty$, онда $P_{\alpha,\beta}[\psi]$ је из простора $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и*

$$\|P_{\alpha,\beta}[\psi]\|_{\alpha,\beta;p} \le K(\alpha,\beta)\|\psi\|_p. \tag{4.68}$$

За $1 \le p < \infty$ важи

$$\lim_{\mathbf{r}\to 1} \|(P_{\alpha,\beta}[\psi])_{\mathbf{r}} - \psi\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = 0, \qquad \psi \in L^p(\mathbb{T}^n). \tag{4.69}$$

Доказ. За $\psi dm_n = d\mu$ на основу става 4.5 функција $u = P_{\alpha,\beta}[\psi]$ је појединачно (α,β)-хармонијска а на основу (4.52) и (4.53) примјеном Јангове неједнакости за конволуцију важи

$$\|u_{\mathbf{r}}\|_p = \|(V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}} * \psi\|_p \le \|(V_{\alpha,\beta})_{\mathbf{r}}\|_1\|\psi\|_p \le K(\alpha,\beta)\|\psi\|_p, \qquad \mathbf{r}\in[0,1)^n, \tag{4.70}$$

гдје је $K(\alpha,\beta)$ дато са (4.54). Узимајући супремум по свим $\mathbf{r} \in [0,1)^n$ у (4.70) добијамо да $P_{\alpha,\beta}[\psi] \in sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$.

Претпоставимо да је $1 \le p < \infty$. Нека је $\psi \in L^p(\mathbb{T}^n)$ и нека је $\varepsilon > 0$. Како је $C(\mathbb{T}^n)$ густ у $L^p(\mathbb{T}^n)$ можемо изабрати $\varphi \in C(\mathbb{T}^n)$ тако да је $\|\varphi - \psi\|_p < \varepsilon$. Тада, на основу (4.70), важи:

$$\begin{aligned}
\|(P_{\alpha,\beta}[\psi])_{\mathbf{r}} - \psi\|_p &= \|(P_{\alpha,\beta}[\psi-\varphi])_{\mathbf{r}} + ((P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi) + (\varphi - \psi)\|_p \\
&\le \|(P_{\alpha,\beta}[\psi-\varphi])_{\mathbf{r}}\|_p + \|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_p + \|\varphi-\psi\|_p \\
&\le K(\alpha,\beta)\|\varphi-\psi\|_p + \|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_p + \varepsilon \\
&\le [K(\alpha,\beta)+1]\varepsilon + \|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_p
\end{aligned}$$

Међутим, $\|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_p \le \|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_{C(\mathbb{T}^n)}$ па је

$$\|(P_{\alpha,\beta}[\psi])_{\mathbf{r}} - \psi\|_p \le [K(\alpha,\beta)+1]\varepsilon + \|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_{C(\mathbb{T}^n)}. \tag{4.71}$$

С обзиром да на основу теореме 4.20 важи $\lim_{\mathbf{r}\to 1} \|(P_{\alpha,\beta}[\varphi])_{\mathbf{r}} - \varphi\|_{C(\mathbb{T}^n)} = 0$ из (4.71) добијамо

$$\limsup_{\mathbf{r}\to 1} \|(P_{\alpha,\beta}[\psi])_{\mathbf{r}} - \psi\|_p \le [K(\alpha,\beta)+1]\varepsilon$$

и тиме је добијено (4.69). □

Простор непрекидних функција $C(\mathbb{T}^n)$ је густ у $L^p(\mathbb{T}^n), 1 \le p < +\infty$. То не важи за $p = +\infty$, јер равномерни лимес низа непрекидних функција мора да буде непрекидна а функција из $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ не мора да буде непрекидна. Ако је $p = +\infty$ имамо слабо* конвергенцију:

Теорема 4.25. *Нека је $u = P_{\alpha,\beta}[f]$ при чему је $f \in L^\infty(\mathbb{T}^n)$. Тада $u_{\mathbf{r}}$ конвергира слабо* ка f када $\mathbf{r} = (r_1,\dots,r_n) \to (1,\dots,1) = \mathbf{1}$ у $[0,1)^n$.*

Доказ. Фиксирамо $\varphi \in L^1(\mathbb{T}^n)$ и нека је $v = P_{\beta,\alpha}[\varphi]$. На основу леме 4.8 за $d\nu = \varphi dm_n$ и $d\mu = f dm_n$ важи

$$\int_{\mathbb{T}^n} u(\mathbf{r}\cdot\zeta)\varphi(\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} v(\mathbf{r}\cdot\xi)f(\xi)dm_n(\xi).$$

Међутим, на основу теореме 4.24, $v(\mathbf{r}\cdot\xi)$ конвергира у $L^1(\mathbb{T}^n)$ норми ка $\varphi(\xi)$ кад $\mathbf{r}$ тежи ка $\mathbf{1}$. Отуда је

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{1}} \int_{\mathbb{T}^n} u(\mathbf{r}\cdot\zeta)\varphi(\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\varphi(\xi)dm_n(\xi).$$

□

4.6 Интегрална репрезентација функција из $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$, $1 \le p \le +\infty$

У овом потпоглављу полазимо од појединачно (α,β)-хармонијске функције дефинисане на $\mathbb{D}^n$ и показујемо да је можемо презентовати као $P_{\alpha,\beta}[\psi]$ или $P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ уз одговарајући услов.

Теорема 4.26. *Нека је $1 < p \le \infty$ и претпоставимо да $u \in sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ задовољава услов*

$$\sup_{0\le r<1} \|u_r\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} < \infty. \tag{4.72}$$

Тада постоји јединствена функција $\psi \in L^p(\mathbb{T}^n)$ таква да је $u = P_{\alpha,\beta}[\psi]$.

Доказ. Како је $p > 1$, $L^p(\mathbb{T}^n)$ је дуални простор простора $L^q(\mathbb{T}^n)$, гдје је $1/p + 1/q = 1$ и осим тога простор $L^q(\mathbb{T}^n), 1 \le q < +\infty$ је сеперабилан простор. За низ функција $u((1-1/k)\zeta)$ на $\mathbb{T}^n$ на основу (4.72) важи $\|u_{1-\frac{1}{k}}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \le C$, па на основу Банах–Алаоглуове теореме низ $u((1-1/k)\zeta)$ има слабо* конвергентан подниз. Отуда постоји низ $(r_k)_{k=0}^{\infty}$ из $[0,1)$ који конвергира ка 1 и постоји функција ψ из $L^p(\mathbb{T}^n)$ тако да је

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}^n}\varphi(\zeta)u(r_k\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n}\varphi(\zeta)\psi(\zeta)dm_n(\zeta) \quad \text{за свако} \quad \varphi \in L^q(\mathbb{T}^n). \tag{4.73}$$

Нека је $\varphi_z(\zeta) = P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)$ гдје је $z \in \mathbb{D}^n$ фиксирано. Како је $\varphi_z \in C(\mathbb{T}^n) \subset L^q(\mathbb{T}^n)$ на основу (4.73) и теореме 4.22 важи

$$\begin{aligned}
P_{\alpha,\beta}[\psi](z) &= \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)\psi(\zeta)dm_n(\zeta)\\
&= \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)u(r_k\zeta)dm_n(\zeta)\\
&= \lim_{k\to\infty} P_{\alpha,\beta}[u_{r_k}](z)\\
&= u(z).
\end{aligned}$$

Јединственост слиједи из теореме 4.25 и теореме 4.24. □

У доказу теореме 4.26 користили смо чињеницу да је $L^p(\mathbb{T}^n)$ дуални простор простора $L^q(\mathbb{T}^n)$ кад год је $1 < p \le \infty$. Али $L^1(\mathbb{T}^n)$ није дуални простор ниједног простора. Због тога је у теореми 4.26 претпоставка $p > 1$ суштинска и предложени доказ за $1 < p \le \infty$ не функционише ако је $p = 1$. Да бисмо превазишли ову потешкоћу, $L^1(\mathbb{T}^n)$ сматрамо подскупом $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Према Рисовој теореми $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ је дуал од $C(\mathbb{T}^n)$.

Теорема 4.27. *Претпоставимо да је u појединачно (α,β)-хармонијска функција на $\mathbb{D}^n$ таква да је*

$$\sup_{0\le r<1}\int_{\mathbb{T}^n} \mid u(r\zeta) \mid dm_n(\zeta) < \infty. \tag{4.74}$$

Тада постоји јединствена комплексна Борелова мјера μ на $\mathbb{T}^n$ таква да је $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$.

Доказ. На основу (4.74) низ $u((1-1/k)\zeta)dm_n(\zeta)$ комплексних Борелових мјера на $\mathbb{T}^n$ је ограничен на $\mathcal{M}(\mathbb{T}^n) = C(\mathbb{T}^n)^*$ и отуда на основу Банах–Алаоглуове теореме и чињенице да је $C(\mathbb{T}^n)$ сепарабилан добијамо слабо* конвергентан подниз тог низа. Тада постоји низ $(r_l)_{l=0}^{\infty}$ из $[0,1)$ тако да је $\lim_{l\to\infty} r_l = 1$ и постоји комплексна Борелова мјера μ он $\mathbb{T}^n$ таква да је

$$\lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{T}^n} g(\zeta)u(r_l\zeta)dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} g(\zeta)d\mu(\zeta) \qquad \text{за свако} \quad g\in C(\mathbb{T}^n). \tag{4.75}$$

За $z\in\mathbb{D}^n$ фиксирано, нека је $g_z(\zeta) = P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)$. Како је g_z непрекидна на $\mathbb{T}^n$ можемо применити (4.75). Отуда је на основу теореме 4.22

$$\begin{aligned} P_{\alpha,\beta}[d\mu](z) &= \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)d\mu(\zeta) \\ &= \lim_{l\to\infty}\int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)u(r_l\zeta)dm_n(\zeta) \\ &= \lim_{l\to\infty} P_{\alpha,\beta}[u_{r_l}](z) \\ &= u(z). \end{aligned}$$

Јединственост слиједи из теореме 4.23. □

На основу теореме 4.27 и става 4.8 добијамо да су слиједећи услови еквивалентни за дату појединачно (α,β)-хармонијску функцију u на $\mathbb{D}^n$:

$$\begin{gathered} \sup_{0\leq r<1}\int_{\mathbb{T}^n} \mid u(r\zeta)\mid dm_n(\zeta) < \infty, \\ \sup_{\mathbf{r}\in[0,1)^n}\int_{\mathbb{T}^n} |u_{\mathbf{r}}(\zeta)|dm_n(\zeta) < \infty, \\ u = P_{\alpha,\beta}[d\mu] \quad \text{гдје је} \quad \mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T}^n). \end{gathered}$$

Калдерон и Зигмунд ([10], лема 1.) су доказали еквивалентност посљедња два услова за појединачно хармонијске функције. С обзиром да је $sh_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(\mathbb{D}^n) = sh(\mathbb{D}^n)$ у овој дисертацији дато је уопштење тог резултата.

Имамо слиједећи низ непрекидних утапања Банахових простора

$$Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^{\infty}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^q_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n), \tag{4.76}$$

гдје је $1<p<q<\infty$. Горе наведени резултати показују да су ови простори изоморфни, као Банахови простори, респективно просторима

$$C(\mathbb{T}^n) \subset L^{\infty}(\mathbb{T}^n) \subset L^q(\mathbb{T}^n) \subset L^p(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{T}^n), \tag{4.77}$$

а изоморфизам омогућује оператор $P_{\alpha,\beta}$.

4.7 Максимална функција и теореме Фатуовог типа

Подсјетимо се да је за дато $\zeta = e^{i\varphi}$ из $\mathbb{T}$ Штолцов угао у тачки ζ отвора $0 < A < +\infty$ означен са

$$S_A(e^{i\varphi}) = \{re^{i(\varphi-\theta)} : |\theta| \le A(1-r)\}.$$

Нетангенционални лимес у граничној тачки означен је са $NT - \lim$.

У претходним потпоглављима проучавали смо конвергенцију у $L^p(\mathbb{T}^n)$ норми, или у слабо* топологији, од $u_{\mathbf{r}}$ за u из одговарајућег $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ простора. У овом потпоглављу ћемо проучавати скоро свуда конвергенцију од $u_{\mathbf{r}}$ за појединачно (α, β)-хармонијске функције u. Подсјетимо да је у потпоглављу 4.1 наведен први резултат ове природе који је био везан за Чезарову сумабилност двоструког Фуријеовог реда ([56]). У том раду Марцинкјевич и Зигмунд су примијетили да њихови резултати важе за Пуасонова језгра као и за Фејерова језгра, чиме се добија резултат за 2–хармонијске функције (видјети теорему 4.7 и теорему 4.8). Случај $n = 2$ формулисао је Зигмунд([85], глава XII, теорема 3.1). У овој дисертацији доказано је уопштење тог резултата који се односи на Пуасоново језгро и при томе је коришћен приступ који је дјелимично базиран на методу датом у [69], гдје су разматране појединачно хармонијске функције (видјети теорему 2.3.1. из [69]). Веома је битна специјална максимална функција M_q јер се користи за добијање процјена релевантних сужених нетангенцијалних максималних функција како бисмо добили теореме Фатуовог типа.

Максимална функција M_q

За γ из $\mathbb{Z}^n_+$ дефинишемо γ бокс као подскуп Q од $\mathbb{T}^n$ слиједећег облика:

$$Q = I_1 \times \cdots \times I_n, \qquad \text{гдје је} \quad I_j = \{e^{i\theta} \mid a_j \le \theta < b_j\}$$

полуотворен лук на $\mathbb{T}$ дужине $0 < b_j - a_j \le 2\pi$ и њихове дужине су у истом односу као $(2^{\gamma_1}, \dots, 2^{\gamma_n})$. Центар таквих боксова је означен са $c(Q) = (e^{ic_1}, \dots, e^{ic_n})$, гдје је $c_j = (a_j + b_j)/2$. Означимо фамилију свих γ боксова са $\mathcal{Q}_\gamma$. Дефинишемо γ-максималну функцију комплексне Борелове мјере μ на $\mathbb{T}^n$ слиједећом формулом:

$$M_\gamma\mu(\zeta) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\gamma, c(Q)=\zeta} \frac{|\mu|(Q)}{m_n(Q)}, \qquad \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n), \quad \zeta \in \mathbb{T}^n. \tag{4.78}$$

У [69] је доказана слиједећа лема

Лема 4.9.

$$m_n(\{\zeta \in \mathbb{T}^n \mid M_\gamma\mu(\zeta) > \lambda\}) \leq 3^n \frac{\|\mu\|}{\lambda}, \qquad \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n), \quad \lambda > 0. \tag{4.79}$$

Уочимо да константа 3^n не зависи од $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$.

