UNIVERZITET U BANJOJ LUCI

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NEBOJŠA ĐURIĆ

INVERZNI SPEKTRALNI PROBLEMI ŠTURM-LIUVILOVOG TIPA SA KONSTANTNIM KAŠNJENJEM

DOKTORSKA DISERTACIJA

Banja Luka, 2022.

UNIVERSITY OF BANJA LUKA

FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

NEBOJŠA DJURIĆ

INVERSE SPECTRAL PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE-TYPE WITH A CONSTANT DELAY

DOCTORAL DISSERTATION

Banja Luka, 2022.

Čovjeku koji je uvijek vjerovao u mene,
Radomiru Đuriću - Rusu (1959-2021).

Mentor: dr Miloš Arsenović, redovni profesor na Matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu.
Naslov: Inverzni spektralni problemi Šturm-Liuvilovog tipa sa konstantnim kašnjenjem

Rezime

Spektralna teorija diferencijalnih operatora je veoma značajna oblast matematičke analize zbog velike primjene u ekonomiji, biologiji, astrofizici, elektronici, biofizici, geofizici i drugim tehničkim naukama. Dijeli se na direktne i inverzne probleme. Inverzni spektralni problemi se odnose na određivanje parametara diferencijalnih operatora na osnovu njihovih spektralnih karakteristika. Primjenjuje se u problemima u kojima se do određenih spektralnih karakteristika može doći eksperimentalnim putem. Takođe, značajna je primjena i nekompletnih inverznih problema u kojima su poznate pojedine osobine parametra kao i spektralne vrijednosti.

U drugoj polovini dvadesetog vijeka pojavio se veliki interes za inverzne probleme diferencijalnih operatora. Jedan od najznačajnijih rezultata u inverznoj spektralnoj teoriji se odnosi na klasični Šturm-Liuvilov operator sa Dirihle/Nojmanovim uslovima u kojem je dokazano da dva spektra jedinstveno određuju potencijal, [bor1]. Kasnije ovaj rezultat je generalizovan za druge klase potencijala kao i granične uslove.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U istraživanju se posmatra Šturm-Liuvilov operator sa konstantnim kašnjenjem. U uvodnom poglavlju opisujemo spektralne osobine klasičnog Šturm-Liuvilovog problema i posmatramo inverzni problem iz dva spektra. Dokazaćemo teoremu jedinstvenosti inverznog problema koristeći Borgov rezultat. Do istog rezultata ćemo doći koristeći i Vajlovu funkciju.

U drugom poglavlju rješavamo direktne probleme za Šturm-Liuvilove operatore sa konstantnim kašnjenjem. Opisaćemo spektralne osobine i asimptotska ponašanja karakterističnih funkcija. U istom poglavlju posmatramo pomenuti operator sa početnom funkcijom. Ove rezultate je prvi opisao ruski matematičar Sim Borisovič Norkin u monografiji [nor1] 1965. godine.

Osamdesetih godina dvadesetog vijeka se pojavio interes za rješavanje inverznog problema za operatore Šturm-Liuvilovog tipa sa konstantnim kašnjenjem. U [pik1] je ustanovljeno da vrijedi teorema jedinstvenosti za svako kašnjenje pod uslovom da je potencijal analitička funkcija. U posljednjoj deceniji je dokazano da dva spektra jedinstveno određuju potencijal ukoliko je kašnjenje veće od dvije petine intervala, [vla1], [yur4], [pik4], [bon1]. Ove rezultate dokazujemo u trećem poglavlju. Glavni dio istraživanja je posvećen slučaju kada je kašnjenje

manje od dvije petine intervala. U istom poglavlju posmatramo i nekompletne inverzne probleme za Dirihle/Nojmanove i Robinove granične uslove. Pokazaćemo da su dva spektra dovoljna da odrede potencijal ukoliko je potencijal poznat na dijelu intervala ili je simetričan na podintervalu.

U četvrtom poglavlju posmatramo inverzne probleme za operatore Šturm-Liuvilovog tipa za kašnjenja manja od dvije petine intervala. Za svako kašnjenje iz pomenutog intervala konstruišemo izo-bispektralne potencijale za Šturm-Liuvilov operator sa Dirihle/Nojmanovim i Robinovim graničnim uslovima. Ovaj rezultat je od izuzetne važnosti jer dokazuje da uprkos Borgovom rezultatu, za inverzni problem Šturm-Liuvilovih operatora sa malim kašnjenjima ipak ne vrijedi teorema jedinstvenosti. Time se otvaraju nova pitanja u smislu fizičkog značenja ovih matematičkih rezultata, koje je potrebno detaljno istražiti. Izuzetnu važnost u ovom istraživanju predstavlja partikularni samoadjugovani integralni operator. Za računanje sopstvenih vrijednosti i funkcija koristimo numeričke kao i metode linearnih diferencijalnih operatora. Iskoristićemo numeričke rezultate kako bi došli do analitičkog oblika sopstvenih vrijednosti i sopstvenih funkcija. U istom poglavlju dokazujemo da dva spektra nisu dovoljna da se jedinstveno konstruiše operator sa Dirihle/Nojmanovim graničnim uslovima čak i kada je potencijal iz prostora apsolutno neprekidnih funkcija.

Dio trećeg poglavlja sadrži originalne rezultate, kao i četvrto poglavlje. Konstrukcijom izo-bispektralnih potencijala ujedno dajemo odgovor na višedecenijska pitanja vezana za inverzne probleme Šturm-Liuvilovog tipa sa konstantnim kašnjenjem.

Ključni pojmovi: Diferencijalni operatori sa kašnjenjem, Šturm-Liuvilov operator, Inverzna spektralna teorija.
Naučna oblast: Prirodne nauke
Naučno polje: Matematika
Klasifikacioni kod prema CERIF-u: P 140
Autorstvo: Autorstvo - nekomercijalno - bez prerade

Supervisor: Dr Miloš Arsenović, Full Professor at Faculty of Mathematics, University of Belgrade.

Title: Inverse spectral problems for Sturm-Liouville-type with a constant delay

Abstract

The spectral theory of differential operators is a very important area of mathematical analysis due to its significant application in economics, biology, astrophysics, electronics, biophysics, geophysics, and other technical sciences. It is divided into direct and inverse problems. Inverse spectral problems refer to the determination of the parameters of differential operators based on their spectral characteristics. It is used in problems in which certain spectral characteristics can be obtained experimentally. Also, the application of incomplete inverse problems in which certain properties of parameters as well as spectral values are known is significant.

In the second half of the twentieth century, there was great interest in the inverse problems of differential operators. One of the most significant results in inverse spectral theory refers to the classical Sturm-Liouville operator with Dirichlet/Neumann conditions in which it is proved that two spectra uniquely determine the potential, [bor1]. This result was later generalized for other potential classes as well as boundary conditions.

The paper consists of four chapters. In the study we observe the Sturm-Liouville operator with constant delay. In the introductory chapter, we describe the spectral properties of the classical Sturm-Liouville problem and observe the inverse problem from two spectra. We will prove the uniqueness theorem of the inverse problem using Borg's result. We will reach the same result using Weyl function.

In the second chapter, we solve direct problems for Sturm-Liouville operators with constant delay. We will describe the spectral properties and asymptotic behaviors of characteristic functions. In the same chapter, we observe the mentioned operator with the initial function. These results were first described by the Russian mathematician Sim Borisovich Norkin in the 1965 monograph [nor1].

In the 1980s, there was an interest in solving the inverse problem for Sturm-Liouville-type operators with constant delay. In [pik1], it was found that the uniqueness theorem holds for any delay provided that the potential is an analytic function. In the last decade, it has been proven that two spectra uniquely determine the potential if the delay is greater than two-fifths of the interval, [vla1], [yur4], [pik4], [bon1]. We prove these results in the third chapter. The main part of the research is dedicated to the case when the delay is less than two-fifths of the interval. In the same chapter, we observe incomplete inverse problems for Dirichlet/Neumann and Robin boundary conditions. We will show that two spectra are sufficient to determine the potential if the potential is known at the part of the interval or is symmetric at the subinterval.

In the fourth chapter, we observe inverse problems for Sturm-Liouville-type operators for delays of less than two-fifths of the interval. For each delay from the mentioned interval, we construct iso-bispectral potentials for the Sturm-Liouville operator with Dirichlet/Neumann and Robin boundary conditions. This result is extremely important because it proves that despite Borg's result, the uniqueness theorem does not apply to the inverse problem of Sturm-Liouville operators with small delays. This raises new questions in terms of the physical significance of these mathematical results, which need to be explored in detail. The particular self-adjoint integral operator is extremely important in this research. For calculation of its eigenvalues and functions, we use numerical as well as methods of linear differential operators. We will use numerical results to predict the analytical form of eigenvalues and eigenfunctions. In the same chapter, we prove that two spectra are not sufficient to uniquely construct an operator with Dirichlet/Neumann boundary conditions even when the potential is from the space of absolutely continuous functions.

Part of the third chapter contains the original results, as well as the fourth chapter. By constructing iso-bispectral potentials, we also provide an answer of long-term questions related to Sturm-Liouville-type inverse problems with constant delay.

Keywords: Differential operators with delay, Sturm-Liuoville operator, Inverse spectral theory.
Scientific Area: Natural Sciences
Scientific Field: Mathematics
CERIF Classification Code: P 140

Oznake

$\mathbb{N}$ - skup prirodnih brojeva,

$\mathbb{Z}$ - prsten cijelih brojeva,

$\mathbb{Q}$ - polje racionalnih brojeva,

$\mathbb{R}$ - polje realnih brojeva,

$\mathbb{R}^+$ - skup pozitivnih relanih brojeva

$\mathbb{C}$ - polje kompleksnih brojeva,

$intS$ - najveći otvoren skup sadržan kao podskup u S,

$\overline{S}$ - zatvorenje skupa S,

$S^\perp$ - ortogonalni komplement skupa S u Hilbertovom prostoru,

$span\{X\}$ - linearni omotač skupa X,

Re - realni dio kompleksnog broja ili funkcije,

Im - imaginarni dio kompleksnog broja ili funkcije,

$\mathbf{1}_X$ - indikator funkcija na skupu X,

$Res_{x=a}f(x)$ - reziduum meromorfne funkcije $f(x)$ u izolovanom singularitetu a,

$C[a,b]$ - prostor neprekidnih funkcija na $[a,b]$,

$AC[a,b]$ - prostor apsolutno neprekidnih funkcija na $[a,b]$,

$C^k[a,b]$ - prostor k puta neprekidno diferencijabilnih funkcija na $[a,b]$,

$L^p(X)$ - Banahov prostor funkcija integrabilnih sa stepenom $1 \leq p < \infty$ na skupu X,

$L^\infty(X)$ - Banahov prostor esencijalno ograničenih funkcija na skupu X,

$W_N^2[a,b]$ - Soboljev prostor funkcija $f(x)$, takvih da $f^{(N)}(x) \in L^2(a,b)$

l^p - prostor p apsolutno sumabilnih nizova za $1 \leq p < \infty$,

l^∞ - prostor ograničenih nizova,

$Ker(T)$ - jezgro linearnog operatora T,

$\mathcal{R}(T)$ - prostor slike operatora T,

T^* - adjugovan operator za A na Hilbertovom prostoru,

$\|\cdot\|$ - norma,

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ - skalarni proizvod,

s.s. - skoro svuda.