За $0 < q < 1$ уводимо максималну функцију M_q са

$$M_q\mu(\zeta) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} q^{|\gamma|} M_\gamma\mu(\zeta), \qquad \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n), \quad \zeta \in \mathbb{T}^n. \tag{4.80}$$

Рудин ([69] лема 1, страна 26.) је доказао слиједећу лему за $q = 1/2$ тако да сљедећа лема представља уопштење његовог резултата.

Лема 4.10. *Нека је $0 < q < 1$ и нека је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Тада важи*

$$m_n(\{\zeta \in \mathbb{T}^n \mid M_q\mu(\zeta) > \lambda\}) \leq \frac{3^n}{(1-\sqrt{q})^{2n}} \frac{\|\mu\|}{\lambda}, \quad \lambda > 0. \tag{4.81}$$

Доказ. Уведимо за $\lambda > 0$ и $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ скупове:

$$E(\lambda) = \{\zeta \in \mathbb{T}^n \mid M_q\mu(\zeta) > \lambda\}, \qquad E_\gamma(\lambda) = \{\zeta \in \mathbb{T}^n \mid M_\gamma\mu(\zeta) > \lambda\}.$$

Уочимо да је за $0 < q < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^{k/2} = \frac{1}{1-\sqrt{q}} = \eta(q) \quad \text{и онда је} \quad \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} q^{|\gamma|/2} = \eta^n(q).$$

Стога, ако је $M_q\mu(\zeta) > \lambda$, онда је на основу (4.80)

$$\lambda < \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} q^{|\gamma|} M_\gamma\mu(\zeta) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} q^{|\gamma|/2} q^{|\gamma|/2} M_\gamma\mu(\zeta) \leq \eta^n(q) \sup_\gamma \{q^{|\gamma|/2} M_\gamma\mu(\zeta)\}$$

и отуда слиједи да је

$$E(\lambda) \subset \cup_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} E_\gamma(\eta^{-n}(q) q^{-|\gamma|/2}\lambda).$$

Тада, због монотоности и пребројиве субадитивности Харове мјере и на основу леме 4.9, добијамо

$$\begin{aligned} m_n(E(\lambda)) &\leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} m_n(E_\gamma(\eta^{-n}(q) q^{-|\gamma|/2}\lambda)) \\ &\leq \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}_+^n} 3^n \frac{\|\mu\|}{\eta^{-n}(q) q^{-|\gamma|/2}\lambda} \\ &= 3^n \eta^{2n}(q) \|\mu\| \lambda^{-1} \\ &= \frac{3^n}{(1-\sqrt{q})^{2n}} \frac{\|\mu\|}{\lambda}. \end{aligned}$$

□

Процјене $P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ помоћу $P_{\mathbf{t}}[d\mu]$

За реално $t > -1$ нека је, као и у потпоглављу 4.2. ,

$$u_t(z) = u_{t/2,t/2}(z) = \frac{(1-|z|^2)^{t+1}}{|1-z|^{t+2}}, \quad z \in \mathbb{D} \tag{4.82}$$

и нека је

$$v_t(z) = v_{t/2,t/2}(z) = \frac{\Gamma^2(\frac{t}{2}+1)}{\Gamma(t+1)} \frac{(1-|z|^2)^{t+1}}{|1-z|^{t+2}}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{4.83}$$

На основу елементарне неједнакости $|1-re^{i\theta}| \geq \pi^{-1}|\theta|$, која важи за све $0 \leq r < 1$ и $-\pi \leq \theta \leq \pi$ добијамо слиједећу процјену:

$$0 < u_t(re^{i\theta}) \leq 2^{t+1}\pi^{t+2}\frac{(1-r)^{t+1}}{|\theta|^{t+2}}, \qquad 0 \leq r < 1, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi. \tag{4.84}$$

Оператори задани језгрима $v_t(z\overline{\zeta})$ су разматрани у [64], гдје су добијени једнодимензиони резултати Фатуовог типа (видјети теорему 4.16 и посљедицу 4.3).

За $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in (-1, +\infty)^n$ дефинишемо

$$U_{\mathbf{t}}(z) = \prod_{j=1}^{n} u_{t_j}(z_j), \quad V_{\mathbf{t}}(z) = \prod_{j=1}^{n} v_{t_j}(z_j), \qquad z \in \mathbb{D}^n. \tag{4.85}$$

Нека је $z \in \mathbb{D}^n$ и $\zeta \in \mathbb{T}^n$. Језгро $K_{\mathbf{t}}(z,\zeta) = V_{\mathbf{t}}(z\cdot\overline{\zeta})$ је позитивно језгро и очигледно је да је $K_{\mathbf{t}} = P_{\alpha,\beta}$ за $\alpha = \beta = \mathbf{t}/2$.

Лема 4.11. *Нека је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ и нека $z \in \mathbb{D}^n$. Тада важи*

$$|P_{\alpha,\beta}[d\mu](z)| \leq k_{\alpha,\beta} \int_{\mathbb{T}^n} U_{\mathbf{t}}(z\cdot\overline{\zeta})d|\mu|(\zeta) = \frac{k_{\alpha,\beta}}{k_{\mathbf{t}}} \int_{\mathbb{T}^n} K_{\mathbf{t}}(z,\zeta)d|\mu|(\zeta), \tag{4.86}$$

при чему је $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ гдје је $t_j = \operatorname{Re}\alpha_j + \operatorname{Re}\beta_j$ за $1 \leq j \leq n$ и

$$k_{\alpha,\beta} = \prod_{j=1}^{n} |c_{\alpha_j,\beta_j}| e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j - \operatorname{Im}\beta_j|}, \qquad k_{\mathbf{t}} = \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{t_j}{2}+1\right)}{\Gamma(t_j+1)}.$$

Доказ. На основу основне интегралне неједнакости и неједнакости (4.23) имамо

$$\begin{aligned} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](z)| &= \left| \int_{\mathbb{T}^n} P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)d\mu(\zeta) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} c_{\alpha_j,\beta_j} \frac{(1-|z_j|^2)^{\alpha_j+\beta_j+1}}{(1-z_j\overline{\zeta_j})^{\alpha_j+1}(1-\overline{z_j}\zeta_j)^{\beta_j+1}} d\mu(\zeta) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \prod_{j=1}^{n} |c_{\alpha_j,\beta_j}| e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im}\alpha_j - \operatorname{Im}\beta_j} \frac{(1-|z_j|^2)^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+1}}{|1-z_j\overline{\zeta_j}|^{\operatorname{Re}\alpha_j+\operatorname{Re}\beta_j+2}} d|\mu|(\zeta) \end{aligned}$$

и отуда на основу (4.85) и (4.82) слиједи (4.86). $\square$

Претходна лема нам омогућава да различите процјене за комплексно-вриједносно језгро $P_{\alpha,\beta}$ добијамо помоћу позитивног језгра, видјети (4.91) у наставку.

Процјене унутар Штолцовог конуса за фиксирано r

Дефинишемо Штолцов конус у тачки $\zeta \in \mathbb{T}^n$ отвора $0 < A < \infty$ са

$$S_A(\zeta) = \prod_{j=1}^{n} S_A(\zeta_j) \tag{4.87}$$

и сужен Штолцов конус $S_{A,B}(\zeta)$ за $0 < A < \infty$, $1 \leq B < \infty$ у $\zeta \in \mathbb{T}^n$ са

$$S_{A,B}(\zeta) = \left\{ (r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_n e^{i\theta_n}) \in S_A(\zeta) : \max_{j,k} \frac{1 - r_j}{1 - r_k} \leq B \right\}. \tag{4.88}$$

Доказано је да је $|1 - re^{i\varphi}| \leq (1 + A)|1 - re^{i(\varphi-\theta)}|$ за $|\theta| \leq A(1 - r)$, (видјети лему 4.2). Према томе постоји константа $\delta_A > 0$ таква да је

$$\delta_A |1 - re^{i\varphi}| \leq \inf_{|\theta| \leq A(1-r)} |1 - re^{i(\varphi-\theta)}| \leq |1 - re^{i\varphi}|, \quad 0 < A < \infty. \tag{4.89}$$

Нека је

$$c(\mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{n} (t_j + 2), \qquad \mathbf{t} \in (-1, +\infty)^n. \tag{4.90}$$

Став 4.9. *Нека је* $\eta = (e^{i\psi_1}, \ldots, e^{i\psi_n})$ *из* $\mathbb{T}^n$, $\mathbf{r} \in [0, 1)^n$, $\mathbf{t} \in (-1, +\infty)^n$ *и* $0 < A < \infty$. *Тада имамо*

$$\sup_{\xi:\, \mathbf{r}\cdot\xi \in S_A(\eta)} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](\mathbf{r} \cdot \xi)| \leq \frac{k_{\alpha,\beta}}{k_{\mathbf{t}} \delta_A^{c(\mathbf{t})}} \int_{\mathbb{T}^n} K_{\mathbf{t}}(\mathbf{r} \cdot \eta, \zeta) d|\mu|(\zeta), \quad \eta \in \mathbb{T}^n, \tag{4.91}$$

при чему је $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ *гдје* $t_j = \operatorname{Re} \alpha_j + \operatorname{Re} \beta_j$ *за свако* $1 \leq j \leq n$.

Доказ. За $z = (r_1 e^{i(\psi_1 - \theta_1)}, \ldots, r_n e^{i(\psi_n - \theta_n)})$ из $S_A(\eta)$ и $\zeta = (e^{i\varphi_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}) \in \mathbb{T}^n$, примјеном (4.89) добијамо

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in S_A(\eta),|z_j|=r_j} U_{\mathbf{t}}(z\cdot\overline{\zeta}) &= \sup_{z\in S_A(\eta),|z_j|=r_j} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j^2)^{t_j+1}}{|1-z_j\overline{\zeta_j}|^{t_j+2}} \\
&= \sup_{|\theta_j|\le A(1-r_j)} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j^2)^{t_j+1}}{\left|1-r_j e^{i[(\psi_j-\theta_j)-\varphi_j]}\right|^{t_j+2}} \\
&= \sup_{|\theta_j|\le A(1-r_j)} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j^2)^{t_j+1}}{\left|1-r_j e^{i[(\psi_j-\varphi_j)-\theta_j]}\right|^{t_j+2}} \\
&\le \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j^2)^{t_j+1}}{\delta_A^{t_j+2}\left|1-r_j e^{i(\psi_j-\varphi_j)}\right|^{t_j+2}} \\
&= \delta_A^{-c(\mathbf{t})} \prod_{j=1}^{n} \frac{(1-r_j^2)^{t_j+1}}{\left|1-r_j e^{i(\psi_j-\varphi_j)}\right|^{t_j+2}} \\
&= \delta_A^{-c(\mathbf{t})} U_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\eta\cdot\overline{\zeta}), \qquad (4.92)
\end{aligned}
$$

и отуда примјеном леме 4.11 важи:

$$
\begin{aligned}
\sup_{\xi:\ \mathbf{r}\cdot\xi\in S_A(\eta)} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](\mathbf{r}\cdot\xi)| &\le \sup_{\xi:\ \mathbf{r}\cdot\xi\in S_A(\eta)} k_{\alpha,\beta}\int_{\mathbb{T}^n} U_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\xi\cdot\overline{\zeta})d|\mu|(\zeta) \\
&\le \frac{k_{\alpha,\beta}}{\delta_A^{c(\mathbf{t})}}\int_{\mathbb{T}^n} U_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\eta\cdot\overline{\zeta})d|\mu|(\zeta) \\
&= \frac{k_{\alpha,\beta}}{k_{\mathbf{t}}\delta_A^{c(\mathbf{t})}}\int_{\mathbb{T}^n} K_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\eta,\zeta)d|\mu|(\zeta).
\end{aligned}
$$

□

Уочимо да су у (4.91) и $\eta\in\mathbb{T}^n$ и $\mathbf{r}\in[0,1)^n$ фиксирани. Да бисмо добили процјену интеграла на десној страни неједнакости (4.91) потребне су одговарајуће подјеле $\mathbb{T}^n$ прилагођене датом $\mathbf{r}$.

Подјеле $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ торуса $\mathbb{T}^n$ и процјене $|\mu|(Q)$, $Q\in\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$

За дато $0\le\rho<1$ са $\kappa=\kappa(\rho)$ означен је јединствени број $\kappa\in[1,2)$ такав да је

$$
\frac{\pi}{(1-\rho)\kappa(\rho)} = 2^p, \qquad \text{гдје је} \quad p\in\mathbb{N}_0 \qquad (4.93)
$$

и $p=p(\rho)$ је јединствено одређено са ρ. Нека је

$$
x_0=0,\quad x_j=x_j(\rho)=2^{j-1}(1-\rho)\kappa(\rho) \quad \text{за свако} \quad 1\le j\le p+1. \qquad (4.94)
$$

Јасно је да је $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{p+1} = \pi$ и $2x_j = x_{j+1}$ за $1 \le j \le p$. Нека је, за $j = 0, \ldots, p$, $J_j^+ = J_j^+(\rho) = [x_j, x_{j+1})$ и $J_j^- = J_j^-(\rho) = [-x_{j+1}, -x_j)$. Уочимо да су то полуотворени интервали који чине подјелу $\tilde{\mathcal{P}}_\rho$ интервала $[-\pi, \pi)$, да их је укупно $2(p+1)$ и да одговарајући $2(p+1)$ полуотворени лукови $I_j^+ = I_j^+(\rho)$ и $I_j^- = I_j^-(\rho)$ на $\mathbb{T}$ чине подјелу $\mathcal{P}_\rho$ јединичне кружнице $\mathbb{T}$. Уочимо да је $m_1(I_j^\pm) = 2^{j-2}(1-\rho)\kappa(\rho)/\pi$ за $1 \le j \le p$ и $m_1(I_1^\pm) = m_1(I_0^\pm)$.

Фиксирајмо $1 \le B < +\infty$ и изаберимо најмањи цијели број $b \ge 0$ такав да је $B \le 2^b$. Претпоставимо да $\mathbf{r} \in [0,1)^n$ задовољава услов $\max_j(1 - r_j) \le B \min_j(1 - r_j)$. Можемо претпоставити, без умањења општости, да је $r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$. Подјеле $\mathcal{P}_{r_k}$, $1 \le k \le n$, јединичне кружнице $\mathbb{T}$ индукују подјелу $\mathbb{T}^n$. Наиме, изаберимо $\varepsilon \in \{+1, -1\}^n$, $j \in \{0, \ldots, p(r_1)\} \times \cdots \times \{0, \ldots, p(r_n)\}$ и нека је $Q(\varepsilon, j) = \prod_{l=1}^n I_{j_l}^{\varepsilon_l}$. Ових $[2(p(r_1) + 1)] \times \cdots \times [2(p(r_n) + 1)]$ боксова чине подјелу $\mathcal{P}_\mathbf{r}$ торуса $\mathbb{T}^n$. Штавише, за сваки избор ε и j постоји опадајући низ $\iota = (\iota_l)_{l=1}^n$ ненегативних бројева $\iota_1 \le b$, $\iota_n = 0$ и $Q(\varepsilon, j)$ је $(j_1 + \iota_1, \ldots, j_n + \iota_n)$ бокс. Такође је $|\iota| \le (n-1)(b+1)$. Низ ι зависи само од j а не зависи од ε.

Напомена 4.2. *Да би $Q(\varepsilon, j)$ био $(j_1 + \iota_1, \ldots, j_n + \iota_n)$ бокс потребно је да је*

$$\frac{(1 - r_k)\kappa(r_k)}{(1 - r_i)\kappa(r_i)} = 2^{\iota_k - \iota_i} \quad \text{и} \quad \iota_k - \iota_i = p(r_i) - p(r_k).$$

Како је

$$2^{-b-1} \le \frac{1}{2B} \le \frac{(1 - r_k)\kappa(r_k)}{(1 - r_i)\kappa(r_i)} \le 2B \le 2^{b+1}$$

имамо да је

$$-b - 1 \le \iota_k - \iota_i \le b + 1.$$

Ако је $r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$ онда је $p(r_1) \le p(r_2) \le \cdots \le p(r_n)$ и према томе $\iota_1 \ge \iota_2 \ge \cdots \ge \iota_n \ge 0$. Без умањења општости можемо узети да је $\iota_n = 0$. Тада је $\iota_1 \le b + 1$ и $|\iota| \le (n-1)(b+1)$.

Сваки бокс $Q(\varepsilon, j)$ је садржан у боксу $R(j)$ који садржи све $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$ такве да је $-x_{j_k+1}(r_k) \le \theta_k < x_{j_k+1}(r_k)$ за свако $1 \le k \le n$. Бокс $R(j)$ је, будући да је хомотетичан са $Q(\varepsilon, j)$, такође $j + \iota$ бокс, и јасно да му је центар у $\mathbf{1}$ и да је $m_n(R(j)) = 4^n m_n(Q(\varepsilon, j))$. Отуда примјеном (4.78) добијамо

$$\begin{aligned} |\mu|(Q(\varepsilon, j)) &\le |\mu|(R(j)) \\ &\le m_n(R(j))(M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\ &= 4^n m_n(Q(\varepsilon, j))(M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \end{aligned} \tag{4.95}$$

Уочимо да на основу (4.94) и (4.93) важи

$$m_n(Q(\varepsilon,j)) = 4^{-n}2^{j_1+\cdots+j_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1-r_k)\kappa(r_k)}{\pi} = 4^{-n}\prod_{k=1}^{n}2^{j_k-p(r_k)}. \tag{4.96}$$

Тиме је доказан сљедећи став.

Став 4.10. *Нека је μ комплексна Борелова мјера на $\mathbb{T}^n$ и нека је $1 \le B < \infty$. Претпоставимо да $\mathbf{r} \in [0,1)^n$ задовољава услов $\max_j(1-r_j) \le B\min_j(1-r_j)$ и нека је $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ подјела $\mathbb{T}^n$ која зависи од $\mathbf{r}$. Тада за свако $\varepsilon \in \{-1,+1\}^n$ и свако $j=(j_1,\dots,j_n)$ такво да је $0 \le j_k \le p(r_k)$ за свако $1 \le k \le n$ важи:*

$$|\mu|(Q(\varepsilon,j)) \le 2^{j_1+\cdots+j_n}\prod_{k=1}^{n}\frac{(1-r_k)\kappa(r_k)}{\pi}(M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}). \tag{4.97}$$

Уочимо да је, због $\kappa(r_k) < 2$,

$$|\mu|(R(j)) \le \frac{2^n}{\pi^n}2^{j_1+\cdots+j_n}\prod_{k=1}^{n}(1-r_k)(M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}). \tag{4.98}$$

Процјене $P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ над $S_{A,B}(\eta)$

Фиксирајмо $0 \le \rho < 1$ и посматрајмо тачке $x_0,\dots x_{p+1}$ из (4.94) које индукују подјелу $\tilde{\mathcal{P}}_\rho$ полузатвореног интервала $[0,\pi)$. Примјеном (4.84) на $\theta = x_1,\dots,x_p$ при чему су тачке $x_1,\dots,x_p$ дате са (4.94) и како је $\kappa(\rho) \ge 1$, за свако $1 \le j \le p = p(\rho)$ важи:

$$u_t(\rho e^{ix_j}) \le \frac{2^{t+1}\pi^{t+2}}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho}{2^{j-1}(1-\rho)\kappa(\rho)}\right)^{t+2} \le \frac{2^{2t+3}\pi^{t+2}}{1-\rho}2^{-(t+2)j}.$$

Претходна неједнакост важи и за $j=0$. Заиста, на основу (4.82) за $t > -1$ је

$$u_t(\rho) = \frac{(1-\rho^2)^{t+1}}{(1-\rho)^{t+2}} \le \frac{2^{t+1}}{1-\rho} < \frac{2^{2t+3}\pi^{t+2}}{1-\rho}.$$

Дакле важи

$$u_t(\rho e^{ix_j}) \le \frac{2^{2t+3}\pi^{t+2}}{1-\rho}2^{-(t+2)j}, \qquad 0 \le j \le p = p(\rho). \tag{4.99}$$

Према ([64]) функција $u_t(\rho e^{i\theta})$ је парна функција по промјенљивој $\theta \in (-\pi,\pi)$ и монотоно опадајућа по $\theta \in (0,\pi)$ за фиксирано $0 \le \rho < 1$ па за $x_{j_k} \le \theta_k < x_{j_k+1} (1 \le k \le n)$ према (4.99) важи

$$u_t(\rho e^{i\theta_k}) \le u_t(\rho e^{ix_{j_k}}) \le \frac{2^{2t_k+3}\pi^{t_k+2}}{1-\rho}2^{-(t_k+2)j_k}.$$

Отуда примјеном (4.99) за $\mathbf{t} \in (-1,+\infty)^n$ и $\mathbf{r} \in [0,1)^n$ добијамо:

$$U_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\zeta) \le C_{\mathbf{t}} \prod_{k=1}^{n} 2^{-(t_k+2)j_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-r_k}, \qquad \zeta \in Q(\varepsilon, j), \tag{4.100}$$

гдје је $C_{\mathbf{t}} = \prod_{k=1}^{n} 2^{2t_k+3} \cdot \pi^{t_k+2}$.

Претпоставимо да $\mathbf{r}$ задовољава услов $\max_j(1-r_j) \le B\min_j(1-r_j)$ гдје је $B \ge 1$ и процјенимо интеграл који се појављује у ставу 4.9. Без умањења општости нека је $\eta = \mathbf{1}$ ради једноставнијег означавања. Боксови

$$Q(\varepsilon, j), \quad \varepsilon \in \{+1,-1\}^n, j \in \{0,\dots,p(r_1)\} \times \cdots \times \{0,\dots,p(r_n)\},$$

индукују подјелу $P_{\mathbf{r}}$ торуса $\mathbb{T}^n$ па на основу (4.100) и става 4.10 важи

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} K_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{1},\zeta)d|\mu|(\zeta) &= k_{\mathbf{t}} \int_{\mathbb{T}^n} U_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\zeta)d|\mu|(\zeta) \\
&= k_{\mathbf{t}} \sum_{Q\in\mathcal{P}_{\mathbf{r}}} \int_Q U_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\zeta)d|\mu|(\zeta) \\
&\le k_{\mathbf{t}} C_{\mathbf{t}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-r_k} \sum_{(\varepsilon,j)} |\mu|(Q(\varepsilon,j)) \prod_{k=1}^{n} 2^{-(t_k+2)j_k} \qquad (4.101)\\
&\le 2^n k_{\mathbf{t}} C_{\mathbf{t}} \sum_j \prod_{k=1}^{n} 2^{-(t_k+2)j_k} 2^{j_k} \frac{\kappa(r_k)}{\pi} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\
&\le \frac{2^{2n}}{\pi^n} k_{\mathbf{t}} C_{\mathbf{t}} \sum_j \prod_{k=1}^{n} 2^{-(t_k+1)j_k} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1})
\end{aligned}$$

при чему посљедња неједнакост важи јер је $\kappa(r_k) < 2$ за свако $1 \le k \le n$.

Нека је

$$q = q(\mathbf{t}) = 2^{-\min_{1\le k\le n}(t_k+1)}. \tag{4.102}$$

Очигледно је да је $q < 1$ и да је

$$\begin{aligned}
\sum_j \prod_{k=1}^{n} 2^{-(t_k+1)j_k} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) &\le \sum_j \prod_{k=1}^{n} q^{j_k} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\
&= \sum_j q^{|j|} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\
&= \frac{1}{q^{|\iota|}} \sum_j q^{|j+\iota|} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}).
\end{aligned}$$

Но, како је $|\iota| \le (n-1)(b+1)$ и како за свако $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ постоји највише $(b+1)^{n-1}$ репрезентација $\gamma = j + \iota$, онда важи

$$\sum_j \prod_{k=1}^{n} 2^{-(t_k+1)j_k} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \le \frac{(b+1)^{n-1}}{q^{(n-1)(b+1)}} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}_+^n} q^{|\gamma|} (M_\gamma\mu)(\mathbf{1}). \tag{4.103}$$

Према томе на основу (4.101) и (4.103) добијамо да је

$$\int_{\mathbb{T}^n} K_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{1},\zeta)d|\mu|(\zeta) \le k_{\mathbf{t}}C(\mathbf{t},B)(M_q\mu)(\mathbf{1}), \tag{4.104}$$

гдје је $C(\mathbf{t},B) = \frac{2^{2n}C_{\mathbf{t}}(b+1)^{n-1}}{\pi^n q^{(n-1)(b+1)}}$.

Уочимо да десна страна неједнакости (4.104) не зависи од $\mathbf{r}$.

Примјеном неједнакости (4.91) добијамо да је

$$\sup_{\mathbf{r}\cdot\xi\in S_{A,B}(\mathbf{1})} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](\mathbf{r}\cdot\xi)| \le \frac{k_{\alpha,\beta}}{\delta_A^{c(\mathbf{t})}} C(\mathbf{t},B)(M_q\mu)(\mathbf{1}). \tag{4.105}$$

С обзиром да (4.105) важи у произвољној тачки $\eta\in\mathbb{T}^n$, а не само за $\eta=\mathbf{1}$, слиједећи став је доказан.

Став 4.11. *Нека је* $0 < A < +\infty$ *и* $1 \le B < +\infty$. *Осим тога, нека је* $q = 2^{-m(\alpha,\beta)} < 1$, *гдје је* $m(\alpha,\beta) = \min_{1\le k\le n}(\operatorname{Re}\alpha_k + \operatorname{Re}\beta_k + 1)$, $t_j = \operatorname{Re}\alpha_j + \operatorname{Re}\beta_j$ *за свако* $1\le j\le n$ *и* $c(\mathbf{t}) = \sum(t_j+2)$. *Тада постоје константе* $\delta_A > 0$ *и* $C_{\alpha,\beta,B} < \infty$ *такве да је*

$$\sup_{z\in S_{A,B}(\eta)} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](z)| \le \frac{C_{\alpha,\beta,B}}{\delta_A^{c(\mathbf{t})}}(M_q\mu)(\eta), \qquad \mu\in\mathcal{M}(\mathbb{T}^n), \quad \eta\in\mathbb{T}^n. \tag{4.106}$$

Сужена нетангенцијална максимална функција

С обзиром на став 4.11 природно је увести сужену нетангенцијалну максималну функцију отвора $0 < A < +\infty$ и ограничења $1 \le B < \infty$ функције $u\in C(\mathbb{D}^n)$ са

$$(\tilde{M}^{NT}_{A,B}u)(\eta) = \sup_{z\in S_{A,B}(\eta)} |u(z)|, \quad \eta\in\mathbb{T}^n$$

и комплексне Борелове мјере μ на $\mathbb{T}^n$ са

$$(M^{NT}_{A,B}\mu)(\eta) = \sup_{z\in S_{A,B}(\eta)} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](z)|, \qquad \eta\in\mathbb{T}^n. \tag{4.107}$$

Наравно $M^{NT}_{A,B}\mu = \tilde{M}^{NT}_{A,B}(P_{\alpha,\beta}[d\mu])$.

Ако је $f\in L^1(\mathbb{T}^n)$ користићемо краћи запис $M^{NT}_{A,B}f$ умјесто $M^{NT}_{A,B}f\,dm_n$.

Примјеном става 4.11 и леме 4.10 добијамо слиједећи слаби $(1,1)$-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију $M^{NT}_{A,B}$.

Теорема 4.28. *За свако* $0 < A < +\infty$ *и* $1 \le B < \infty$ *постоји константа* $C = C_{\alpha,\beta,A,B}$ *таква да је*

$$m_n(\{\eta\in\mathbb{T}^n : (M^{NT}_{A,B}\mu)(\eta) > \lambda\}) \le C\frac{\|\mu\|}{\lambda}, \qquad \lambda > 0. \tag{4.108}$$

Теореме типа Фатуа

У доказивању теорема типа Фатуа важну улогу има теорема 4.28.

Дефиниција 4.12. *Пишемо* $NT_{A,B} - \lim_{z\to\eta} u(z) = l$ *ако за свако* $\varepsilon > 0$ *постоји* $\delta > 0$ *такво да је* $|u(z) - l| < \varepsilon$ *кадгод је* $|z - \eta| < \delta$ *и* $z \in S_{A,B}(\eta)$. *Функција* u *је функција дефинисана на отвореном јединичном полидиску* $\mathbb{D}^n$, $0 < A < \infty$, $1 \le B < \infty$ *и* $\eta \in \mathbb{T}^n$.