Sadržaj

1 Uvod

Klasični Šturm-Liuvilov problem posmatra linearne diferencijalne jednačine drugog reda oblika

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad a < x < b, \tag{1.0.1}$$

uz razdvojene granične uslove

$$\begin{aligned} y(a)\sin\alpha + y'(a)\cos\alpha &= 0, \\ y(b)\sin\beta + y'(b)\cos\beta &= 0, \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

gdje je λ parametar i $q(x) \in \mathbb{R}$.

Napomenimo da se opšta diferencijalna jednačina drugog reda

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + l(x)y(x) = \mu r(x)y(x), \quad a < x < b \tag{1.0.3}$$

gdje su funkcije $p(x)$ i $r(x)$ pozitivne, može svesti na formu (1.0.1) uz pretpostavku da $p(x) \in C^1[a,b]$ i $p(x)r(x) \in C^2[a,b]$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a = 0$ i $b = \pi$. Smjenom $t = \pi(x-a)/(b-a)$ transformišemo interval $[a,b]$ u $[0,\pi]$ bez mijenjanja graničnih uslova.

Funkciju $y(x,\lambda) \in C^2[a,b]$ nazivamo rješenjem Šturm-Liuvilovog problema ako zadovoljava jednačinu (1.0.1) uz granične uslove (1.0.2). Pretpostavimo da za neko λ_0 granični problem (1.0.1)-(1.0.2) ima netrivijalno rješenje $y(x,\lambda_0)$. U tom slučaju λ_0 se naziva sopstvena vrijednost, a $y(x,\lambda_0)$ sopstvena funkcija graničnog problema. Glavni rezultat u Šturm-Liuvilovoj teoriji za klasični problem je da normalizovane sopstvene funkcije formiraju ortonormiranu bazu Hilbertovog prostora $L^2(a,b)$. Ovaj rezultat ćemo dokazati u ovom poglavlju. Zahvaljujući navedenim osobinama Šturm-Liuvilova teorija ima značajnu primjenu u teoriji ortogonalnih funkcija, [har1], [dju1].

Pored direktnog problema, posmatraćemo i inverzni problem za klasični operator. Glavni rezultati u inverznoj spektralnoj teoriji za pomenuti operator su istraženi u drugoj polovini dvadesetog vijeka. Matematičari koji su dali značajan doprinos su G. Borg, M.G. Gašimov, I.M. Geljfand, B.M. Levitan, I.S. Sargsjan, V.A. Marčenko i H. Vajl. U monografiji [fre1] su detaljno obrađeni važniji rezultati ovih matematičara.

Koristeći neke od ovih rezultata dokazaćemo teoremu jedinstvenosti za inverzni problem Šturm-Liuvilovog operatora na dva različita načina. Jedan pristup će biti sličan Borgovom rezultatu [bor1] gdje ćemo dokazati da je operator jedinstveno određen iz dva spektra generisana Dirihle/Nojmanovim graničnim uslovima. U drugom pristupu ćemo koristiti Vajlovu funkciju koja se pokazala kao efektivan metod u rješavanju inverznih problema, [lev2].

1.1 Spektralna teorija operatora

Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor i označimo sa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni proizvod u $\mathcal{H}$. Linearni operator T je linearno preslikavanje sa potprostora $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H}$ na prostor $\mathcal{H}$, gdje $\mathcal{D}(T)$ predstavlja domen operatora. Rang operatora T je potprostor $\mathcal{R}(T) = \{Tx : x \in \mathcal{D}(T)\}$, dok je jezgro operatora T dato sa $Ker(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}$. Kažemo da je linearan operator T ograničen ako je vrijednost

$$\sup_{x\in\mathcal{D}(T),x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

konačna, u suprotnom kažemo da je operator T neograničen. Koristimo oznaku $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ za skup svih ograničenih linearnih operatora koji se slikaju sa prostora $\mathcal{H}_1$ na $\mathcal{H}_2$. Za operator T kažemo da je gusto definisan ako je potprostor $\mathcal{D}(T)$ od $\mathcal{H}$ gust u $\mathcal{H}$. Graf linearnog operatora T na $\mathcal{H}$ je skup

$$\mathcal{G}(T) := \big\{\langle x, Tx\rangle : x \in \mathcal{D}(T)\big\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}.$$

Operator S je proširenje operatora T ako vrijedi $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(S)$ i $Tx = Sx$, $\forall x \in \mathcal{D}(T)$. U tom slučaju koristimo notaciju $T \subset S$.

Definicija 1.1.1. *Za linearan operator T na $\mathcal{H}$ kažemo da je zatvoren ako je graf $\mathcal{G}(T)$ zatvoren potprostor u $\mathcal{H}$. Za linearan operator T na $\mathcal{H}$ kažemo da je operator zatvorenja ako je $\overline{\mathcal{G}(T)} = \mathcal{G}(\overline{T})$, pri čemu operator $\overline{T}$ nazivamo zatvorenje operatora T.*

Definicija 1.1.2. *Neka je $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ neograničen gusto definisan linearan operator. Adjugovan operator $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to \mathcal{H}$ definišemo na sljedeći način:*
Domen $\mathcal{D}(T^*)$ sadrži vektore $y \in \mathcal{H}$ za koje je preslikavanje $\mathcal{D}(T) \ni x \mapsto \langle Tx, y\rangle$ ograničeno u odnosu na normu $\mathcal{H}$. Za takvo $y \in \mathcal{H}$ postoji, po Risovoj teoremi, jedinstveni vektor T^*y tako da

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Definicija 1.1.3. *Za gusto definisan linearan operator $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ kažemo da je simetričan (ili Hermitov) operator ako vrijedi*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T),$$

ili, ekvivalentno, $T \subset T^*$. Štaviše:

(i) T nazivamo samoadjugovan ako je $T = T^*$.

(ii) T nazivamo esencijalno samoadjugovan ako je $\overline{T}$ samoadjugovan.

Napomenimo da za simetričan operator T vrijedi $T \subset T^{**} \subset T^*$, dok za zatvoren simetričan operator vrijedi $T = T^{**} \subset T^*$. Za samoadjugovan operator T vrijedi relacija $T = T^{**} = T^*$.

U nastavku ćemo se baviti spektrom linearnih neograničenih operatora. Takođe, posmatraćemo osobine samoadjugovanih operatora.

Definicija 1.1.4. *Neka je $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ linearan operator. Rezolventni skup $\rho(T)$ sadrži kompleksne brojeve z za koje je operator $T - z : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ bijektivan i inverz $(T - z)^{-1}$ ograničen. Spektar operatora T je defінsan kao $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Punktalni spektar $\sigma_p(T)$ je skup sopstvenih vrijednosti operatora T.*

Lema 1.1.5. *Spektar samoadjugovanog operatora T na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$ je neprazan podskup realne prave, odnosno $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da spektar mora biti podskup realne prave. Neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ i pretpostavimo da $\lambda \in \sigma(T)$. Tada postoji $0 \neq x \in \mathcal{D}(T^*)$ tako da je $Tx = \lambda x = T^* x$ i vrijedi

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, T^* x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle,$$

odakle slijedi da je $2Im(\lambda)\langle x, x \rangle = 0$, odnosno $x = 0$, ako je $Im(\lambda) \neq 0$, prema tome vrijedi $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. U nastavku ćemo dokazati da je spektar neprazan. Pretpostavimo suprotno odnosno da je $\sigma(T) = \emptyset$. U tom slučaju je T invertibilan i T^{-1} je ograničen samoadjugovan operator. Za $\lambda \neq 0$ operator

$$(T^{-1} - \lambda I) = (I - \lambda T)T^{-1} = \lambda(\frac{1}{\lambda} I - T)T^{-1}$$

ima ograničen inverzni operator

$$\frac{1}{\lambda} T \left(\frac{1}{\lambda} I - T \right)^{-1}.$$

Prema tome $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$, jer spektar ne može biti prazan, a $\lambda = 0$ je jedina preostala vrijednost koja zadovoljava uslov. Ipak, u tom slučaju slijedi da je $T^{-1} = 0$ što je kontradikcija. □

Značajnu ulogu u spektralnoj teoriji zauzimaju kompaktni operatori. Kao što je poznato linearan operator $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ je kompaktan ako je slika jedinične lopte iz $\mathcal{H}_1$ relativno kompaktan skup u $\mathcal{H}_2$, pri čemu je skup relativno kompaktan ako je njegovo zatvorenje kompaktan skup. Koristimo oznaku $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ za skup svih kompaktnih operatora koji djeluju na pomenutim prostorima. Ako je $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, tada za pomenuti skup operatora koristimo oznaku $\mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$. Poznato je da je svaki kompaktan operator ograničen, odnosno

$\mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. U nastavku se bavimo spektralnom teorijom kompaktnih operatora, ali prije toga ćemo obraditi Fredholmovu alternativu. Navodimo sljedeće dvije teoreme bez dokaza, a više možete naći u [ars1] i [hel1].