Ако је $NT_{A,B} - \lim_{z\to\eta} u(z) = l$ *за свако* $0 < A < \infty$ *и* $1 \le B < \infty$ *пишемо* $RNT - \lim_{z\to\eta} u(z) = l$ *(сужен нетангенцијални лимес).*

Ако је u реално-вриједносна функција аналогно можемо посматрати $NT_{A,B} - \limsup_{z\to\eta} u(z)$.

Теорема 4.29. *Нека је* $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$, $u = P_{\alpha,\beta}[f]$. *Тада је*

$$RNT - \lim_{z\to\eta} u(z) = f(\eta) \quad \text{за скоро свако} \quad \eta \in \mathbb{T}^n. \tag{4.109}$$

Доказ. Фиксирајмо $0 < A < \infty$ и $1 \le B < \infty$. Дефинишемо за $\delta > 0$, $g \in L^1(\mathbb{T}^n)$ и $\eta \in \mathbb{T}^n$

$$\Omega^\delta(g,\eta) = \sup\{|P_{\alpha,\beta}[g](z) - P_{\alpha,\beta}[g](w)| : z, w \in S_{A,B}(\eta) \cap B(\eta,\delta)\} \tag{4.110}$$

и уочимо слиједеће особине од $\Omega^\delta(g,\eta)$:

(а) $\Omega^\delta(g,\eta)$ је монотоно растућа функција по $\delta > 0$ и $\Omega^\delta(g,\eta) \le 2(M^{NT}_{A,B} g)(\eta)$.

(б) $\lim_{\delta\to 0} \Omega^\delta(g,\eta) = 0$ ако и само ако $NT_{A,B} - \lim_{z\to\eta} P_{\alpha,\beta}[g](z)$ постоји.

(в) $\lim_{\delta\to 0} \Omega^\delta(g,\eta) = \lim_{\delta\to 0} \Omega^\delta(g - \varphi,\eta)$ за сваку $\varphi \in C(\mathbb{T}^n)$.

(а) $S_{A,B}(\eta) \cap B(\eta,\delta)$ је растуће по $\delta > 0$ за фиксирано $\eta \in \mathbb{T}^n$. Осим тога за $z, w \in S_{A,B}(\eta) \cap B(\eta,\delta)$ на основу (4.107) је

$$|P_{\alpha,\beta}[g](z) - P_{\alpha,\beta}[g](w)| \le 2(M^{NT}_{A,B} g)(\eta).$$

Такође је и особина под *(б)* очигледна и *(в)* слиједи примјеном теореме 4.20.

Нека је $E_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{T}^n : \lim_{\delta\to 0} \Omega^\delta(f,\zeta) > \varepsilon\}$ за $\varepsilon > 0$. Примјеном *(а)* и *(в)* за произвољно $\varphi \in C(\mathbb{T}^n)$ важи:

$$E_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{T}^n : \lim_{\delta\to 0} \Omega^\delta(f - \varphi,\zeta) > \varepsilon\} \subset \left\{\zeta \in \mathbb{T}^n : [M^{NT}_{A,B}(f - \varphi)](\zeta) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Примјеном теореме 4.28 закључујемо да је

$$m_n(\{\zeta \in \mathbb{T}^n : [M_{A,B}^{NT}(f-\varphi)](\zeta) > \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq \frac{2C_{\alpha,\beta,A,B}}{\varepsilon}\|f-\varphi\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.$$

С обзиром да је $C(\mathbb{T}^n)$ густ скуп у $L^1(\mathbb{T}^n)$, скуп E_ε је садржан у скупу произвољно мале мјере и отуда је E_ε нула скуп. Како је $\varepsilon > 0$ произвољно слиједи да је $\lim_{\delta\to 0}\Omega^\delta(f,\eta) = 0$ за скоро свако $\eta \in \mathbb{T}^n$. Стога, према *(б)*,

$$NT_{A,B} - \lim_{z\to\eta} P_{\alpha,\beta}[f](z) = F(\eta) \quad \text{постоји за скоро свако} \quad \eta \in \mathbb{T}^n.$$

На основу теореме 4.24, формула (4.69), добијамо да је $F(\eta) = f(\eta)$. □

Локална верзија теореме (4.29) за појединачно хармонијске функције може се наћи у [85] (теорема 4.13, глава $XVII$). У потпоглављу 4.1 је објашњено зашто је немогуће замијенити RNT лимес у теореми 4.29 са NT лимесом, тј. са лимесом преко Штолцовог конуса $S_A(\eta)$, видјети [32] и [56].

Специјална верзија сљедеће леме појављује се у [69] (лема 3, страна 29) гдје су посматране појединачно хармонијске функције.

Лема 4.12. *Ако се комплексна Борелова мјера μ на $\mathbb{T}^n$ анулира на отвореном скупу $V \subset \mathbb{T}^n$ и $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$, онда важи*

$$RNT - \lim_{z\to\eta} u(z) = 0 \quad \textit{за скоро свако} \quad \eta \in V. \tag{4.111}$$

Доказ. Фиксирајмо отвор $0 < A < \infty$ и ограничење $1 \leq B < \infty$. На основу леме 4.10 максимална функција $M_q\mu$ је коначна скоро свуда на $\mathbb{T}^n$ и отуда је коначна скоро свуда и на V. Дакле, довољно је доказати да је

$$NT_{A,B} - \lim_{z\to\eta} u(z) = 0$$

кадгод је η тачка из V таква да је $(M_q\mu)(\eta) < +\infty$. Претпоставимо, због једноставнијег означавања, да је $\eta = \mathbf{1}$. Како је $\mathbf{1} \in V$, постоји позитиван број N такав да је $I_N^n \subset V$, гдје је $I_N = \{e^{i\theta} : |\theta| \leq \pi 2^{-N}\}$.

Претпоставимо да $\mathbf{r}$ из $[0,1)^n$ задовољава услов $\max_j(1-r_j) \leq B\min_j(1-r_j)$. Примјеном (4.91), (4.101) и (4.95) добијамо

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi:\, \mathbf{r}\cdot\xi \in S_{A,B}(\mathbf{1})} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](\mathbf{r}\cdot\xi)| &\leq \frac{k_{\alpha,\beta}}{k_{\mathbf{t}}\delta_A^{c(\mathbf{t})}} \int_{\mathbb{T}^n} K_{\mathbf{t}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{1},\eta,\zeta)d|\mu|(\zeta) \\
&\leq C_{\mathbf{t}}\frac{k_{\alpha,\beta}}{\delta_A^{c(\mathbf{t})}} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-r_k} \sum_{(\varepsilon,j)} |\mu|(Q(\varepsilon,j)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{2^{(t_k+2)j_k}} \\
&\leq C_{\mathbf{t}} 2^n \frac{k_{\alpha,\beta}}{\delta_A^{c(\mathbf{t})}} \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-r_k} \sum_{j\in I(\mathbf{r})} |\mu|(R(j)) \prod_{k=1}^n \frac{1}{2^{(t_k+2)j_k}},
\end{aligned} \tag{4.112}$$

гдје је $I(\mathbf{r}) = \{0, \dots, p(r_1)\} \times \dots \times \{0, \dots, p(r_n)\}$. Примјеном (4.93) и (4.94) добијамо да је $|\mu|(R(j)) = 0$ кадгод је $j_k < p(r_k) - N$ за свако $1 \le k \le n$.

За $\mathbf{r} \in [0,1)^n$ ставимо

$$Z(\mathbf{r}) = \{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n : j_k < p(r_k) - N, k = 1, \dots, n\}.$$

Стога на основу (4.112), (4.98) и (4.102) добијамо

$$\begin{aligned}
\varphi(\mathbf{r}) &= \sup_{\xi :\, \mathbf{r}\cdot\xi \in S_{A,B}(\mathbf{1})} |P_{\alpha,\beta}[d\mu](\mathbf{r}\cdot\xi)| \\
&\le C(\alpha,\beta,A) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-r_k} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \setminus Z(\mathbf{r})} |\mu|(R(j)) \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{(t_k+2)j_k}} \\
&\le C(\alpha,\beta,A) \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \setminus Z(\mathbf{r})} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{(t_k+1)j_k}} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\
&\le C(\alpha,\beta,A) \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \setminus Z(\mathbf{r})} q^{|j|} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\
&\le \frac{C(\alpha,\beta,A)}{q^{|\iota|}} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \setminus Z(\mathbf{r})} q^{|j+i|} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) \\
&\le \frac{C(\alpha,\beta,A)}{q^{(n-1)(b+1)}} \sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n \setminus Z(\mathbf{r})} q^{|j+i|} (M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}). \qquad (4.113)
\end{aligned}$$

На основу наше претпоставке је $(M_q\mu)(\mathbf{1}) = \sum_{\gamma \in Z_+^n} q^{|\gamma|}(M_\gamma\mu)(\mathbf{1}) < +\infty$. За фиксирано $\iota = (\iota_1, \iota_2, \dots, \iota_n)$ онда су сужене суме $\sum_{\gamma_1=\iota_1}^{+\infty} \sum_{\gamma_2=\iota_2}^{+\infty} \dots \sum_{\gamma_n=\iota_n}^{+\infty} q^{|\gamma|}(M_\gamma\mu)(\mathbf{1}) < +\infty$ и онда је $\sum_{j \in \mathbb{Z}_+^n} q^{|j+\iota|}(M_{j+\iota}\mu)(\mathbf{1}) < +\infty$. Како $p(\rho)$ конвергира ка $+\infty$ кад $\rho \uparrow 1$ видимо да за сваки коначан скуп $F \subset \mathbb{Z}_+^n$ постоји $\delta > 0$ тако да је $F \subset Z(\mathbf{r})$ кадгод је $1 - r_k < \delta$ за свако $1 \le k \le n$. Отуда се сума која се појављује у (4.113) може посматрати као остатак конвергентног реда и тежи ка нули кад $\mathbf{r} \to \mathbf{1}$. Стога је $\lim_{\mathbf{r}\to 1} \varphi(\mathbf{r}) = 0$ а то је еквивалентно са

$$NT_{A,B} - \lim_{z \to \mathbf{1}} u(z) = 0.$$

$\square$

Конвергенција ка 0 у свакој тачки η из V не важи чак ни у специјалном случају појединачно хармонијских функција (тј. $\alpha = \beta = \mathbf{0}$). Детаљи се, на примјер, могу наћи у [69], страна 25. Немогућност локализације је специфична за вишедимензионална уопштења.

Теорема 4.30. *Претпоставимо да је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ сингуларна у односу на Харову мјеру m_n. Тада важи*

$$RNT - \lim_{z\to\zeta} P_{\alpha,\beta}[d\mu](z) = 0 \quad \textit{за скоро свако} \quad \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

Доказ. Фиксирајмо $0 < A < \infty$ и $1 \leq B < \infty$ и уведимо за $\nu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ и $\delta > 0$ слиједеће скупове

$$\Lambda_{A,B}(\nu,\delta) = \{\zeta \in \mathbb{T}^n : NT_{A,B} - \limsup_{z\to\zeta} |P_{\alpha,\beta}[d\nu](z)| > \delta\}, \tag{4.114}$$

$$\Phi_{A,B}(\nu,\delta) = \{\zeta \in \mathbb{T}^n : (M^{NT}_{A,B}\nu)(\zeta) > \delta\}. \tag{4.115}$$

Јасно је да је $\Lambda_{A,B}(\nu,\delta) \subset \Psi_{A,B}(\nu,\delta)$. Довољно је доказати да је $\Lambda_{A,B}(\mu,\delta)$ мјере нула за свако $\delta > 0$. Фиксирајмо $\delta > 0$. Ако је $\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ концентрисана на компактом скупу K таквом да је $m_n(K) = 0$, примјеном леме 4.12 скупови $\Lambda_{A,B}(\nu,\delta)$ и $\Lambda_{A,B}(\nu - \sigma,\delta)$ су једнаки осим на скупу мјере нула. Стога, за свако такво σ имамо, на основу теореме 4.28:

$$\begin{aligned} m_n(\Lambda_{A,B}(\mu,\delta)) &= m_n(\Lambda_{A,B}(\mu-\sigma,\delta)) \\ &\leq m_n(\Psi_{A,B}(\mu-\sigma,\delta)) \\ &\leq C_{\alpha,\beta,A,B}\frac{\|\mu-\sigma\|}{\delta}. \end{aligned} \tag{4.116}$$

С обзиром да је комплексна Борелова мјера регуларна, за дато $\varepsilon > 0$ постоји компактан скуп $K \subset \mathbb{T}^n$ такав да је $m_n(K) = 0$ и $\|\mu - \mu_K\| < \varepsilon$, гдје је $\mu_K(E) = \mu(E \cap K)$. Отуда, уврштавајући $\sigma = \mu_K$ у (4.116) добијамо да је $\Lambda_{A,B}(\mu,\delta)$ садржан у скупу произвољно мале мјере, и стога је $m_n(\Lambda_{A,B}(\mu,\delta)) = 0$. □

На основу теореме 4.29 и теореме 4.30 добијамо слиједећу теорему:

Теорема 4.31. *Нека је $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$ и $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$. Тада је*

$$RNT - \lim_{z\to\zeta} u(z) = f(\zeta) \qquad \textit{за скоро свако} \quad \zeta \in \mathbb{T}^n \tag{4.117}$$

гдје је $d\mu = f dm_n + d\sigma$ Лебег–Радон–Никодим разлагање комплексне мјере $d\mu$ на апсолутно непрекидни дио $f dm_n$ и сингуларни дио $d\sigma$.

Посљедица 4.31 је уопштење Зигмундове теореме 3 из његовог рада [83], гдје је доказано аналогно тврђење за појединачно хармонијске функције ($\alpha = \beta = \mathbf{0}$). Чак и када се посматрају (α,β)-хармонијске функције на $\mathbb{D}$, посљедица 4.31 је нов резултат који уопштава посљедицу 4.3([64], посљедица 6.4.)

Став 4.12. *Нека је $u \in sh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$ и претпоставимо да је $M^+u(\zeta) = \sup_{0\le r<1} |u(r\zeta)|$ Лебег интеграбилна на $\mathbb{T}^n$. Тада је $u = P_{\alpha,\beta}[f]$ за неко $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$.*

Доказ. Како је

$$\sup_{0\le r<1} \int_{\mathbb{T}^n} |\ u(r\zeta)\ |\ dm_n(\zeta) \le \int_{\mathbb{T}^n} |M^+u(\zeta)| dm_n(\zeta) < +\infty,$$

имамо да је $u \in sh^1_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n)$, па је на основу теореме 4.27, $u = P_{\alpha,\beta}[d\mu]$ за неко $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T}^n)$. Лебег–Радон–Никодим разлагање $d\mu$ је $d\mu = f dm_n + d\sigma$ и онда примјеном теореме 4.31 важи

$$\lim_{r\to 1} u(r\zeta) = f(\zeta) \quad \text{за скоро свако} \quad \zeta \in \mathbb{T}^n.$$

Како је M^+u Лебег интеграбилна, на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији

$$\lim_{r\to 1} \int_{\mathbb{T}^n} |u_r(\zeta) - f(\zeta)| dm_n(\zeta) = 0, \quad \text{као и} \quad \lim_{r\to 1} \int_{\mathbb{T}^n} u_r(\zeta) dm_n(\zeta) = \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta) dm_n(\zeta),$$

те дакле $u_r \to f$ у $L^1(\mathbb{T}^n)$ кад $r \to 1$. Слиједи $u_r dm_n \to f dm_n$ слабо* у $C(\mathbb{T}^n)^*$. Но, по теореми 4.23 $u_r dm_n \to d\mu$ слабо*. Због јединствености слабо* лимеса је $d\mu = f dm_n$.

□

Закључак

Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у $\mathbb{C}^n$ као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у $\mathbb{C}^n$ и неједнакости су најбоље могуће. Дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и $\mathcal{M}$-инваријантног реалног градијента за такве функције. Доказан је Харнаков тип резултата за холоморфне функције на $\mathbb{D}^n$ и на $\mathbb{B}^n$.

Осим наведених разултата, доказано је да је функција, дефинисана на $\mathbb{D}^n$, појединачно хармонијска ако и само ако је хармонијска и $\mathcal{M}$-хармонијска на $\mathbb{D}^n$. Уочено је да класа функција које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске имају сасвим различиту природу у случајевима домена $\mathbb{B}^n$ и домена $\mathbb{D}^n$. Такође је и дат други опис простора функција које су истовремено хармонијске и $\mathcal{M}$-хармонијске на $\mathbb{D}^n$. Осим тога изучавана је и мултипликативна структура таквих простора у случају $\mathbb{D}^n$. Интересантно би било описати простор комплексно вриједносних функција u таквих да је $u \in \Sigma(\mathbb{D}^n)$ и $u^s \in \mathcal{M}h(\mathbb{D}^n)$ за неко $s \geq 2$.

Увођењем појединачно (α, β)-хармонијских функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у $\mathbb{D}$ и уопштење појединачно хармонијских функција у $\mathbb{D}^n$, отварају се путеви за даља истраживања. Појединачно (α, β)-хармонијске функције су развијене у ред и рјешен је Дирихлеов проблем за непрекидну функцију дефинисану на истакнутој граници $\mathbb{T}^n$.

Доказано је да важи

$$Csh_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^{\infty}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^{q}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^{p}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n) \subset sh^{1}_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n),$$

гдје је $1 < p < q < \infty$. Горе наведени Банахови простори су изоморфни, респективно просторима

$$C(\mathbb{T}^n) \subset L^{\infty}(\mathbb{T}^n) \subset L^{q}(\mathbb{T}^n) \subset L^{p}(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{M}(\mathbb{T}^n),$$

а изоморфизам омогућује оператор $P_{\alpha,\beta}$. Добијен је слаби (1, 1)-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију. Доказано је да функције на $\mathbb{D}^k$, добијене фиксирањем $n-k$ промјенљивих припадају одговарајућем простору појединачно (α', β')-хармонијских функција од k промјенљивих. Доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α, β)-хармонијске функције у диску и за појединачно хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску. Интересантно би било разматрати $sh^p_{\alpha,\beta}(\mathbb{D}^n), 0 < p < 1$ као и развити H^p теорију за појединачно (α, β)-хармонијске функције дефинисане на Декартовом производу n јединичних лопти $\mathbb{B}^m$.

Литература

[1] P. Ahern, J. Bruna, and C. Cascante. “H^p -theory for generalized M-harmonic functions in the unit ball.” In: *Indiana Univ. Math. J.* 45 (1996), pp. 103–135.

[2] P. Ahern and W. Rudin. “M-harmonic products.” In: *Indag. Mathem., N.S.* 2(2) (1991), pp. 141–147.

[3] L. V. Ahlfors. *Conformal Invariants.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[4] M. Arsenović and J. Gajić. “A note on positive pluriharmonic functions in the unit ball in $\mathbf{C}^n$.” In: *Bull. Int. Math. Virtual Inst.* 11(2) (2021), pp. 249–253.

[5] M. Arsenović and J. Gajić. “Functions simultaneously harmonic and $\mathcal{M}$-harmonic in the unit polydisc.” In: *Filomat* (accepted 22.09.2023.).

[6] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic Function Theory.* Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] H. Bateman. *Higher Transcendental Functions.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[8] H. P. Boas. “Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma.” In: *Amer. Math. Monthly* Vol. 117 No. 9 (November 2010), pp. 770–785.

[9] A. M. Bruckner. “Differentiation of Integrals.” In: *The American Mathematical Monthly* 78(9) (1971), pp. i–51.

[10] A.P. Calderón and A. Zygmund. “Note on the boundary values of functions of several complex variables.” In: *Contributions to Fourier Analysis. (AM-25).* Princeton: Princeton University Press, 1950, pp. 145–165.

[11] C. Carathéodory. “Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten.” In: *Mathematische Annalen* 72 (1) (1912), pp. 107–144.

[12] H. Cartan. "Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique." In: *J. de Math. Pures et Appl.* Vol. 96 (1931), pp. 1–114.

[13] H. H. Chen. "The Schwarz-Pick lemma for planar harmonic mappings." In: *Sci. China Math.* Vol. 54 No. 6 (June 2011), pp. 1101–1118.

[14] S. Chen and A. Rasila. "Schwarz–Pick type estimates of pluriharmonic mappings in the unit polydisk." In: *Illinois J. Math.* 58(4) (2014), pp. 1015–1024.

[15] E. M. Chirka. "Variation of Hartogs' theorems." In: *Proc. Steklov. Inst. Math.* 253(2) (2006), pp. 212–220.

[16] S. Dineen. *The Schwarz Lemma.* Clarendon Press Oxford, 1989.

[17] P. Duren. *Theory of H^p spaces.* Academic Press Inc., 1970.

[18] P. Fatou. "Séries trigonométriques et séries de Taylor." In: *Acta Math.* 30 (1906), pp. 335–400.

[19] F. Forelli. "Pluriharmonicity in terms of harmonic slices." In: *Math. Scand.* 41(2) (1977), pp. 58–364.

[20] H. Furstenberg. "A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups." In: *Annals of Mathematics* 77.2 (1963), pp. 335–386.

[21] J. Gajić. "A note on pluriharmonic functions in the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$." In: *Analysis Mathematica* 48(4) (2022), pp. 1047–1054.

[22] D. Geller. "Some results in H^p theory for the Heisenberg group." In: *Duke Math. J.* 47 (1980), pp. 365–390.

[23] C. R. Graham. "The Dirichlet problem for the Bergman Laplacian. I." In: *Communications in Partial Differential Equations* 8.5 (1983), pp. 433–476.

[24] R. F. Gundy and E. M. Stein. "H^p theory for the poly-disc (biharmonic functions/area integral/Brownian motion)." In: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 76.3 (1979), pp. 1026–1029.

[25] R.C. Gunning and H. Rossi. *Analytic Functions of Several Complex Variables.* Prentice-Hall, series in modern analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[26] M. de Guzman. *Differentiation of Integrals in $\mathbb{R}^n$.* Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, 1975.

[27] G. H. Hardy. "The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function." In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 14(1) (1915), pp. 269–277.

[28] F. Hartogs. "Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potentzen einer Veränderlichen fortschreiten." In: *Math. Ann.* 62 (1906), pp. 1–88.

[29] K. Hoffman. *Banach Spaces of Analytic Functions.* Prentice-Hall, Inc., 1962.

[30] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I: Distribution theory and Fourier analysis.* Vol. 256. Grundlehren Math. Wiss. Springer, Cham, 1983.

[31] M. Jarnicki and P. Pflug. *Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis - 2nd extended edition.* de Gruyter Expositions in Mathematics 9, Walter de Gruyter, 2013.

[32] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, and A. Zygmund. "Note on the Differentiability of Multiple Integrals." In: *Fundamenta Mathematicae* 25 (1935), pp. 217–234.

[33] F. John. "The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients." In: *Commun. Pure Appl. Math.* 3(3) (1950), pp. 273–304.

[34] G. Julia. "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles." In: *J. Math. Pures Appl.* (8) 1 (1918), pp. 47–245.

[35] D. Kalaj. "Schwarz lemma for holomorphic mappings in the unit ball." In: *Glasgow Mathematical Journal* 60.1 (2018), pp. 219–224.

[36] D. Kalaj and M. Vuorinen. "On harmonic functions and the Schwarz lemma." In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 140, no. 1 (2012), pp. 161–165.

[37] Y. Katznelson. *An Introduction to Harmonic Analysis.* 3rd ed. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 2004.

[38] A. Khalfallah. "Old and New Invariant Pseudo-Distances Defined by Pluriharmonic Functions." In: *Complex Anal. Oper. Theory* 9(1) (2015), pp. 113–119.

[39] A. Khalfallah, M. Mateljević, and M. Mhamdi. "Some properties of mappings admitting general Poisson representations." In: *Mediterr. J. Math.* (17.8.2021).

[40] H. O. Kim. "M - harmonic functions with M - harmonic square." In: *Bull. Austral. Math. Soc.* 537 (1996), pp. 123–129.

[41] K.T. Kim, E. A. Poletsky, and G. Schmalz. "Functions holomorphic along holomorphic vector fields." In: *J. Geom. Anal.* 19(3) (2009), pp. 655–666.

[42] M. Klintborg and A. Olofsson. "A series expansion for generalized harmonic function." In: *Analysis and Mathematical Physics* (11.6.2021).

[43] G Knese. "A Schwarz lemma on the polydisk." In: *Proc. Am. Math. Soc.* 135.9 (2007), pp. 2759–2768.

[44] S Kobayashi. *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

[45] P. Koosis. *Introduction to Hp spaces- second edition.* Cambridge University Press, 1998.

[46] A. Korányi. "Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space." In: *Transactions of the American Mathematical Society* 135 (1969), pp. 507–516.

[47] S. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables 2nd ed.* American Mathematical Society, 2001.

[48] S. G. Krantz. *Geometric Analysis of the Bergman Kernel and Metric.* Springer, 2013.

[49] S. G. Krantz. *Geometric Function Theory.* Birkhäuser, 2006.

[50] S. G. Krantz. "On a theorem of F. Forelli and a result of Hartogs." In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 63.4 (2018), pp. 591–597.

[51] H. Lebesgue. "Sur l'intégration des fonctions discontinues." In: *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 3e série, 27 (1910), pp. 361–450.

[52] M. Li and X. Chen. "Schwarz Lemma for Solutions of the α-harmonic Equation." In: *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 45 (2022), pp. 2691–2713.

[53] P. Li, X. Wang, and Q. Xiao. "Several properties of α-harmonic functions in the unit disk." In: *Monatshefte für Mathematik* 184 (2017), pp. 627–640.

[54] S.-Y. Li and J. Luo. "Forelli type theorem in harmonic map forms." In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 147 (2019), pp. 5361–5371.

[55] SY. Li and E. Simon. "Boundary Behavior of Harmonic Functions in Metrics of Bergman Type on the Polydisc." In: *American Journal of Mathematics* 124(5) (2002), pp. 1045–1057.

[56] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. “On the summability of double Fourier series.” In: *Fundamenta Mathematicae* 32 (1939), pp. 112–132.

[57] M. Mateljević. “Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions.” In: *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018), pp. 78–100.

[58] M. Mateljević. *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps.* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[59] M. Mateljević and M. Svetlik. “Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings.” In: *Appl. Anal. Discrete Math.* 14 (2020), pp. 150–168.

[60] P. Melentijević. “Invariant gradient in refinements of Schwarz lemma and Harnack inequalities.” In: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 43 (2018), pp. 391–399.

[61] C. N. Moore. “On the summability of double Fourier series of discontinuous functions.” In: *Mathematische Annalen* 74 (1913), pp. 555–578.

[62] O. M. Nikodým. “Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles.” In: *Fundamenta Mathematicae* 10 (1927), pp. 116–168.

[63] A. Olofsson. “Differential operators for a scale of Poisson type kernels in the unit disc.” In: *J. Anal. Math.* 123 (2014), pp. 227–249.

[64] A. Olofsson and J. Wittsten. “Poisson integrals for standard weighted Laplacians in the unit disc.” In: *J. Math. Soc. Jpn.* 65.2 (2013), pp. 447–486.

[65] M. Pavlović. “Inequalities for the gradient of eigenfunctions of the invariant Laplacian in the unit ball.” In: *Indag. Math.* 2(1) (1991), pp. 89–98.

[66] L. Peijin, A. Rasila, and Z-G. Wang. “On properties of solutions to the α-harmonic equation.” In: *Complex Variables and Elliptic Equations* 65.12 (2020), pp. 1981–1997.

[67] H. Poincaré. “Sur les groupes des *é*quations linéaires.” In: *Acta Math.* 4 (1884), pp. 201–311.

[68] F. Riesz. “*Ü*ber die Randwerte einer analytischen Funktion.” In: *Mathematische Zeitschrift* 18 (1923), pp. 87–95.

[69] W. Rudin. *Function Theory in Polydiscs.* W.A. Benjamin, New-York, 1969.

[70] W. Rudin. *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$. Springer-Verlag, 1980.

[71] W. Rudin. “Pluriharmonic functions in balls.” In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 62(1) (1977), pp. 44–46.

[72] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Company, Singapure, 1987.

[73] S. Saks. “Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral.” In: *Fundamenta Mathematicae* 22 (1934), pp. 257–261.