Teorema 1.1.6. (Fredholmova alternativa). *Neka je T kompaktan operator na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, tada*

1. *$Ker(I - T)$ je konačno dimenzionalan,*
2. *$\mathcal{R}(I - T)$ je zatvoren i konačno dimenzionalan,*
3. *$\mathcal{R}(I - T) = \mathcal{H}$ ako i samo ako je $Ker(I - T) = \{0\}$.*

Fredholmova alternativa nam govori da se operator $I - T$, pri čemu je T kompaktan, ponaša kao operator na konačno dimenzionalnom prostoru. Znamo da su linearni operatori na konačno dimenzionalnim prostorima injektivni ako i samo ako su surjektivni, a vidimo slično ponašanje pod navedenim pretpostavkama. Napominjemo da Fredholmova alternativa vrijedi i za kompaktne operatore na Banahovim prostorima.

Teorema 1.1.7. *Neka je $\mathcal{H}$ beskonačno dimenzionalan Hilbertov prostor i $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, tada:*

1. *$0 \in \sigma(T)$,*
2. *$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$,*
3. *vrijedi samo jedan od sljedećih uslova:*
   - (a) *$\sigma(T) \setminus \{0\} = \emptyset$,*
   - (b) *$\sigma(T) \setminus \{0\}$ je konačan skup,*
   - (c) *$\sigma(T) \setminus \{0\}$ niz koji konvergira ka nuli.*
4. *Svaki element $\lambda \in \sigma(T)$ je izolovan i $\dim Ker(I - T) < \infty$.*

Teorema 1.1.8. *Neka je $T = T^* \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, tada sopstvene vrijednosti operatora T čine realni niz koji konvergira ka nuli, dok od sopstvenih funkcija možemo konstruisati ortonormalnu bazu prostora $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Neka su $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ različite nenula sopstvene vrijednosti operatora T. Pošto je T samoadjugovan, sopstvene vrijednosti su realne. Neka je $\lambda_0 = 0$ i za $n \geq 0$, označimo sa

$E_n := Ker(T - \lambda_n I)$. Pokažimo da je $E_n \neq E_m$ za $n \neq m$. Ako $u \in E_m$ i $v \in E_n$, za $n \neq m$ imamo

$$\langle Tu, v\rangle = \lambda_m \langle u, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \lambda_n \langle u, v\rangle,$$

odakle slijedi da je $\langle u, v\rangle = 0$.

Označimo sa F linearni omotač od $\bigcup_{n\geq 0} E_n$, dokazaćemo da je F gust u $\mathcal{H}$. Jasno je da vrijedi $T(F) \subset F$. Pošto je T samoadjugovan, vrijedi da je $T(F^\perp) \subset F^\perp$. Označimo sa $\widetilde{T}$ restrikciju operatora T na skup $F^\perp$. Operator $\widetilde{T}$ je kompaktan i samoadjugovan i djeluje na ortogonalnom komplementu skupa F. Kako je $Ker(\widetilde{T} - \lambda_n I) \subset F$, zaključujemo da je $\sigma(\widetilde{T}) = \{0\}$, odakle slijedi da je $\widetilde{T} = 0$. Ali, pošto je $F^\perp \subset Ker(T) = E_0 \subset F$, zaključujemo da je $F^\perp = \{0\}$, u suprotnom bi $\widetilde{T} \neq 0$. Prema tome F je gust u Hilbertovom prostoru.

Na kraju izaberemo ortonormalnu bazu svakog potprostora E_n. Uzimajući njihovu uniju dobijamo ortonormalnu bazu čitavog prostora $\mathcal{H}$. □

Definicija 1.1.9. *Ograničen linearni operator $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ je Hilbert-Šmitov ako je*

$$\|T\|_{HS}^2 := \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty,$$

pri čemu je $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ proizvoljna ortonormalna baza prostora $\mathcal{H}_1$. Broj $\|T\|_{HS}$ se naziva Hilbert-Šmitova norma i ne zavisi od izbora baze.

Lema 1.1.10. *Svaki Hilbert-Šmitov opertator $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ je kompaktan.*

Dokaz. Za proizvoljno $x \in \mathcal{H}_1$ vrijedi da je $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, x\rangle Te_n$. Dalje slijedi da je

$$\|T - T_N\|^2 \leq \|T - T_N\|_{HS}^2 = \sum_{N+1<n} \|Te_n\|^2 \to 0, \quad N \to \infty.$$

Prema tome konačno dimenzionalni operatori T_N konvergiraju po normi operatoru T, odakle zaključujemo da je operator T kompaktan. □

Teorema 1.1.11. *Neka je $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$, gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren skup. Operator T je Hilbert-Šmitov ako i samo ako postoji integralno jezgro $K(x, y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ tako da*

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y) dy. \tag{1.1.1}$$

U tom slučaju je $\|T\|_{HS} = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}$.

Dokaz. Neka je $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$, pokažimo da je operator T dat sa (1.1.1) Hilbert-Šmitov. Neka je $\{e_n\}_{n\geq 1}$ ortonormalna baza u $\mathcal{H}$, onda funkcije $e_{m,n}(x,y) = e_m(x)\overline{e_n(y)}$ čine ortonormalnu bazu prostora $L^2(\Omega \times \Omega)$. Dalje, vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |Te_n|^2 = \sum_{m,n} |\langle e_m, Te_n\rangle|^2 = \sum_{m,n} \left| \int_\Omega \overline{e_m(x)} \Big(\int_\Omega K(x,y) e_n(y) dy \Big) dx \right|^2$$
$$= \sum_{m,n} \left| \int_\Omega \int_\Omega \overline{e_m(x)} e_n(y) K(x,y) dx dy \right|^2 = \sum_{m,n} |\langle e_{m,n}, K\rangle|^2 = \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}.$$

Dalje, neka je T proizvoljan Hilbert-Šmitov operator na $\mathcal{H}$. Za svako $u \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, u\rangle Te_n = \sum_{m,n} \langle e_n, u\rangle \langle e_m, Te_n\rangle e_m.$$

Uzimajući,

$$K(x,y) = \sum_{m,n} \overline{e_n(y)} \langle e_m, Te_n\rangle e_m(x) = \sum_{m,n} \langle e_m, Te_n\rangle e_{m,n}(x,y),$$

lako se provjeri da $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$, kao i ostale osobine. □

U nastavku ćemo nešto više reći o Risovoj bazi u Hilbertovim prostorima. Više informacija o ovoj temi možete naći u [fre1].

Definicija 1.1.12. *Skup $\{f_n\}_{n\geq 1}$ nazivamo Risovom bazom Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ ako postoji ograničen linearan invertibilan operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tako da je $Ae_n = f_n$, pri čemu je $\{e_n\}_{n\geq 1}$ ortonormalna baza.*

Ideja definicije je zasnovana na sljedećem: za proizvoljno $f \in \mathcal{H}$ vrijedi

$$A^{-1}f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A^{-1}f, e_n\rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, (A^*)^{-1}e_n\rangle e_n,$$

odakle slijedi da je

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \chi_n\rangle f_n,$$

gdje je $\chi_n = (A^*)^{-1}e_n$ i $f_n = Ae_n$.
Ekvivalentno Risova baza se može definisati na sljedeći način: Niz vektora $\{f_n\}_{n\geq 1}$ nazivamo Risov niz ako postoje konstante $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$ tako da je

$$C_1 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \Big) \leq \Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \Big\|^2 \leq C_2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \Big),$$

za svaki niz $\{a_n\}_{n\geq 1} \in l^2$. Risov niz nazivamo Risovom bazom ako je $span\{f_n\}_{n\geq 1}$ gust u H.

Teorema 1.1.13. *Neka je $\{f_n = Ae_n\}_{n\geq 1}$, Risova baza od $\mathcal{H}$, gdje je $\{e_n\}_{n\geq 1}$ ortonormalna baza i A ograničen linearan operator. Neka je $\{g_n\}_{n\geq 1}$ niz vektora u $\mathcal{H}$ tako da vrijedi*

$$\Lambda := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n - f_n\| \right)^{1/2} < \infty.$$

1. *Ako je $\Lambda < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, tada $\{g_n\}_{n\geq 1}$ čini Risovu bazu.*

2. *Ako je $\{g_n\}_{n\geq 1}$ $\omega-$linearno nezavisan ili kompletan u $\mathcal{H}$, tada $\{g_n\}_{n\geq 1}$ čini Risovu bazu.*

Dokaz. Dokazaćemo samo prvi dio teoreme, kompletan dokaz možete naći u [fre1]. Posmatramo operator

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (f_n - g_n), \quad \{c_n\}_{j\geq 1} \in l^2.$$

Jasno je da je T ograničen linearan operator i $\|T\| \leq \Lambda$. Štaviše, $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 < \infty$. Kako je

$$A - T = (E - TA^{-1})A, \quad i \quad \|TA^{-1}\| < 1,$$

slijedi da je $A - T$ linearan ograničen invertibilan operator. Sa druge strane

$$(A - T)e_n = g_n,$$

odakle zaključujemo da je $\{g_n\}_{n\geq 1}$ Risova baza u $\mathcal{H}$. □

Posljedica 1.1.14. *Neka je dat niz $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ oblika*

$$\lambda_n = n + \frac{a}{n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\}_{n\geq 0} \in l^2, \quad a \in \mathbb{C},$$

pri čemu je $\lambda_n \neq \lambda_k$ za $n \neq k$. Tada $\{\cos \lambda_n x\}_{n\geq 1}$ čini Risovu bazu u $L^2(0, \pi)$.

Dokaz. Može se pokazati da je niz $\{\cos(\lambda_n x)\}_{n\geq 0}$ kompletan u $L^2(0, \pi)$, [fre1]. Sa druge strane vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \cos nx - \cos \lambda_n x\| < \infty,$$

te dokaz slijedi na osnovu Teoreme 1.1.13. □

1.2 Šturm-Liuvilov operator na konačnom intervalu

Posmatramo granični problem $L = L(q, h, H)$:

$$ly := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{1.2.1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \;\; V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{1.2.2}$$

gdje je λ spektralni parametar; $h, H \in \mathbb{R}$ i $q(x) \in L^2(0, \pi)$. Funkcija $q(x)$ se naziva potencijal. Domen graničnog problema (1.2.1)-(1.2.2) je dat sa

$$\mathcal{D}(L) = \Big\{ y(x) \in L^2[0, \pi] : y'(x) \in AC[0, \pi], \;\; y''(x) \in L^2(0, \pi), \;\; U(y) = V(y) = 0 \Big\}.$$

Šturm-Liuvilov operator je neograničen linearan operator. Domen $\mathcal{D}(L)$ je gust u $L^2(0, \pi)$, prema tome Šturm-Liuvilov operator je gusto definisan.

U skladu sa Definicijom 1.1.4, vrijednosti parametra λ za koje granični problem L ima netrivijalna rješenja nazivaju se sopstvene vrijednosti, a odgovarajuća netrivijalna rješenja se nazivaju sopstvene funkcije. Skup sopstvenih vrijednosti se naziva spektar graničnog problema L.

U ovom poglavlju ćemo obraditi spektralne osobine graničnog problema L i posmatraćemo asimptotska ponašanja sopstvenih vrijednosti i funkcija. Na početku ćemo odrediti oblik integralne jednačine koji treba da zadovolji opšte rješenje jednačine (1.2.1). Uvodimo notaciju $\lambda = z^2$, koju koristimo kroz čitavo poglavlje.

Lema 1.2.1. *Integralna jednačina ekvivalentna sa (1.2.1) je oblika*

$$y(x) = C_1 \sin zx + C_2 \cos zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t)y(t) \sin z(x - t)dt. \tag{1.2.3}$$

Dokaz. Jednačina (1.2.1) je ekvivalentna sa

$$y''(x) + \lambda y(x) = q(x)y(x).$$

Na ovu jednačinu ćemo primijeniti metodu varijacije konstanti. Posmatrajmo pridruženu homogenu jednačinu

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,$$

čije je rješenje

$$y(x) = C_1(x) \sin zx + C_2(x) \cos zx. \tag{1.2.4}$$

Varirajmo konstante da zadovoljavaju uslove

$$\begin{aligned} C_1'(x)\sin zx + C_2'(x)\cos zx =& 0, \\ C_1'(x)z\cos zx - C_2'(x)z\sin zx =& q(x)y(x). \end{aligned}$$

Rješenja ovog sistema su

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{z}\int\limits_0^x q(t)y(t)\cos ztdt + C_1, \\ C_2(x) &= -\frac{1}{z}\int\limits_0^x q(t)y(t)\sin ztdt + C_2, \end{aligned}$$

gdje su C_1 i C_2 konstante. Ako $C_1(x)$ i $C_2(x)$ uvrstimo u (1.2.4) dobijamo

$$y(x) = \sin zx\Big(\frac{1}{z}\int\limits_0^x q(t)y(t)\cos ztdt + C_1\Big) + \cos zx\Big(-\frac{1}{z}\int\limits_0^x q(t)y(t)sinztdt + C_2\Big),$$

odnosno

$$y(x) = \frac{1}{z}\int\limits_0^x q(t)y(t)sinz(x-t)dt + C_1\sin zx + C_2\cos zx.$$

Lako se pokaže suprotni smijer tako što desnu stranu iz (1.2.3) uvrstimo u (1.2.1). □

Uočimo da vrijedi

$$y'(x) = zC_1\cos zx - zC_2\sin zx + \int\limits_0^x q(t)y(t)\cos z(x-t)dt \tag{1.2.5}$$

Pored graničnih uslova (1.2.2) često se posmatraju drugi razdvojeni granični uslovi:

(i) $U(y) = y(\pi) = 0$,

(ii) $y(0) = V(y) = 0$,

(iii) $y(0) = y(\pi) = 0$.

Neka su $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$, $\phi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ rješenja jednačine (1.2.1) uz početne uslove

$$\begin{gathered} C(0,\lambda) = 1,\ C'(0,\lambda) = 0,\ S(0,\lambda) = 0,\ S'(0,\lambda) = 1, \\ \phi(0,\lambda) = 1,\ \phi'(0,\lambda) = h,\ \psi(,\pi,\lambda) = 1,\ \psi'(\pi,\lambda) = -H. \end{gathered}$$

Koristeći (1.2.3) dobijamo

$$
\begin{aligned}
C(x,\lambda) =& \cos zx + \frac{1}{z}\int_0^x q(t)C(t,\lambda)\sin z(x-t)dt,\\
S(x,\lambda) =& \frac{1}{z}\sin zx + \frac{1}{z}\int_0^x q(t)S(t,\lambda)\sin z(x-t)dt,\\
\phi(x,\lambda) =& \cos zx + \frac{h}{z}\sin zx + \frac{1}{z}\int_0^x q(t)\phi(t)\sin z(x-t)dt,\\
\psi(x,\lambda) =& \cos z(\pi - x) + \frac{H}{z}\sin z(\pi-x) - \frac{1}{z}\int_x^\pi q(t)\psi(t)\sin z(x-t)dt.
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

Lako se pokazuje da su funkcije $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$, $\phi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ za svako $x \in \mathbb{R}$ cijele po λ. Izabrali smo početne uslove tako da vrijedi

$$U(\phi) = \phi'(0,\lambda) - h\phi(0,\lambda) = 0,\ V(\psi) = \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0.$$

Označimo

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x), \phi(x)\rangle_W, \tag{1.2.7}$$

gdje je

$$\langle y(x), z(x)\rangle_W := y(x)z'(x) - y'(x)z(x).$$

Vronskijan od $y(x)$ i $z(x)$. Po osobini Liuvilove formule za Vronskijan $\langle \psi(x,\lambda), \phi(x,\lambda)\rangle_W$ ne zavisi od x, [cod1]. Funkcija $\Delta(\lambda)$ se zove karakteristična jednačina za granični problem L. Ako uvrstimo $x = 0$ i $x = \pi$ u (1.2.6) dobijamo

$$\Delta(\lambda) = V(\phi) = -U(\psi).$$

Uočimo da za $x = \pi$ imamo $\Delta(\lambda) = \phi'(\pi,\lambda) + H\phi(\pi,\lambda)$, odnosno

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) = (h+H)\cos z\pi + &\left(\frac{hH}{z} - z\right)\sin z\pi + \int_0^\pi q(t)\phi(t,\lambda)\cos z(\pi - t)dt\\
&+\frac{H}{z}\int_0^\pi q(t)\phi(t,\lambda)\sin z(\pi-t)dt
\end{aligned}
\tag{1.2.8}
$$

Funkcija $\Delta(\lambda)$ je cijela po λ, a u nastavku pokazujemo da je njen skup nula $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ najviše prebrojiv.

Teorema 1.2.2. *(i) Nule $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ karakteristične funkcije $\Delta(\lambda)$ odgovaraju sopstvenim vrijednostima graničnog problema L.*
(ii) Funkcije $\phi(x,\lambda)$ i $\psi(x,\lambda)$ su sopstvene funkcije i postoji niz $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ tako da

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\phi(x,\lambda_n),\ \ \beta_n \neq 0. \tag{1.2.9}$$

Dokaz. (*i*) Neka je λ_0 nula funkcije $\Delta(\lambda)$. Na osnovu (1.2.7) vrijedi $\psi(x,\lambda_0)\phi'(x,\lambda_0) = \psi'(x,\lambda_0)\phi(x,\lambda_0)$ odnosno $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0\phi(x,\lambda_0)$, pri čemu funkcije $\psi(x,\lambda_0)$, $\phi(x,\lambda_0)$ zadovoljavaju početne uslove (1.2.2). Prema tome, λ_0 je sopstvena vrijednost i $\psi(x,\lambda_0)$, $\phi(x,\lambda_0)$ su sopstvene funkcije.
(*ii*) Neka su λ_0, $y_0(x)$ sopstvena vrijednost i sopstvena funkcija graničnog problema L. Tada vrijedi $U(y_0) = V(y_0) = 0$. Jasno je da je $y_0(0) \neq 0$, te bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $y_0(0) = 1$. Tada je $y_0'(0) = h$, odnosno $y_0(x) = \phi(x,\lambda_0)$. Konačno, $\Delta(\lambda_0) = V(y_0(x)) = 0$. Time smo dokazali da za svaku sopstvenu vrijednost postoji jedinstvena sopstvena funkcija do na multiplikativnu konstantu. □

Težinske vrijednosti graničnog problema L definišemo na sljedeći način

$$\alpha_n := \int_0^\pi \phi^2(x,\lambda_n)dx. \tag{1.2.10}$$

Vrijednosti $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ nazivamo spektralne vrijednosti graničnog problema L.

Lema 1.2.3. *Vrijedi*

$$\beta_n\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n) \tag{1.2.11}$$

gdje je β_n *definisano u (1.2.9), te* $\dot{\Delta}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

Dokaz. Iz jednačina

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda), \quad -\phi''(x,\lambda) + q(x)\phi(x,\lambda) = \lambda_n\phi(x,\lambda),$$

dobijamo

$$\frac{d}{dx}\langle\psi(x,\lambda),\phi(x,\lambda_n)\rangle_W = \psi(x,\lambda)\phi''(x,\lambda_n) - \psi''(x,\lambda)\phi(x,\lambda_n) = (\lambda-\lambda_n)\psi(x,\lambda)\phi(x,\lambda_n),$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_n)\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\phi(x,\lambda_n)dx &= \langle\psi(x,\lambda),\phi(x,\lambda_n)\rangle_W\Big|_0^\pi \\ &= V(\phi(x,\lambda_n)) + U(\psi(x,\lambda)) = \Delta(\lambda) - \Delta(\lambda_n).\end{aligned}$$

Puštajući da $\lambda \to \lambda_n$ dobijamo

$$\int_0^\pi \psi(x,\lambda)\phi(x,\lambda_n)dx = -\dot{\Delta}(\lambda_n).$$

□

Teorema 1.2.4. *Sopstvene vrijednosti $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ i sopstvene funkcije $\phi(x,\lambda_n)$, $\psi(x,\lambda)$ graničnog problema L su realne. Sve nule funkcije $\Delta(\lambda)$ su proste, te sopstvene funkcije koje odgovaraju različitim sopstvenim vrijednostima su ortogonalne u $L^2(0,\pi)$.*