[74] H. A. Schwarz. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band.* Verlag von Julius Springer, Berlin, 1890.

[75] B. V. Shabat. *Introduction to Complex Analysis Part II Function of several variables.* American Mathematical Society, 1992.

[76] K. R. Shrestha. “Hardy Spaces on the Polydisk.” In: *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 9.3 (2016), pp. 292–304.

[77] P. Sjögren. “Fatou theorems and maximal functions for eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator in a bidisk.” In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 345 (1983), pp. 93–110.

[78] M. Stoll. *Invariant Potential Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$. New York: Cambridge University Press, 1994.

[79] W. Stoll. “The characterization of the strictly parabolic manifolds.” In: *Ann. Scuola. Norm. Pisa* 7(1) (1980), pp. 87–154.

[80] F. Weisz. “Unrestricted Cesàro summability of d-dimensional Fourier series and Lebesgue points.” In: *Constructive Mathematical Analysis* 4.2 (2021), pp. 179–185.

[81] Z. Xu. “Schwarz lemma for pluriharmonic functions.” In: *Indagationes Mathematicae* 27 (2016), pp. 923–929.

[82] A. Zygmund. “On the differentiability of multiple integrals.” In: *Fundamenta Mathematicae* 23.1 (1934), pp. 143–149.

[83] A. Zygmund. “On the Summability of Multiple Fourier Series.” In: *American Journal of Mathematics* 69 (1947), pp. 836–850.

[84] A. Zygmund. *Trigonometric Series: Vol. I, II.* Cambridge University Press, 1968.

[85] A. Zygmund. *Trigonometric Series: Vol. II.* Boston: Cambridge University Press, 1959.

Биографија аутора

Јелена Гајић је рођена 16. 01. 1976. године у Бањалуци, гдје је завршила основну школу и Гимназију. Од 2001. године до 2020.године је била запослена на на Универзитету у Бањој Луци: Природно-математички факултет (предмет: Реалне и комплексне функције), Медицински факултет одсјек-Фармација (предмет: Математика), Архитектонско-грађевински факултет (предмет: Вјероватноћа и статистика) и ТФ (предмети: Математика 1, Математика 2 и Примијењена статистика).

Радови објављени у часописима:

1. M. Arsenović and J. Gajić, *"Functions simultaneously harmonic and $\mathcal{M}$-harmonic in the unit polydisc*, Filomat (accepted 22.09.2023.).
2. J. Gajić, *A note on pluriharmonic functions in the unit polydisc in* $\mathbb{C}^n$, Analysis Mathematica, 48(4)(2022), 1047-1054.
3. M. Arsenović and J. Gajić, *A note on positive pluriharmonic functions in the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Bull. Int. Math. Virtual Inst., 11 (2021), 249–253.
4. J. Гајић, Д. А. Романо and M. Мрђа, *Једна анализа студентских менталних структура при рјешавању задатка о граничној вриједности функције,* МАТ-КОЛ, Бања Лука, XXI (4) (2015), 221-235.
5. S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, J. Gajić, *Knowledge of food quality and additives and its impact on food preference*, Acta Sci. Pol., Technol. Aliment. 12(2) 2013, 215-222.
6. S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, J. Gajić , *The Importance of Consumers' Knowledge About Food Quality, Labeling and Safety in Food Choice*, Journal of Food Research, 2(5)(2013), 57-65.
7. J. Гајић, С. Косић-Јеремић, Један задатак са комплексним бројевима, Настава математике, Београд, ЛИВ 2-3 (2009), 24-26.

Радови презентовани на конференцијама:

1. J. Gajić, *A series expansion of separately* (α, β)*-harmonic function in the unit polydisc*, International Mathematical Conference Analysis, Approximation and Applications, Vrnjačka Banja, Serbia, 21-24. 6. 2023.

2. J. Gajić, *Integral representation of separately (α, β)-harmonic functions,* „12th Symposium „Mathematics and Applications", Belgrade 2-3. 12. 2022.

3 J. Gajić, *Harmonic and $\mathcal{M}$-harmonic functions in the unit polydisc*, „ Analysis, Topology and Applications 2022" (ATA 2022), Vrnjačka Banja, Serbia, 29. 6.-2.7.2022.

4. J. Gajić, *Estimates of distance and gradient for positive pluriharmonic functions in the unit polydisc in* $\mathbb{C}^n$, 11th Symposium „Mathematics and Applications", Belgrade 3-4. 12. 2021.

5. S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, J. Gajić, *Consumers' attitudes towards food additives and food choice*, Book of abstracts, 7th International Congress of Food Technologists, 20-23 September 2011, Opatija, Croatia.

6. Д. Грујић, С. Јањић, М. Ристић, Ј. Гајић, *Испитивање сорпционих својстава тканина различитих сировинских састава*, I међународни конгрес „ Инжењерство, материјали и менаџмент у процесној индустрији", Јахорина, 14– 16.10.2009., Република Српска, 167-180.

7. Ј. Гајић, С. Косић-Јеремић, *Неки задаци са комплексним бројевима*, XVI-та годишња скупштина Научног друштва математичара, Бања Лука, 12-13. 06. 2009.

Објављене књиге:

1. Н. Скакић, Ј. Гајић, Збирка ријешених задатака из Теорије вјероватноће и математичке статистике, Природно-математички факултет, Бањалука, 2008.

Учешће у научним пројектима:

1. Назив пројекта: „CAD/CAM системи у производњи спортске одјеће одговарајућих ергономских и термофизиолошких карактеристика"
   Руководилац: Драгана Грујић
   Трајање: 2 године (2011 ÷ 2012)
   Носилац: Универзитет у Бањој Луци, ТФ, Бања Лука

2. Назив пројекта: „Пројектовање текстила и одјеће за спортски активне људе и испитивање њихових својстава с аспекта удобности при ношењу"
   Руководилац: Драгана Грујић (БиХ) и Симона Јевшник (Република Словенија)
   Трајање: 2 године (2012 ÷ 2013)
   Носилац: Универзитет у Бањој Луци, ТФ, Бања Лука и Academy of design, Љубљана, Република Словенија

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ *Образац 3*
ФАКУЛТЕТ: ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЈЕШТАЈ

о оцјени урађене докторске дисертације

1. ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

Орган који је именовао комисију: Сенат Универзитета у Бањој Луци, на основу приједлога одлуке Наставно-научног вијећа Природно-математичког факултета (Број: 19/3.2464/23, дана 11.10.2023.)

Датум именовања комисије: 26.10.2023.

Број одлуке: 02/04-3.2350-67/23

Чланови комисије:

1. | Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
|---|---|---|
| Академик Зоран Митровић | редовни професор | Математичка анализа и примјене |

Установа у којој је запослен-а	Функција у комисији
Електротехнички факултет, Универзитет у Бањој Луци	предсједник

2. | Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
|---|---|---|
| Академик Миодраг Матељевић | редовни професор | Математичка анализа и примјене |

Установа у којој је запослен-а	Функција у комисији
Математички факултет, Универзитет у Београду	члан

3. | Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
|---|---|---|
| Др Владимир Јовановић | ванредни професор | Математичка анализа и примјене |

Установа у којој је запослен-а	Функција у комисији
Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци	члан

4. | Презиме и име | Звање | Научно поље и ужа научна област |
|---|---|---|
| Др Мирослав Пранић | редовни професор | Математичка анализа и примјене |

Установа у којој је запослен-а	Функција у комисији
Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци	члан

2. ПОДАЦИ О СТУДЕНТУ

Име, име једног родитеља, презиме: Јелена (Бранко) Гајић

Датум рођења: 16.01.1976.

Мјесто и држава рођења: Бања Лука, Р.С, БИХ

2.1. Студије првог циклуса или основне студије или интегрисане студије

Година уписа:	1994	Година завршетка:	2001	Просјечна оцјена током студија:	8.84

Универзитет: Универзитет у Бањој Луци

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Математика

Стечено звање: Дипломирани математичар и информатичар

2.2. Студије другог циклуса или магистарске студије

Година уписа:	2007	Година завршетка:	2010	Просјечна оцјена током студија:	9.25

Универзитет: Универзитет у Новом Саду

Факултет/и: Природно-математички факултет

Студијски програм: Департмент за математику и информатику

Назив завршног рада другог циклуса или магистарске тезе, датум одбране: Прилози теорији оператора –Банахове алгебре и Шатенове класе, 15.01.2010.

Ужа научна област завршног рада другог циклуса или магистарске тезе: математичка анализа и примјене

Стечено звање: мастер математичар

2.3. Студије трећег циклуса

Година уписа:	2018	Број ECTS остварених до сада:	227	Просјечна оцјена током студија:	10.00

Факултет/и: Природно-математички факултет, Универзитет у Бањој Луци

Студијски програм: Математика

2.4. Приказ научних и стручних радова студента

РБ	Подаци о референци	Категорија
1.	M.Arsenović and J.Gajić. „Functions simultaneously harmonic and *M*-harmonic in the unit polydisc.“ Filomat (accepted 22.09.2023).	SCI листа, IF=0.8

У овом раду је дата потпуна карактеризација функција које су истовремено хармонијске и *M*-хармонијске на јединичном полидиску. То су управо функције које су хармонијске по свакој промјенљивој, или еквивалентно то су функције које се могу представити као линеарна комбинација функција које су по свакој од променљивих холоморфне или конјуговано холоморфне. Осим тога изучавана је и мултипликативна структура таквих простора у случају D^n. Користећи наше резултате добијамо карактеризацију функција *u*, дефинисаних на јединичном полидиску, тако да су и *u* и u^s (цијели број $s \geq 2$) истовремено хармонијске и *M*-хармонијске. Наши резултати су у контрасту са резултатима познатим за такве функције у јединичној лопти у C^n.

Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације	ДА	НЕ

РБ		Категорија
2.	J. Gajić, *A note on pluriharmonic functions in the unit polydisc in C^n*, Analysis Mathematica, 48(4) (2022), pp. 1047–1054 DOI: 10.1007/s10476-022-0166-2	SCI листа IF: 0.7

У овом раду је доказана Schwarz–Pick-ова лема за ограничене и позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n. Такође, дате су и процјене растојања у терминима Kobayashi-јеве метрике као и процјене градијента и M-инваријантног реалног градијента за такве функције. Користећи наше резултате за плурихармонијске функције доказан је Harnack-ов тип резултата. Процјене растојања важе у општијим доменима, али без тачних константи. У раду је дат директан доказ за позитивне и ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску. Све процјене, које су добијене, су најбоље процјене и не могу се побољшати.

Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације	ДА	НЕ

РБ		Категорија
3.	M. Arsenović, J. Gajić, *A note on positive pluriharmonic functions in the unit ball in C^n*, Bulletin of International Mathematical Virtual Institute, **11** (2021), 249–253.	

Дато је уопштење Schwarz–Pick-ове леме за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n. За изучавање процјене растојања таквих функција коришћена је Bergman-ова метрика. Поред тога дате су процјене градијента и *M*-инваријантног реалног градијента за такве функције.

Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације	ДА	НЕ

РБ		Категорија
4.	J. Гајић, Д. А. Романо, М. Мрђа, *Једна анализа студентских менталних структура при рјешавању задатка о граничној вриједности функције*, МАТ-КОЛ, Бања Лука, **XXI** (4) (2015), 221-235.	

Овај извјештај садржи анализу неприхватљивих и промашених одговора студената Машинског факултета у Бањој Луци на једно питање о граничној вриједности функције. У процедури израчунавања граничне вриједности у понуђеном задатку осим примјене тзв. 'логаритамског поступка' требало је примјенити и Лопиталов теорем. На основу прикупљених показатеља и деривираних закључака, ослањајући се на APOS теорију и SOLO таксономију, процјењујемо да је концепт граничне вриједности и процеси са тим

концептом (али не и процедурално кориштења овог концепта) за већину тестиране студентске популације прихватљив уз знатне потешкоће. Понуђена је једна реконструкција студентских менталних слика које се индукују у њиховим умовима при настојањима да понуде прихватљиве одговоре на понуђени задатак уз кориштење категоријалних појмова RBC+C теорије апстракције. Чини се да се може формирати хипотеза (чију би оправданост, наравно, требало студиозно испитати) да многи студенти овог факултета немају изграђена неопходно потребна концептуална и процесна знања у њиховим когнитивним равнима о граничним процесима низова и функција због недовољно квалитетно консолидованих знања о својствима објеката поља реалних бројева.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
РБ		Категорија	
5.	S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, J. Gajić, *Knowledge of food quality and additives and its impact on food preference*, Acta Scientiarum Polonorum Technologia Alimentaria, **12**(2) 2013, 215-222.	Scopus	
У овом раду је примјеном статистичких метода испитивано како познавање квалитета хране и улога адитива у исхрани утичу на опредјељење извјесне групе потрошача приликом избора намирница.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
РБ		Категорија	
6.	S. Grujić, R. Grujić, Đ. Petrović, J. Gajić , *The Importance of Consumers' Knowledge About Food Quality, Labeling and Safety in Food Choice*, Journal of Food Research, **2** (5)(2013), 57-65.		
Уз помоћ χ^2-теста је испитивано како извјесне групе млађих потрошача реагују на информације које се тичу квалитета хране, сигурности прехрамбених производа и декларација које се на њима налазе.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**
РБ		Категорија	
7.	J. Гајић, С. Косић-Јеремић, *Један задатак са комплексним бројевима*, Настава математике, Београд, ЛИВ **2-3** (2009), 24-26.		
У овом раду је на више различитих начина рјешен један задатак са комплексним бројевима.			
Припадност рада ужој научној области којој припада предмет истраживања докторске дисертације		**ДА**	**НЕ**

3. УВОДНИ ДИО ОЦЈЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

1. Наслов докторске дисертације: Простори плурихармонијских, *M*-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску
2. Научно поље је математика, а ужа научна област је математичка анализа и примјене.