Dokaz. Pokažimo da su sopstvene vrijednosti realne. Pretpostavimo suprotno, neka su λ_n i λ_k ($\lambda_n \neq \lambda_k$) sopstvene vrijednosti sa sopstvenim funkcijama $y_n(x)$ i $y_k(x)$ redom. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\int_0^\pi l y_n(x) y_k(x) dx = \int_0^\pi y_n(x) l y_k(x) dx,$$

stoga vrijedi

$$\lambda_n \int_0^\pi y_n(x) y_k(x) dx = \lambda_k \int_0^\pi y_n(x) y_k(x) dx,$$

ili

$$\int_0^\pi y_n(x) y_k(x) dx = 0.$$

Dalje, neka je $\lambda_0 = u + iv$, $v \neq 0$ sopstvena vrijednost sa sopstvenom funkcijom $y^0(x) \neq 0$. Pošto su h i H realni brojevi, a $q(x)$ realna funkcija, dobijamo da je $\bar{\lambda}_0 = u - iv$ takođe sopstvena vrijednost funkcije $\bar{y}_0(x)$. Kako je $\lambda_0 \neq \bar{\lambda}_0$ imamo

$$\|y_0\|_{L^2}^2 = \int_0^\pi y^0(x) \bar{y}^0(x) dx = 0,$$

što je kontradikcija, jer je $y^0(x) \neq 0$. Iz prethodnog slijedi da su sopstvene vrijednosti $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ realne, kao i sopstvene funkcije. Kako je $\alpha_n \neq 0$ i $\beta_n \neq 0$ dobijamo da je $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$. □

U prethodnoj teoremi smo dokazali da je Šturm-Liuvilov operator samoadjugovan. Napomenimo da je važna pretpostavka da je potencijal $q(x) \in L^2(0,\pi)$ realna funkcija. U suprotnom, ako je $q(x)$ kompleksna funkcija, niti su sopstvene funkcije graničnog problema L ortogonalne u opštem slučaju, niti je operator samoadjugovan.

Primjer 1.2.5. *Neka je $q(x) = 0$ i $h = H = 0$. Tada vrijedi*

$$C(x,\lambda) = \phi(x,\lambda) = \cos zx, \quad S(x,\lambda) = \frac{\sin zx}{z}, \quad \psi(x,\lambda) = \cos z(\pi - x),$$
$$\Delta(\lambda) = -z \sin z\pi, \quad \lambda_n = n^2 (n \in \mathbb{N}_0), \quad \phi(x,\lambda_n) = \cos nx, \quad \beta_n = (-1)^n.$$

Sada ćemo opisati asimptotska ponašanja sopstvenih vrijednosti i sopstvenih funkcija. Prije toga uvedimo oznaku $\gamma = Im(z)$.

Lema 1.2.6. *Za $|z| \to \infty$, za $x \in [0, \pi]$ vrijede sljedeće asimptotske formule:*

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= \cos zx + O\left(\frac{\exp(|\gamma| x)}{|z|} \right) \\ \phi'(x, \lambda) &= -z \sin zx + O\left(\exp(|\gamma| x) \right) \end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Dokaz. Koristićemo (1.2.6), tačnije

$$\phi(x, \lambda) = \cos zx + \frac{h}{z} \sin zx + \frac{1}{z} \int_0^x q(t)\phi(t) \sin z(x-t) dt. \tag{1.2.13}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine dobijamo

$$\phi'(x, \lambda) = -z \sin zx + h \cos zx + \int_0^x q(t)\phi(t) \cos z(x-t) dt. \tag{1.2.14}$$

Označimo $\mu(\lambda) = \max\limits_{0 \le x \le \pi} |\phi(x, \lambda)| \exp(-|\gamma x|)$. Kako je $|\sin zx| \le \exp(\gamma x)$ i $|\cos zx| \le \exp(\gamma x)$ za $|z| \ge 1$ i $x \in [0, \pi]$ vrijedi da je

$$|\phi(x, \lambda)| \exp(-|\gamma x|) \le 1 + \frac{1}{|z|} \left(h + \mu(\lambda) \int_0^x |q(t)| dt \right) \le C_1 + \frac{C_2}{|z|} \mu(\lambda).$$

Iz prethodnog imamo

$$\mu(\lambda) \le C_1 + \frac{C_2}{|z|} \mu(\lambda).$$

Za dovoljno veliko $|z|$ dobijamo $\mu(\lambda) = O(1)$, odnosno $\phi(x, \lambda) = O(\exp(|\gamma| x))$. Koristeći posljednju nejednačinu i uvrštavajući u desnu stranu jednačina (1.2.13) i (1.2.14) dobijamo traženo asimptotsko ponašanje. □

U nastavku opisujemo asimptotsko ponašanje sopstvenih vrijednosti i sopstvenih funkcija graničnog problema L.

Teorema 1.2.7. *Skup sopstvenih vrijednosti $\{\lambda_n\}_{n \ge 0}$ graničnog problema L je prebrojiv. Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$z_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l^2, \tag{1.2.15}$$

$$\phi(x, \lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \le C, \tag{1.2.16}$$

gdje je

$$\omega = h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt.$$

Obratimo pažnju da simbol $\{\kappa_n\}_{n \ge 1}$ označava različite nizove u l^2, dok simbol C predstavlja različite pozitivne konstante koje ne zavise od x, λ i n.

Dokaz. Prvo ćemo odrediti asimptotsko ponašanje karakteristične funkcije. Mijenjajući asimptotiku za $\phi(x,\lambda)$, iz (1.2.12) u (1.2.13) odnosno (1.2.14), dobijamo

$$\begin{aligned} \phi(x,\lambda) &= \cos zx + q_1(x)\frac{\sin zx}{z} + \frac{1}{2z}\int_0^x q(t)\sin z(x-2t)dt + O\Big(\frac{\exp(|\gamma|x)}{z^2}\Big), \\ \phi'(x,\lambda) &= -z\sin zx + q_1(x)\cos zx + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos z(x-2t)dt + O\Big(\frac{\exp(|\gamma|x)}{z}\Big), \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

gdje je $q_1(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt$. Prema (1.2.7) imamo $\Delta(\lambda) = \phi'(x,\lambda) + H\phi(x,\lambda)$, te koristeći (1.2.3) dolazimo do

$$\Delta(\lambda) = -z\sin z\pi + \omega\cos z\pi + \kappa(z), \tag{1.2.18}$$

gdje je

$$\kappa(z) = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\cos z(\pi-2t)dt + O\Big(\frac{\exp(|\gamma|\pi)}{z}\Big).$$

Označimo sa $G_\delta = \{z : |z-k| \geq \delta, k = 0, \pm1, \pm2, ...\}$, $\delta > 0$. Lako se može pokazati

$$\begin{aligned} |\sin z\pi| \geq& C_\delta \exp(|\gamma|\pi), \;\; z \in G_\delta, \\ |\Delta(\lambda)| \geq& C_\delta \exp(|\gamma|\pi), \;\; z \in G_\delta, |z| \geq z^*, \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

za dovoljno veliko $z^* = z^*(\delta)$.

U nastavku ćemo dokazati (1.2.15). Označimo sa

$$\Gamma_n = \{\lambda : |\lambda| = (n+1/2)^2\}.$$

Iz (1.2.18) slijedi

$$\Delta(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda), \;\; f(\lambda) = -z\sin z\pi, \;\; |g(\lambda)| \leq C\exp(|\gamma|\pi).$$

Na osnovu (1.2.19) imamo $|f(\lambda)| > |g(\lambda)|$, $\lambda \in \Gamma_n$ za dovoljno veliko n. Prema Rušeovoj teoremi [con1,p.125], broj nula $\Delta(\lambda)$ unutar Γ_n je jednak broj nula funkcije $f(\lambda) = -z\sin z\pi$. Prema tome, u krugu $|\lambda| < (n+1/2)^2$ postoji tačno $n+1$ sopstvena vrijednost od L i to $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n$. Primjenjujući Rušeovu teoremu na krug $\gamma_n(\delta) = \{z : |z-n| < \delta\}$ zaključujemo da za dovoljno veliko n u krugu $\gamma_n(\delta)$ postoji tačno jedna nula $\Delta(\lambda)$, koju ćemo označiti sa $z_n = \sqrt{\lambda_n}$. Kako je $\delta > 0$ proizvoljno, vrijedi

$$z_n = n + \varepsilon_n, \;\; \varepsilon_n = o(1), \;\; n \to \infty. \tag{1.2.20}$$

Kada uvrstimo (1.2.20) u (1.2.18) dobijamo

$$0 = \Delta(z_n) = -(n+\varepsilon_n)\sin(n+\varepsilon_n)\pi + \omega\cos(n+\varepsilon_n)\pi + \kappa_n,$$

odakle slijedi

$$-n\sin\varepsilon_n\pi + \omega\cos\varepsilon_n\pi + \kappa_n = 0. \tag{1.2.21}$$

Iz posljednje jednačine je $\sin\varepsilon_n\pi = O(\frac{1}{n})$. Koristeći još jednom (1.2.21) dobijamo $\varepsilon_n = \dfrac{\omega}{\pi n} + \dfrac{\kappa_n}{n}$. Kada zamijenimo (1.2.15) u (1.2.17) dobijamo (1.2.16) gdje je

$$\xi_n(x) = \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt - \frac{x\omega}{\pi} - x\kappa_n\right)\sin nx + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\sin n(x-2t)dt + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Odakle je $|\xi_n(x)| < C$. □

Koristeći prethodnu teoremu lako možemo izvesti formule

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_n}{n},\ \ \beta_n = (-1)^n + \frac{\kappa_n}{n},\ \ \dot{\Delta}(\lambda) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_n}{n}. \tag{1.2.22}$$

Označimo sa $W_N^2[0,\pi]$ Soboljev prostor funkcija $f(x)$, takvih da su $f^{(j)}(x)$, $j = 0,1,...,N-1$ apsolutne neprekidne funkcije i $f^{(N)}(x) \in L^2(0,\pi)$.