3. Датум прихватања теме докторске дисертације и бројеви одлука одговарајућих органа чланица и Универзитета: Тема докторске дисертације прихваћена је Одлуком број 02/04-3.121-54/23 коју је донио Сенат Универзитета у Бањој Луци 26.01.2023. године.
4. Сагласност на Извјештај комисије за оцјену подобности теме, кандидата и испуњености услова за менторство за израду докторске дисертације на Природно-математичком факултету кандидата Јелене Гајић, добијена је од Научно-наставног вијећа Природно-математичког факултета Одлуком број 19/3.4099/22 од 14.12.2022. године, а од стране Сената Универзитета у Бањој Луци Одлуком број 02/04-3.121-54/23 од 26.01.2023. године.
5. Садржај докторске дисертације са страничењем:

Увод 1
1 Основни појмови, тврђења и ознаке
1.1 Мултииндекси и ознаке у C^n 4
1.2 Јединични полидиск D^n и јединична лопта B^n у C^n 6
1.3 Холоморфне, хармонијске и плурихармонијске функције 6
1.4 Појединачно хармонијске функције 12
1.5 Аутоморфизми полидиска и лопте 14
1.6 Извод и M-инваријантни реалан градијент 17
1.7 Хипергеометријске функције 18
1.8 Неки простори функција 19
1.9 Простор h^p (D) 21
2 Шварц-Пикова лема за плурихармонијске функције
2.1 Шварц-Пикова лема за холоморфне функције 23
2.2 Процјене растојања за плурихармонијске функције 32
2.3 Процјене градијента за плурихармонијске функције 39
3 Хармонијске и M-хармонијске функције
3.1 M-хармонијске функције 47
3.2 Хармонијске и *M*-хармонијске функције на B^n 52
3.3 Хармонијске и *M*-хармонијске функције на D^n 58
4 H^p простори појединачно (α, β)-хармонијских функција у јединичном полидиску
4.1 Хардијеви простори појединачно хармонијских функција у D^n 66
4.2 (α, β)-хармонијске функције у D 72
4.3 Појединачно (α, β)-хармонијске функције у D^n 86
4.4 (α, β)-Пуасонова репрезентација функција из $sh_{\alpha,\beta}(D^n)$ 92
4.5 H^p теорија за $sh_{\alpha,\beta}(D^n)$ функције 95
4.6 Интегрална репрезентација функција из $sh^p_{\alpha,\beta}(D^n)$, $1 \le p \le +\infty$ 106
4.7 Максимална функција и теореме Фатуовог типа 109
Закључак 123
Литература 125
Биографија аутора 131

Докторска дисертација је написана на српском језику, ћириличним писаним фонтом Times New Roman на 130 страна А4 формата и садржи седам поглавља: Увод, Основни појмови, тврђења и ознаке, Шварц Пикова лема за плурихармонијске функције, Хармонијске и *M*-хармонијске функције, H^p простори појединачно (α,β)-хармонијских функција у јединичном полидиску, Закључак, Литература (85 референци). Осим тога седам страна садржи: информације о ментору, дисертацији и резиме на српском језику,
информације о ментору, дисертацији и резиме преведене на енглески језик, посвету и

садржај.

У уводном поглављу наведени су проблеми и предмети истраживања са хипотезама, циљ истраживаља, кратак преглед досадашњих истраживаља и кратак садржај слиједећих поглавља.

У другом поглављу дефинисани су основни појмови и уведене одговарајуће ознаке. Ради потпуности дате су и дефиниције холоморфних, хармонијских, плурихармонијских и појединачно хармонијских функција и наведена су њихова основна својства и тврђења. При томе, наведена су само она тврђења која се непосредно користе у наставку дисертације. Такође је наведена литература у којој се може наћи више информација о појмовима уведеним у овом поглављу.
Треће поглавље посвећено је Шварцовој и Шварц-Пиковој леми. Уведени су Пуанкареова (хиперболичка) метрика, Пуанкареово (хиперболичко) растојање уз доказе одговарајућих тврђења. Одређено је Пуанкареово растојање тачака из диска, десне полуравни и вертикалног појаса. Дато је уопштење Шварц-Пикове леме са јединичног диска у комплексној равни на случај јединичног полидиска. Потом је уведено Кобајашијево растојање између тачака на D^n и Бергманово растојање између тачака на B^n , као и контрактивна својства Кобајашијеве и Бергманове метрике на D^n и B^n респективно. Дата су уопштења Шварцове леме и неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n. Такође, дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и *M*-инваријантног реалног градијента за такве функције. Користећи те резултате за плурихармонијске функције, доказан је Харнаков тип резултата. Све процјене, које су добијене, су најбоље процјене и не могу се побољшати.

У четвртом поглављу дефинисане се *M*-хармонијске функције на D^n и B^n уз доказе одговарајућих тврђења. Приказано је да је функција, која је дефинисана на јединичној лопти B^n , плурихармонијска ако и само ако је хармонијска и *M*-хармонијска. У наставку су приказани резултати везани су за изучавања веза између класа хармонијских и *M*-хармонијских функција на отвореном јединичном полидиску. Такође је изучавана и мултипликативна структура таквих простора у случају D^n.

Пето поглавље посвећено је H^p теорији. Приказана је H^p теорија за појединачно хармонијске функције на отвореном јединичном полидиску и дати су неки појмови и тврђења за вишеструке Фуријеове редове и диференцирање *n*-интеграла. Затим је приказан развој у ред (α, β)-хармонијских функција у D. Након увођења класа функција на D^n развијена је H^p -теорија за случај појединачно (α, β)-хармонијских функција на D^n : интегралне репрезентације мјерама и L^p функцијама на истакнутој граници T^n, конвергенција у норми и слаба* конвергенција на T^n. Добијен је слаби (1,1)-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију. Показано је да функције на D^k, добијене фиксирањем *n-k* промјенљивих припадају одговарајућем простору појединачно (α', β')-хармонијских функција од *k* промјенљивих. Доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α,β)-хармонијске функције у диску и за појединачно хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску.

У закључку дисертације је на суставан, концизан и језгровит начин изложен дио остварених резултата. Поред тога формулисани су и нови отворени проблеми. Дио трећег, четвртог и већи дио петог поглавља докторске дисертације садржи оригиналне резултате.

4. УВОД И ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

У истраживању се разматрају процјене растојања, обичног и инваријантног градијента плурихармонијских функција дефинисаних на отвореном јединичном полидиску и на отвореној јединичној лопти у C^n. Даље, изучавано је која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. Осим тога уведене су класе функција на полидиску и развијена је H^p теорија из тих класа.

Шварцова лема за холоморфне функције дефинисане на јединичном диску D у комплексној равни C је један од најутицајнијих резултата у комплексној анализи и има велики утицај на развој неколико истраживачких области као нпр геометријска теорија функција, диференцијална геометрија и теорија квазиконформних пресликавања. Више од сто година Шварцова лема има уопштења у разним правцима и постоји обимна литература [3, 13, 14, 16, 35, 36, 38, 43, 47, 57, 60, 69, 81]. Свака реално-вриједносна хармонијска функција на D јесте реални дио неке холоморфне функције и при томе модул градијента те хармонијске функције једнак је модулу извода одговарајуће холоморфне функције. Такође, ако вриједности хармонијске функције припадају $(-1, 1)$, односно интервалу $(0, \infty)$, онда вриједности одговарајуће холоморфне функције припадају вертикалном појасу $S = \{z \in C : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, односно десној полуравни $K = \{z \in C : \operatorname{Re} z > 0\}$. Метод појаса и полуравни развијен је у [57] како би се добиле неједнакости Шварц-Пиковог типа за реално-вриједносне хармонијске функције и хармонијска квазирегуларна пресликавања из D у S [57, 59]. Резултати Чена [13], Калаја и Вуоринена [36] и Мелентијевића [60] могу се добити методом појаса. Процјене извода и својствено томе процјене растојања за различите класе функција (првенствено холоморфних функција на области у C^n) су теме од интереса у области геометријске теорије функција. Аутор рада [38] даје процјене растојања за плурихармонијске функције из произвољне комплексне многострукости у одговарајући интервал у R, али без тачних константи. Чен и Расила [14] су дали Шварц-Пикове процјене парцијалних извода вишег реда ограничене плурихармонијске функције дефинисане на јединичном полидиску. Процјена обичног градијента ограничене плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти B^n из C^n дата је у [81], а процјена *M*-инваријантног реалног градијента такве функције дата је у [60].

Једна од тема теорије функција је изучавање која својства имају функције које истовремено припадају двјема класама. На примјер, аналитичност и p-интеграбилност дају припадност Бергмановом простору. Изучавање веза између класа аналитичких, хармонијских, плурихармонијских функција, као и *M*-хармонијских, је вршено у радовима [2,71]. Нагласак је био на случају јединичне лопте у C^n. Рудин [71] је доказао да је функција дефинисана на јединичној лопти у C^n плурихармонијска ако и само ако је хармонијска и *M*-хармонијска на B^n. Мултипликативна структура таквих простора у случају лопте је разматрана у [2,40].

Почетак теорије Хардијевих простора повезује се са радовима Хардија [27] и Риса [68] из 1915. и 1923. године, респективно. Теорија Хардијевих простора је веома важна грана савремене комплексне и хармонијске анализе. Комбинује технике из теорије холоморфних функција, функционалне анализе, теорије мјере и интеграције и има примјену у хармонијској анализи, Фуријеовој анализи, теорији парцијалних диференцијалних једначина и другим областима математике. H^p простори су најинтензивније проучавани у случају јединичног диска [17, 29, 45, 84]. Вишедимензиона уопштења у класичним доменима у C^n захтјевају технику другачију од технике развијене за диск у комплесној равни C. H^p теорија за појединачно хармонијске фунције развијена је у [24], [69], [76] и [85], за *M*-хармонијске развијена је у [20],[46],[77], [78], а за (α, β)-хармонијске развијена је у [1], [22].

Циљеви истраживања су:

1. Први циљ истраживања је добити процјене извода и својствено томе процјене растојања у случају плурихармонијских функција у D^n. Такве процјене су добијене, и оне се не могу даље побољшати (тачне процјене су добијене).
2. Други циљ истраживања је размотрити хармоничност и *M*-хармоничност у D^n. Добијени су упечатљиви резултати који су у контрасту са ситуацијом у B^n.
3. Трећи циљ истраживања је да се развије H^p-теорија за нову класу појединачно (α,β)-хармонијских функција у D^n.

[1] P. Ahern, J. Bruna, and C. Cascante. “H^p -theory for generalized M-harmonic functions in the unit ball.” In: Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), pp. 103–135.

[2] P. Ahern and W. Rudin. “M-harmonic products.” In: Indag. Mathem., N.S. 2(2) (1991), pp. 141–147.

[3] L. V. Ahlfors. Conformal Invariants. McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.

[4] M. Arsenović and J. Gajić. “A note on positive pluriharmonic functions in the unit ball in Cn .” In: Bull. Int. Math. Virtual Inst. 11(2) (2021), pp. 249–253.

[5] M. Arsenović and J. Gajić. “Functions simultaneously harmonic and M-harmonic in the unit polydisc.” In: Filomat (2023).

[6] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. Harmonic Function Theory. Springer-Verlag, New York, 2000.

[7] H. Bateman. Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill Book Company, New York, 1953.

[8] H. P. Boas. “Julius and Julia: Mastering the Art of the Schwarz Lemma.” In: Amer. Math. Monthly Vol. 117 No. 9 (November 2010), pp. 770–785.

[9] A. M. Bruckner. “Differentiation of Integrals.” In: The American Mathematical Monthly 78(9) (1971), pp. i–51.

[10] A.P. Calderón and A. Zygmund. “Note on the boundary values of functions of several complex variables.” In: Contributions to Fourier Analysis. (AM-25). Princeton: Princeton University Press, 1950, pp. 145–165.

[11] C. Carathéodory. “Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten.” In: Mathematische Annalen 72 (1) (1912), pp. 107–144.

[12] H. Cartan. “Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique.” In: J. de Math. Pures et Appl. Vol. 96 (1931), pp. 1–114.

[13] H. H. Chen. “The Schwarz-Pick lemma for planar harmonic mappings.” In: Sci. China Math. Vol. 54 No. 6 (June 2011), pp. 1101–1118.

[14] S. Chen and A. Rasila. “Schwarz–Pick type estimates of pluriharmonic mappings in the unit polydisk.” In: Illinois J. Math. 58(4) (2014), pp. 1015–1024.

[15] E. M. Chirka. “Variation of Hartogs’ theorems.” In: Proc. Steklov. Inst. Math. 253(2)

(2006), pp. 212–220.

[16] S. Dineen. The Schwarz Lemma. Clarendon Press Oxford, 1989.

[17] P. Duren. Theory of H^p spaces. Academic Press Inc., 1970.

[18] P. Fatou. “Séries trigonométriques et séries de Taylor.” In: Acta Math. 30 (1906), pp. 335–400.

[19] F. Forelli. “Pluriharmonicity in terms of harmonic slices.” In: Math. Scand. 41(2) (1977), pp. 58–364.

[20] H. Furstenberg. “A Poisson Formula for Semi-Simple Lie Groups.” In: Annals of Mathematics 77.2 (1963), pp. 335–386.

[21] J. Gajić. “A note on pluriharmonic functions in the unit polydisc in C^n .” In: Analysis Mathematica 48(4) (2022), pp. 1047–1054.

[22] D. Geller. “Some results in H^p theory for the Heisenberg group.” In: Duke Math. J. 47 (1980), pp. 365–390.

[23] C. R. Graham. “The Dirichlet problem for the Bergman Laplacian. I.” In: Communications in Partial Differential Equations 8.5 (1983), pp. 433–476.

[24] R. F. Gundy and E. M. Stein. “H^p theory for the poly-disc (biharmonic functions/area integral/Brownian motion).” In: Proc. Natl. Acad. Sci. 76.3 (1979), pp. 1026–1029.

[25] R.C. Gunning and H. Rossi. Analytic Functions of Several Complex Variables. Prentice-Hall, series in modern analysis. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[26] M. de Guzman. Differentiation of Integrals in R^n . Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, 1975.

[27] G. H. Hardy. “The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function.” In: Proceedings of the London Mathematical Society 14(1) (1915), pp. 269–277.

[28] F. Hartogs. “Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potentzen einer Veränderlichen fortschreiten.” In: Math Ann 62 (1906), pp. 1–88.

[29] K. Hoffman. Banach Spaces of Analytic Functions. Prentice-Hall, Inc., 1962.

[30] L. Hörmander. The analysis of linear partial differential operators. I: Distribution theory and Fourier analysis. Vol. 256. Grundlehren Math. Wiss. Springer, Cham, 1983.

[31] M. Jarnicki and P. Pflug. Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis - 2nd extended edition. de Gruyter Expositions in Mathematics 9, Walter de Gruyter, 2013.