Posljedica 1.2.8. *Ako $q(x) \in W_N^2[0,\pi]$, $N \in \mathbb{N}$, tada vrijedi*

$$\begin{aligned} z_n =& n + \sum_{j=1}^{N+1}\frac{\omega_j}{n^j} + \frac{\kappa_n}{n^{N+1}},\ \ \omega_{2p} = 0,\ \ \omega_1 = \frac{\omega}{\pi}, \\ \alpha_n =& \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{N+1}\frac{\omega_j^+}{n^j},\ \ \omega_{2p+1}^+ = 0,\ \ p \geq 0. \end{aligned} \tag{1.2.23}$$

Dokaz. Ako je $q(x) \in W_1^2[0,\pi]$ parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\cos z(x-2t)dt =& \frac{\sin zx}{4z}(q(x)+q(0)) + \frac{1}{4z}\int_0^x q'(t)\sin z(x-2t)dt, \\ \frac{1}{2z}\int_0^x q(t)\sin z(x-2t)dt =& \frac{\cos zx}{4z^2}(q(x)-q(0)) - \frac{1}{4z^2}\int_0^x q'(t)\cos z(x-2t)dt. \end{aligned}$$

Zatim, primjenjujući prethodni postupak dolazimo do (1.2.23). □

Teorema 1.2.9. *Spektar $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ graničnog problema L jedinstveno određuje karakterističnu funkciju $\Delta(\lambda)$ formulom*

$$\Delta(\lambda) = \pi(\lambda - \lambda_0)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n - \lambda}{n^2}. \tag{1.2.24}$$

Dokaz. Iz formule (1.2.18) slijedi da je $\Delta(\lambda)$ cijela funkcija po λ reda 1/2. Koristeći Adamarovu teoremu faktorizacije [con1,p.289], $\Delta(\lambda)$ je jedinstveno određena svojim nulama do na multiplikativnu konstantu:

$$\Delta(\lambda) = C\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right). \tag{1.2.25}$$

Napomenimo da slučaj $\Delta(0)=0$ zahtijeva male modifikacije. Posmatrajmo funkciju

$$-z\sin z\pi=-\lambda\pi\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{\lambda}{n^2}).$$

Tada je

$$\frac{\Delta(\lambda)}{-z\sin z\pi}=C\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_0\pi\lambda}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\lambda_n}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-\lambda}\right).$$

Koristeći (1.2.15) i (1.2.18) možemo izračunati

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{-z\sin z\pi}=1,\quad \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_n-n^2}{n^2-\lambda}\right)=1,$$

odakle zaključujemo

$$C=\pi\lambda_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}.$$

Ako uvrstimo C u (1.2.25) dolazimo do (1.2.24). □

Slični rezultati vrijede i za Šturm-Liuvilove operatore sa drugim tipovima razdvojenih graničnih uslova.

Napomena 1.2.10. (i) Posmatrajmo granične uslove problema $L_1=L_1(q(x),h)$ za jednačinu (1.2.1) sa graničnim uslovima $U(y)=y'(0)+hy(0)=0$, $y(\pi)=0$. Sopstvene vrijednosti $\{\mu_n\}_{n\geq1}$ od L_1 su proste i odgovaraju nulama karakteristične jednačine $d(\lambda):=\phi(\pi,\lambda)$, te vrijedi

$$d(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n-\lambda}{(n+1/2)^2}. \tag{1.2.26}$$

Za spektralne vrijednosti $\{\mu_n,\alpha_{n1}\}_{n\geq0}$, $\alpha_{n1}:=\int_0^\pi\phi^2(x,\mu_n)dx$ od L_1 imamo asimptotske formule:

$$\begin{aligned}\sqrt{\mu_n}=&n+\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{n\pi}+\frac{\kappa_n}{n},\ \{\kappa_n\}\in l^2,\\ \alpha_{n1}=&\frac{\pi}{2}+\frac{\kappa_{n1}}{n},\ \{\kappa_{n1}\}\in l^2,\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

gdje je $\omega_1=h+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt$.

(ii) Posmatrajmo granične uslove problema $L^0=L^0(q(x),H)$ za jednačinu (1.2.1) sa početnim uslovima $y(0)=V(y)=0$. Sopstvene vrijednosti $\{\lambda_0^n\}$ od L^0 su proste i odgovaraju nulama karakteristične funkcije $\Delta^0(\lambda):=\psi(0,\lambda)=S'(\pi,\lambda)+HS(\pi,\lambda)$.

Štaviše,

$$\Delta^0(\lambda)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^0-\lambda}{(n+1/2)^2}.$$

$$\sqrt{\lambda_n^0}=n+\frac{1}{2}+\frac{\omega^0}{n\pi}+\frac{\kappa_n}{n},\ \{\kappa_n\}\in l^2,$$

gdje je $\omega^0 = H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt$.

Lema 1.2.11. *Neka su* $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ *i* $\{\mu_n\}_{n=0}^\infty$ *sopstvene vrijednosti graničnih problema* L *i* L_1 *redom. Tada vrijedi*

$$\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}, \;\; n \geq 0. \tag{1.2.28}$$

Dokaz. Već ranije je dokazano da vrijedi

$$\frac{d}{dx}\big\langle \phi(x,\lambda)\phi(x,\mu)\big\rangle_W = (\lambda-\mu)\phi(x,\lambda)\phi(x,\mu), \tag{1.2.29}$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\lambda-\mu)\phi(x,\lambda)\phi(x,\mu)dx &= \big\langle \phi(x,\lambda)\phi(x,\mu)\big\rangle_W\Big|_0^\pi \\ &= \phi(\pi,\lambda)\phi'(\pi,\mu)-\phi'(\pi,\lambda)\phi(\pi,\mu) = d(\lambda)\Delta(\mu)-d(\mu)\Delta(\lambda).\end{aligned}$$

Za $\mu \to \lambda$ dobijamo

$$\int_0^\pi \phi^2(x,\lambda)dx = \dot{d}(\lambda)\Delta(\lambda) - d(\lambda)\dot{\Delta}(\lambda)$$

Odakle slijedi

$$\frac{1}{d^2(\lambda)}\int_0^\pi \phi^2(x,\lambda)dx = -\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}\right), \;\; \lambda \in \mathbb{R}, \;\; d(\lambda) \neq 0.$$

Prema tome, funkcija $\dfrac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)}$ je monotono opadajuća na $\mathbb{R} \setminus \{\mu_n | n \geq 0\}$ i vrijedi

$$\lim_{\lambda \to \mu_n \pm 0} \frac{\Delta(\lambda)}{d(\lambda)} = \pm\infty.$$

Koristeći (1.2.15) i (1.2.27) dolazimo do (1.2.28). □

1.3 Kompletnost i operator transformacije

U ovom poglavlju ćemo dokazati da je skup sopstvenih funkcija Šturm-Liuvilovog graničnog problema L kompletan i da formira ortogonalnu bazu prostora $L^2(0,\pi)$. Teoremu je prvi put pokazao Steklov krajem XIX-og vijeka. Napomenimo da ukoliko je $q(x) \in L^2(0,\pi)$ kompleksna funkcija, tada sopstvene funkcije graničnog problema L ne formiraju ortogonalnu bazu, već formiraju Risovu bazu. Kompletnost je od izuzetne važnosti za rješavanje različitih problema u matematičkoj fizici. Takođe, opisaćemo operator transformacije koji je veoma značajan za rješavanje inverznog problema klasičnog Šturm-Liuvilovog tipa.

Teorema 1.3.1. *Skup sopstvenih funkcija $\{\phi_n(x,\lambda)\}_{n\geq 0}$ graničnog problema L je kompletan u $L^2(0,\pi)$.*

Dokaz. Označimo

$$G(x,t,\lambda) = \frac{-1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} \phi(x,\lambda)\psi(t,\lambda), & x \leq t, \\ \phi(t,\lambda)\psi(x,\lambda), & x \geq t, \end{cases}$$

i posmatrajmo funkciju

$$\begin{aligned} Y(x,\lambda) &= \int_0^\pi G(x,t,\lambda) f(t)dt \\ &= -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)\int_0^x \phi(t,\lambda)f(t)dt + \phi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)f(t)dt\Big). \end{aligned}$$

Funkcija $G(x,t,\lambda)$ se naziva Grinova funkcija za L i ona je jezgro inverznog operatora za Šturm-Liuvilov operator, odnosno $Y(x,\lambda)$ je rješenje graničnog problema

$$lY - \lambda Y + f(x) = 0, \quad U(Y) = V(Y) = 0, \tag{1.3.1}$$

što se lako pokaže diferenciranjem. Koristeći (1.2.9) i da su sve nule karakteristične funkcije proste (Teorema 1.2.4) možemo izračunati

$$\begin{aligned} Res_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) =& \frac{-1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\Big(\psi(x,\lambda_n)\int_0^x \phi(t,\lambda_n)f(t)dt + \phi(x,\lambda_n)\int_x^\pi \psi(t,\lambda_n)f(t)dt\Big) \\ =& \frac{-\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\phi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\phi(t,\lambda_n)dt, \end{aligned}$$

gdje smo koristili $Res_{z=c} f(z) = \lim_{z\to c}(z-c)f(z)$. Dalje, koristeći $\beta_n\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$, dobijamo

$$Res_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha_n}\phi(x,\lambda_n)\int_0^\pi f(t)\phi(t,\lambda_n)dt. \tag{1.3.2}$$

Neka je $f(x) \in L^2(0,\pi)$ tako da

$$\int_0^\pi f(t)\phi(t,\lambda_n)dt = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Na osnovu (1.3.2) vrijedi da je $Res_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = 0$, te nakon neprekidnog proširenja na čitavu kompleksnu ravan, slijedi da za svako fiksirano $x \in [0,\pi]$ funkcija $Y(x,\lambda)$ je cijela po λ. Dalje na osnovu (1.2.12) i (1.2.19) za fiksirano $\delta > 0$ i dovoljno veliko $z^* > 0$ vrijedi

$$|Y(x,\lambda)| \leq \frac{C_\delta}{|z|}, \ \ z \in G_\delta, |z| \geq z^*.$$

Koristeći princip maksimuma i Liuvilovu teoremu [con1,p.128,p.77] zaključujemo da je $Y(x,\lambda) \equiv 0$ odakle dobijamo da je $f(x) = 0$ s.s. na $(0,\pi)$. $\square$

Posmatrajmo sada granični problem (1.2.1)-(1.2.2) uz uslove $q(x) \equiv 0$, $h = H = 0$. Na osnovu Primjera 1.2.5 sopstvene funkcije su $\cos nx$ i vrijedi da n-ta sopstvena funkcija ima tačno n nula u intervalu $(0,\pi)$. Ovo svojstvo za sopstvene funkcije vrijedi u opštem slučaju što pokazujemo u sljedećoj teoremi.

Teorema 1.3.2. *Sopstvene funkcije $\phi(x,\lambda_n)$ graničnog problema L imaju tačno n nula na intervalu $(0,\pi)$.*

Prvo ćemo dokazati nekoliko pomoćnih tvrđenja.

Lema 1.3.3. *Neka je $u_j(x)$, $j = 1,2$, $x \in [a,b]$, rješenje jednačine*

$$u_j'' + g_j(x)u_j = 0, \ \ g_1(x) < g_2(x), \ \ j = 1,2, x \in [a,b]. \tag{1.3.3}$$

Pretpostavimo da za $x_1, x_2 \in [a,b]$ vrijedi $u_1(x_1) = u_1(x_2) = 0$ i $u_1(x) \neq 0$, $x \in (x_1,x_2)$. Tada postoji $x^* \in (x_1,x_2)$ tako da $u_2(x^*) = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. da je $u_2(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_1,x_2)$. Bez umanjenja opštosti pretpostavimo da je $u_j(x) > 0$, $\forall x \in (x_1,x_2)$, $j = 1,2$. Zahvaljujući (1.3.3) imamo

$$\frac{d}{dx}(u_1'u_2 - u_2'u_1) = (g_2 - g_1)u_1u_2,$$

te slijedi

$$\int_{x_1}^{x_2} (g_2 - g_1)u_1u_2 dx = (u_1'u_2 - u_2'u_1)\Big|_{x_1}^{x_2} = u_1'(x_2)u_2(x_2) - u_1'(x_1)u_2(x_2). \tag{1.3.4}$$

Integral u (1.3.4) je pozitivan, dok je $u_1'(x_1) > 0$, $u_1'(x_2) < 0$, odnosno desna strana je negativna što je kontradikcija. $\square$

Lema 1.3.4. *Neka je $\phi(x_0,\lambda_0) = 0$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, pri čemu funkcija $\phi(x,\lambda)$ ima tačno jednu nulu u intervalu $|x - x_0| < \varepsilon$.*

Dokaz. Nula x_0 funkcije $\phi(x_0, \lambda_0)$ je prosta nula jer bi u suprotnom imali da je $\phi(x, \lambda) \equiv 0$. Pretpostavimo da je $\phi'(x_0, \lambda_0) > 0$ i izaberimo $\varepsilon_0 > 0$ tako da $\phi'(x, \lambda_0) > 0$ za $|x - x_0| < \varepsilon_0$. Tada je $\phi(x, \lambda_0) < 0$ za $x \in [x_0 - \varepsilon_0, x_0)$ i $\phi(x, \lambda_0) > 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon_0]$. Izaberimo $\varepsilon < \varepsilon_0$ koristeći neprekidnost funkcija $\phi(x, \lambda)$ i $\phi'(x, \lambda)$ postoji $\delta > 0$ tako da $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $|x - x_0| < \varepsilon$ i $\phi'(x, \lambda) > 0$, $\phi(x_0 - \varepsilon_0, \lambda) < 0$, $\phi(x_0 + \varepsilon_0, \lambda) > 0$. Odavde dobijamo da funkcija $\phi(x, \lambda)$ ima tačno jednu nulu u intervalu $|x - x_0| < \varepsilon$. □

Lema 1.3.5. *Neka je $\mu \in \mathbb{R}$ fiksirano i neka funkcija $\phi(x, \mu)$ ima m nula u intervalu $(0, a]$. Ako je $\lambda > \mu$, tada funkcija $\phi(x, \lambda)$ ima bar m nula u istom intervalu i njena k-ta nula je manja ili jednaka od k-te nule funkcije $\phi(x, \mu)$.*

Dokaz. Neka je $x_1 > 0$ najmanja pozitivna nula funkcije $\phi(x, \mu)$. Koristeći Lemu 1.3.3 dovoljno je pokazati da $\phi(x, \lambda)$ ima najmanje jednu nulu u intervalu $0 < x < x_1$. Pretpostavimo suprotno tj. $\phi(x, \lambda) \neq 0$, $\forall x \in [0, x_1)$. Kako je $\phi(0, \lambda) = 1$, imamo da je $\phi(x, \lambda) > 0$, $\phi(x, \mu) > 0$, $x \in [0, x_1)$, $\phi(x_1, \mu) = 0$, $\phi'(x_1, \mu) < 0$. Na osnovu (1.2.29) dobijamo

$$(\lambda - \mu) \int_0^{x_1} \phi(x, \lambda)\phi(x, \mu)dx = \langle \phi(x, \lambda), \phi(x, \mu) \rangle_W \Big|_0^{x_1} = \phi(x_1, \lambda)\phi'(x_1, \mu) \leq 0.$$

Međutim, integral na lijevoj strani je strogo pozitivan što je kontradikcija. □

Sada ćemo dokazati Teoremu 1.3.2.

Dokaz. Posmatrajmo funkciju $\phi(x, \lambda)$ gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$. Na osnovu (1.2.12) funkcija $\phi(x, \lambda)$ nema nula za dovoljno veliko negativno λ, odnosno $\phi(x, \lambda) > 0$, $\lambda \leq -\lambda^* \leq 0$, $x \in [0, \pi]$. Sa druge strane $\phi(\pi, \mu_n) = 0$, gdje su $\{\mu_n\}$ sopstvene vrijednosti graničnog problema L_1. Na osnovu Leme 1.3.4 i Leme 1.3.5 zaključujemo da kada se λ kreće od $-\infty$ do ∞, onda se nule $\phi(x, \lambda)$ neprekidno pomijeraju ka lijevo. Nova nula se može pojaviti samo u tački $x = \pi$. Odavde slijedi:

(i) Funkcija $\phi(x, \mu_n)$ ima tačno n nula u intervalu $[0, \pi)$.

(ii) Ako $\lambda \in (\mu_{n-1}, \mu_n)$, $n \geq 1$, $\mu_1 = -\infty$, onda funkcija $\phi(x, \lambda)$ ima tačno n nula na intervalu $[0, \pi]$.

Na osnovu (1.2.28) vrijedi

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$$

Odavde zaključujemo da funkcija $\phi(x, \lambda_n)$ ima tačno n nula u intervalu $[0, \pi]$. □

Važnu ulogu u teoriji inverznog problema za Šturm-Liuvilove operatore ima operator transformacije koji povezuje rješenja dvije različite Šturm-Liuvilove jednačine za svako λ.

Zato ćemo u nastavku posmatrati operator transformacije i njegova svojstva. Operator transformacije se prvi put pojavljuje u teoriji uopštenih translatornih operatora. U inverznoj teoriji operator transformacije su koristili Geljfand, Levitan i Marčenko, [mar1], [lev1].

Teorema 1.3.6. *Za funkciju $C(x,\lambda)$ vrijedi*

$$C(x,\lambda) = \cos zx + \int_0^x K(x,t)\cos zt dt, \quad \lambda = z^2, \tag{1.3.5}$$

gdje je $K(x,t)$ realna neprekidna funkcija

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt. \tag{1.3.6}$$

Dokaz. Na osnovu (1.2.6) funkcija $C(x,\lambda)$ zadovoljava integralnu jednačinu

$$C(x,\lambda) = \cos zx + \int_0^x \frac{\sin z(x-t)}{z} q(t)C(t,\lambda)dt. \tag{1.3.7}$$

Kako je

$$\frac{\sin z(x-t)}{z} = \int_t^x \cos z(s-t)ds,$$

jednačina (1.3.7) postaje

$$C(x,\lambda) = \cos zx + \int_0^x q(t)C(t,\lambda)\Big(\int_x^t \cos z(s-t)ds\Big)dt,$$

stoga

$$C(x,\lambda) = \cos zx + \int_0^x \Big(\int_0^t q(s)C(s,\lambda)\cos z(t-s)ds\Big)dt,$$

Metod uzastopnih aproksimacija nam daje

$$\begin{aligned} C(x,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x,\lambda), \quad C_0(x,\lambda) = \cos zx, \\ C_{n+1}(x,\lambda) &= \int_0^x \Big(\int_0^t q(s)C_n(s,\lambda)\cos z(t-s)ds\Big)dt. \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Pokažimo da vrijedi sljedeća formula

$$C_n(x,\lambda) = \int_0^x K_n(x,t)\cos zt dt, \tag{1.3.9}$$

gdje $K_n(x,t)$ ne zavisi od λ.

Prvo izračunamo $C_1(x,\lambda)$ koristeći $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\Big)$:

$$\begin{aligned} C_1(x,\lambda) &= \int_0^x \Big(\int_0^t q(s)\cos z\tau\cos z(t-\tau)d\tau\Big)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x \cos zt\Big(\int_0^t q(\tau)d\tau\Big)dt + \frac{1}{2}\int_0^x \Big(\int_0^t q(\tau)\cos z(t-2\tau)d\tau\Big)dt. \end{aligned}$$

Smjenom $t-2\tau=s$ u drugom integralu dobijamo

$$C_1(x,\lambda)=\frac{1}{2}\int_0^x \cos zt\Big(\int_0^t q(s)ds\Big)dt+\frac{1}{4}\int_0^x\Big(\int_{-t}^t q(\frac{t-s}{2})\cos zsds\Big)dt.$$

Zamjenom redoslijeda integracije u drugom integralu imamo

$$\begin{aligned}C_1(x,\lambda)=&\frac{1}{2}\int_0^x \cos zt\Big(\int_0^t q(\tau)d\tau\Big)dt+\frac{1}{4}\int_0^x\cos zs\Big(\int_s^x q(\frac{t-s}{2})dt\Big)ds\\&+\frac{1}{4}\int_{-x}^0\cos zs\Big(\int_{-s}^x q(\frac{t-s}{2})dt\Big)ds=\frac{1}{2}\int_0^x\cos zt\Big(\int_0^t q(\tau)d\tau\Big)dt\\&+\frac{1}{4}\int_0^x\cos zs\Big(\int_s^x\Big(q(\frac{t-s}{2})+q(\frac{t+s}{2})\Big)dt\Big)ds.\end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi (1.3.9) za $n=1$, gdje je

$$\begin{aligned}K_1(x,t)=&\frac{1}{2}\int_0^t q(\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_x^t\Big(q(\frac{t-s}{2})+q(\frac{t+s}{2})\Big)dt\Big)ds\\=&\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}}q(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{x-t}{2}}q(\xi)d\xi,\ \ t\le x.\end{aligned}\tag{1.3.10}$$