[32] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, and A. Zygmund. “Note on the Differentiability of Multiple Integrals.” In: Fundamenta Mathematicae 25 (1935), pp. 217–234.

[33] F. John. “The fundamental solution of linear elliptic differential equations with analytic coefficients.” In: Commun. Pure Appl. Math. 3(3) (1950), pp. 273–304.

[34] G. Julia. “Mémoire sur l’itération des fonctions rationnelles.” In: J. Math. Pures Appl. (8) 1 (1918), pp. 47–245.

[35] D. Kalaj. “Schwarz lemma for holomorphic mappings in the unit ball.” In: Glasgow Mathematical Journal 60.1 (2018), pp. 219–224.

[36] D. Kalaj and M. Vuorinen. “On harmonic functions and the Schwarz lemma.” In: Proc. Amer. Math. Soc. 140, no. 1 (2012), pp. 161–165.

[37] Y. Katznelson. An Introduction to Harmonic Analysis. 3rd ed. Cambridge Mathematical

Library. Cambridge University Press, 2004.

[38] A. Khalfallah. "Old and New Invariant Pseudo-Distances Defined by Pluriharmonic Functions." In: Complex Anal. Oper. Theory 9(1) (2015), pp. 113–119.

[39] A. Khalfallah, M. Mateljević, and M. Mhamdi. "Some properties of mappings admitting general Poisson representations." In: Mediterr. J. Math. (17.8.2021).

[40] H. O. Kim. "M-harmonic functions with M-harmonic square." In: Bull. Austral. Math. Soc. 537 (1996), pp. 123–129.

[41] K.T. Kim, E. A. Poletsky, and G. Schmalz. "Functions holomorphic along holomorphic vector fields." In: J. Geom. Anal. 19(3) (2009), pp. 655–666.

[42] M. Klintborg and A. Olofsson. "A series expansion for generalized harmonic function." In: Analysis and Mathematical Physics (11.6.2021).

[43] G Knese. "A Schwarz lemma on the polydisk." In: Proc. Am. Math. Soc. 135.9 (2007), pp. 2759–2768.

[44] S Kobayashi. Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

[45] P. Koosis. Introduction to H^p spaces- second edition. Cambridge University Press, 1998.

[46] A. Korányi. "Harmonic functions on Hermitian hyperbolic space." In: Transactions of the American Mathematical Society 135 (1969), pp. 507–516.

[47] S. Krantz. Function Theory of Several Complex Variables 2nd ed. American Mathematical Society, 2001.

[48] S. G. Krantz. Geometric Analysis of the Bergman Kernel and Metric. Springer, 2013.

[49] S. G. Krantz. Geometric Function Theory. Birkhäuser, 2006.

[50] S. G. Krantz. "On a theorem of F. Forelli and a result of Hartogs." In: Complex Variables and Elliptic Equations 63.4 (2018), pp. 591–597.

[51] H. Lebesgue. "Sur l'intégration des fonctions discontinues." In: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure 3e série, 27 (1910), pp. 361–450.

[52] M. Li and X. Chen. "Schwarz Lemma for Solutions of the α-harmonic Equation." In: Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 45 (2022), pp. 2691–2713.

[53] P. Li, X. Wang, and Q. Xiao. "Several properties of α-harmonic functions in the unit disk." In: Monatshefte für Mathematik 184 (2017), pp. 627–640.

[54] S.-Y. Li and J. Luo. "Forelli type theorem in harmonic map forms." In: Proc. Amer. Math. Soc. 147 (2019), pp. 5361–5371.

[55] SY. Li and E. Simon. "Boundary Behavior of Harmonic Functions in Metrics of Bergman Type on the Polydisc." In: American Journal of Mathematics 124(5) (2002), pp. 1045–1057.

[56] J. Marcinkiewicz and A. Zygmund. "On the summability of double Fourier series." In: Fundamenta Mathematicae 32 (1939), pp. 112–132.

[57] M. Mateljević. "Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions." In: J. Math. Anal. Appl. 464 (2018), pp. 78–100.

[58] M. Mateljević. Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps. Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[59] M. Mateljević and M. Svetlik. "Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings." In: Appl. Anal. Discrete Math. 14 (2020), pp. 150– 168.

[60] P. Melentijević. "Invariant gradient in refinements of Schwarz lemma and Harnack

inequalities." In: Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 43 (2018), pp. 391–399.

[61] C. N. Moore. "On the summability of double Fourier series of discontinuous functions." In: Mathematische Annalen 74 (1913), pp. 555–578.

[62] O. M. Nikodým. "Sur la mesure des ensembles plans dont tous les points sont rectilinéairement accessibles." In: Fundamenta Mathematicae 10 (1927), pp. 116–168.

[63] A. Olofsson. "Differential operators for a scale of Poisson type kernels in the unit disc." In: J. Anal. Math. 123 (2014), pp. 227–249.

[64] A. Olofsson and J. Wittsten. "Poisson integrals for standard weighted Laplacians in the unit disc." In: J. Math. Soc. Jpn. 65.2 (2013), pp. 447–486.

[65] M. Pavlović. "Inequalities for the gradient of eigenfunctions of the invariant Laplacian in the unit ball." In: Indag. Math. 2(1) (1991), pp. 89–98.

[66] L. Peijin, A. Rasila, and Z-G. Wang. "On properties of solutions to the α-harmonic equation." In: Complex Variables and Elliptic Equations 65.12 (2020), pp. 1981–1997.

[67] H. Poincaré. "Sur les groupes des équations linéaires." In: Acta Math. 4 (1884), pp. 201–311.

[68] F. Riesz. "Über die Randwerte einer analytischen Funktion." In: Mathematische Zeitschrift 18 (1923), pp. 87–95.

[69] W. Rudin. Function Theory in Polydiscs. W.A. Benjamin, New-York, 1969.

[70] W. Rudin. Function theory in the unit ball of C^n . Springer-Verlag, 1980.

[71] W. Rudin. "Pluriharmonic functions in balls." In: Proc. Amer. Math. Soc. 62(1) (1977), pp. 44–46.

[72] W. Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, Singapure, 1987.

[73] S. Saks. "Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral." In: Fundamenta Mathematicae 22 (1934), pp. 257–261.

[74] H. A. Schwarz. Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Zweiter Band. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1890.

[75] B. V. Shabat. Introduction to Complex Analysis Part II Function of several variables. American Mathematical Society, 1992.

[76] K. R. Shrestha. "Hardy Spaces on the Polydisk." In: European Journal of Pure and Applied Mathematics 9.3 (2016), pp. 292–304.

[77] P. Sjögren. "Fatou theorems and maximal functions for eigenfunctions of the Laplace-Beltrami operator in a bidisk." In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 345 (1983), pp. 93–110.

[78] M. Stoll. Invariant Potential Theory in the Unit Ball of C^n . New York: Cambridge University Press, 1994.

[79] W. Stoll. "The characterization of the strictly parabolic manifolds." In: Ann. Scuola. Norm. Pisa 7(1) (1980), pp. 87–154.

[80] F. Weisz. "Unrestricted Cesàro summability of d-dimensional Fourier series and Lebesgue points." In: Constructive Mathematical Analysis 4.2 (2021), pp. 179– 185.

[81] Z. Xu. "Schwarz lemma for pluriharmonic functions." In: Indagationes Mathematicae 27 (2016), pp. 923–929.

[82] A. Zygmund. "On the differentiability of multiple integrals." In: Fundamenta Mathematicae

23.1 (1934), pp. 143–149.

[83] A. Zygmund. “On the Summability of Multiple Fourier Series.” In: American Journal of Mathematics 69 (1947), pp. 836–850.

[84] A. Zygmund. Trigonometric Series: Vol. I, II. Cambridge University Press, 1968.

[85] A. Zygmund. Trigonometric Series: Vol. II. Boston: Cambridge University Press, 1959.

5. МАТЕРИЈАЛ И МЕТОДОЛОГИЈА РАДА

Метод истраживања је дедуктиван и теоријски, заснива се на ригорозним доказима који се ослањају на раније добијене резултате. Посебно издвајамо интегралне репрезентације, развој у вишеструке степене редове и процјене градијената за холоморфне функције.

Кандидат је показао да адекватно користи поменути теоријски апарат за рјешавање проблема. Није дошло до промјене плана истраживања који је дат приликом пријаве докторске дисертације.

6. РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНИ ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА

Оригинални и најзначајнији резултати овог истраживања огледају се у:

1) Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n и неједнакости су најбоље могуће.
2) Дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и *M*-инваријантног реалног градијента за такве функције.
3) Доказан је Харнаков тип резултата за холоморфне функције на D^n и на B^n .
4) Доказано је да је функција, дефинисана на D^n , појединачно хармонијска ако и само ако је хармонијска и *M*-хармонијска на D^n .
5) Дат је и други опис простора функција које су истовремено хармонијске и *M*-хармонијске на D^n .
6) Изучавана је и мултипликативна структура таквих простора у случају D^n .
7) Уведене су појединачно (α, β)-хармонијских функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у D и уопштење појединачно хармонијских функција у D^n.
8) Појединачно (α, β)- хармонијске функције су развијене у ред и рјешен је Дирихлеов проблем за непрекидну функцију дефинисану на истакнутој граници T^n .
9) Развијена је H^p теорија за појединачно (α,β)-хармонијске функције: интегралне репрезентације мјерама и L^p функцијама на истакнутој граници T^n, конвергенција у норми и слаба* конвергенција на T^n.
10) Добијен је слаби (1,1)-тип процјене за сужену нетангенцијалну максималну функцију.
11) Показано је да функције на D^k, добијене фиксирањем *n-k* промјенљивих припадају одговарајућем простору појединачно (α', β')-хармонијских функција од *k* промјенљивих.
12) Доказана је теорема Фатуовог типа. Наведени резултати представљају уопштења ранијих резултата за (α, β)-хармонијске функције у диску и за појединачно

хармонијске функције у отвореном јединичном полидиску.

Критичност и коректност тумачења резултата

Резултати истраживања су приказани веома комплектно, на јасан и прегледан начин.

Теоријски допринос и нови истраживачки резултати

Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n и неједнакости су најбоље могуће.

С обзиром да јединична лопта и B^n и јединични полидиск D^n нису бихоломорфно еквивалентни од интереса је изучавање која својства имају функције на D^n које су истовремено хармонијске и M-хармонијске на D^n. У дисертацији је рјешен тај отворен проблем од 1977. године.

Такође, у дисертацији су уведене нове класе функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у D и уопштење појединачно хармонијских функција у D^n, и тиме су отварени нови путеви за даља истраживања.

7. ЗАКЉУЧАК И ПРИЈЕДЛОГ

На основу свега што је наведено у Извјештају, Комисија закључује да је докторска дисертација Јелене Гајић под насловом **„Простори плурихармонијских, М-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску“**, израђена у складу са образложењем које је кандидат приложио приликом пријаве ове теме. Докторска дисертација је урађена према правилима и принципима научно-истраживачког рада и резултат је оригиналног научног рада кандидата. Доказане су неједнакости Шварц-Пиковог типа за ограничене и за позитивне плурихармонијске функције, дефинисане на отвореном јединичном полидиску у C^n као и за позитивне плурихармонијске функције дефинисане на отвореној јединичној лопти у C^n и неједнакости су најбоље могуће. Дате су и процјене растојања у терминима Кобајашијеве и Бергманове метрике као и процјене градијента и М-инваријантног реалног градијента за такве функције. Доказан је Харнаков тип резултата за холоморфне функције на D^n и на B^n. Доказано је да је функција дефинисана на јединичном полидиску у C^n појединачно хармонијска ако и само ако је хармонијска и *M*-хармонијска на D^n. Такође, након увођења појединачно (α, β)-хармонијских функција, које представљају уопштење (α, β)-хармонијских функција у D и уопштење појединачно хармонијских функција у D^n , развијена је H^p теорија из тих класа.

Будући да је кандидат показао темељно познавање предмета истраживања, те у потпуности одговорио на проблематику која се разматра у дисертацији, Комисија предлаже Научно-наставном вијећу Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци и Сенату Универзитета у Бањој Луци да прихвате овај Извјештај и одобре јавну одбрану докторске дисертације.

Мјесто и датум: Бања Лука,

З. Митровић

академик Зоран Митровић, редовни професор
Предсједник комисије

Миодраг Матељевић

академик Миодраг Матељевић, редовни професор
Члан

В. Јовановић

др Владимир Јовановић, ванредни професор
Члан

Пранић Мирослав

др Мирослав Пранић, редовни професор
Члан

ИЗДВОЈЕНО МИШЉЕЊЕ: Члан комисије који не жели да потпише извјештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије дужан је да у извјештај унесе образложење, односно разлоге због којих не жели да потпише извјештај.

Изјава 1 **Прилог 3.**

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем
да је докторска дисертација

Наслов рада Простори плурихармонијских, M-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску

Наслов рада на енглеском језику The spaces of pluriharmonic, M-harmonic and separately (α,β)-harmonic functions in the polydisc

- ☒ резултат сопственог истраживачког рада,
- ☒ да докторска дисертација, у цјелини или у дијеловима, није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- ☒ да су резултати коректно наведени и
- ☒ да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанта

У Бањој Луци, дана 12.12.2023. године

Јелена Гајић

Изјава 2

Изјава којом се овлашћује Универзитет у Бањој Луци
да докторску дисертацију учини јавно доступном

Овлашћујем Универзитет у Бањој Луци да моју докторску дисертацију под насловом
Простори плурихармонијских, M-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску
која је моје ауторско дјело, учини јавно доступном.

Докторску дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио/ла.

- ○ Ауторство
- ○ Ауторство – некомерцијално
- ◉ Ауторство – некомерцијално – без прераде
- ○ Ауторство – некомерцијално – дијелити под истим условима
- ○ Ауторство – без прераде
- ○ Ауторство – дијелити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанта

У Бањој Луци, дана 12.12.2023. године

Јелена Гајић

Изјава 3

Изјава о идентичности штампане и електронске верзије докторске дисертације

Име и презиме аутора Јелена Гајић

Наслов рада Простори плурихармонијских, *M*-хармонијских и појединачно (α,β)-хармонијских функција у полидиску

Ментор проф. др Милош Арсеновић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације идентична електронској верзији коју сам предао/ла за дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци.

У Бањој Луци, дана 12.12.2023. године

Потпис докторанта

Јелена Гајић