Pretpostavimo da je (1.3.9) tačno za svako $n\in\mathbb{N}$. Mijenjajući (1.3.9) u (1.3.8) dobijamo

$$\begin{aligned}C_{n+1}(x,\lambda)&=\int_0^x\int_0^t q(\tau)\cos z(t-\tau)\int_0^\tau K_n(\tau,s)\cos zsdsd\tau dt\\&=\int_0^x\int_0^t q(\tau)\int_0^\tau K_n(\tau,s)(\cos z(s+t-\tau)+\cos z(s-t+\tau))dsd\tau dt.\end{aligned}\tag{1.3.11}$$

Uvođenjem smjene $s+t-\tau=\xi$ i $s-t+\tau=\xi$, redom dobijamo

$$\begin{aligned}C_{n+1}(x,\lambda)=&\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t q(\tau)\int_{t-\tau}^t K_n(\tau,\varepsilon+\tau-t)\cos z\varepsilon d\varepsilon d\tau dt\\&+\frac{1}{2}\int_0^x\int_0^t q(\tau)\int_{t-\tau}^{2\tau-t}K_n(\tau,\varepsilon+\tau-t)\cos z\varepsilon d\varepsilon d\tau dt.\end{aligned}$$

Zamjenom redoslijeda integracije po promjenljivima τ i ε dobijamo

$$C_{n+1}(x,\lambda)=\int_0^x K_{n+1}(x,t)\cos ztdt,$$

gdje je

$$\begin{aligned}K_{n+1}(x,t)=&\frac{1}{2}\int_t^x\int_{\varepsilon-t}^{\varepsilon}q(\tau)K_n(\tau,t+\tau-\varepsilon)d\tau d\varepsilon\\&+\frac{1}{2}\int_t^x\int_{\frac{\varepsilon+t}{2}}^{\varepsilon}q(\tau)K_n(\tau,t-\tau+\varepsilon)d\tau d\varepsilon+\frac{1}{2}\int_t^x\int_{\frac{\varepsilon-t}{2}}^{\varepsilon-t}q(\tau)K_n(\tau,-t-\tau+\varepsilon)d\tau d\varepsilon.\end{aligned}\tag{1.3.12}$$

Mijenjajući (1.3.9) u (1.3.8) dobijamo (1.3.7) gdje je

$$K(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t). \tag{1.3.13}$$

Primjenom principa matematičke indukcije, lako se pokaže da iz (1.3.9) i (1.3.10) slijedi, [fre1]

$$|K_n(x,t)| \leq (Q(x))^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad Q(x) := \int_0^x q(\varepsilon)d\varepsilon.$$

Prema tome, red (1.3.13) konvergira apsolutno i uniformno za $0 \leq t \leq x \leq \pi$, i funkcija $K(x,t)$ je neprekidna. Prema (1.3.10) i (1.3.12) vrijedi

$$K_1(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt, \;\; K_{n+1}(x,x) = 0, \;\; n \in \mathbb{N},$$

te dolazimo do (1.3.6). □

Operator T definisan sa

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)f(t)dt,$$

transformiše funkciju $\cos zx$, koja je rješenje graničnog problema $-y''(x) = \lambda y(x)$, $y'(0) = y(\pi) = 0$, u funkciju $C(x,\lambda)$ koja je rješenje jednačine (1.2.1) sa graničnim uslovima $y'(0) = y(\pi) = 0$. Pošto je $C(x,\lambda) = T(\cos zx)$, operator T se naziva operator transformacije za $C(x,\lambda)$.
Kod operatora transformacije je važno da jezgro $K(x,t)$ ne zavisi od λ. Slično, dobijamo operator transformacije za funkcije $S(x,\lambda)$ i $\phi(x,\lambda)$.

Teorema 1.3.7. *Za funkcije $S(x,\lambda)$ i $\phi(x,\lambda)$ vrijedi*

$$S(x,\lambda) = \frac{\sin zx}{z} + \int_0^x P(x,t)\frac{\sin zt}{t}dt, \tag{1.3.14}$$

$$\phi(x,\lambda) = \cos zx + \int_0^x G(x,t)\cos ztdt, \tag{1.3.15}$$

gdje su $P(x,t)$ i $G(x,t)$ realne neprekidne funkcije sa istom glatkošću kao i $\int_0^x q(t)dt$, i

$$G(x,x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds. \tag{1.3.16}$$

$$P(x,x) = \frac{1}{2}\int_0^x q(s)ds. \tag{1.3.17}$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu Teoreme 1.3.6 ([fre1, p.23]). □

1.4 Teorema jedinstvenosti

U ovom poglavlju ćemo dokazati teoremu jedinstvenosti inverznog problema za klasični Šturm-Liuvilov operator. Predstavićemo različite metode kojima možemo riješti pomenuti problem.

Jedan od prvih rezultata u inverznoj spektralnoj teoriji je postavio Ambarcumjan [amb1] koji je posmatrao granični problem $L(q(x), 0, 0)$:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \;\; y'(0) = y'(\pi) = 0. \tag{1.4.1}$$

Ako je $q(x) = 0$ s.s. na $(0, \pi)$, onda sopstvene vrijednosti graničnog problema (1.4.1) su date sa $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$. Ambarcumjan je dokazao da vrijedi i obratno.

Teorema 1.4.1. *Neka su sopstvene vrijednosti graničnog problema (1.4.1) date sa* $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$, *onda je* $q(x) = 0$ *s.s na* $(0, \pi)$.

Dokaz. Iz (1.2.15) slijedi da je $\omega = \int_0^\pi q(x)dx = 0$. Neka je $y_0(x)$ sopstvena funkcija za sopstvenu vrijednost $\lambda_0 = 0$, tada je

$$y_0''(x) - q(x)y_0(x) = 0, \;\; y_0'(0) = y_0'(\pi) = 0. \tag{1.4.2}$$

Na osnovu Teoreme 1.3.2 zaključujemo da funkcija $y_0(x)$ nema nula na intervalu $x \in [0, \pi]$. Uzimajući u obzir relaciju

$$\frac{y_0''(x)}{y_0(x)} = \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2 + \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)',$$

dobijamo

$$0 = \int_0^\pi q(x)dx = \int_0^\pi \frac{y_0''(x)}{y_0(x)}dx = \int_0^\pi \left(\frac{y_0'(x)}{y_0(x)}\right)^2 dx.$$

Odnosno, $y_0'(x) \equiv 0$, tj. $y_0(x) \equiv c$, $q(x) = 0$ s.s. na $(0, \pi)$. □

Napomena 1.4.2. *Teorema 1.4.1 dokazuje uopštenije tvrđenje koje glasi:*
Ako je $\lambda_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_0^\pi q(x)dx$, *onda* $q(x) = \lambda_0$ *s.s. na* $(0, \pi)$.

Ambarcumjanov rezultat je izuzetak jer jedan spektar nije dovoljan da se jedinstveno odredi potencijal. G. Borg [bor1] je predlagao sljedeću formulaciju inverznog problema: Konstruisati diferencijalni operator iz dva spektra sa graničnim uslovima sa zajedničkom diferencijalnom jednačinom i jednim zajedničkim graničnim uslovom.

Neka su $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ sopstvene vrijednosti operatora L i L_1, redom. Posmatrajmo sljedeći problem:

Inverzni problem 1.4.1: Dati su spektri $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ graničnih problema L i L_1, konstruisati potencijal $q(x)$ i koeficijente h i H graničnih uslova.

Jedan od najvažnijih rezultata u inverznoj spektralnoj teoriji je rješenje Inverznog problema 1.4.1. Borg je 1946. godine objavio ovaj rezultat koristeći ortogonalnost sopstvenih funkcija, [bor1]. Nešto jednostavniji dokaz od Borgovog navodimo u sljedećoj teoremi.

Teorema 1.4.3. *Ako su $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$, $n \geq 0$, onda $q(x) = \widetilde{q}(x)$ s.s na $(0, \pi)$, $h = \widetilde{h}$ i $H = \widetilde{H}$.*

Dokaz. Na osnovu (1.2.24) i (1.2.26) karakteristične funkcije su jedinstveno određene njenim nulama, odnosno

$$\Delta(\lambda) \equiv \widetilde{\Delta}(\lambda), \quad d(\lambda) \equiv \widetilde{d}(\lambda).$$

Štaviše, vrijedi

$$H = \widetilde{H}, \;\; \widehat{h} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \widehat{q}(x)dx = 0, \tag{1.4.3}$$

gdje su $\widehat{h} = h - \widetilde{h}$, $\widehat{q}(x) = q(x) - \widetilde{q}(x)$. Odavde slijedi

$$\phi(\pi, \lambda) = \widetilde{\phi}(\lambda), \;\; \phi'(\pi, \lambda) = \widetilde{\phi}'(\pi, \lambda). \tag{1.4.4}$$

Kako je

$$-\phi''(x, \lambda) + q(x)\phi(x, \lambda) = \lambda\phi(x, \lambda), \;\; -\widetilde{\phi}''(x, \lambda) + \widetilde{q}(x)\widetilde{\phi}(x, \lambda) = \lambda\widetilde{\phi}(x, \lambda),$$

dobijamo

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\phi(x, \lambda)\widetilde{\phi}(x, \lambda)dx = (\phi'(x, \lambda)\widetilde{\phi}(x, \lambda) - \phi(x, \lambda)\widetilde{\phi}'(x, \lambda))\Big|_0^\pi.$$

Uzimajući (1.4.3) i (1.4.4) možemo izračunati

$$\int_0^\pi \widehat{q}(x)\left(\phi(x, \lambda)\widetilde{\phi}(x, \lambda) - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{1.4.5}$$

Pokažimo da iz (1.4.5) slijedi da je $\widehat{q}(x) = 0$, $x \in (0, \pi)$. Koristeći operator transformacije (1.3.15) funkciju $\phi(x, \lambda)\widetilde{\phi}(x, \lambda) - \frac{1}{2}$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\phi(x, \lambda)\widetilde{\phi}(x, \lambda) - \frac{1}{2} =& \frac{1}{2}\cos 2zx + \int_0^x (G(x, t) + \widetilde{G}(x, t))\cos zx \cos zt dt \\
&+ \int_0^x \int_0^x G(x, t)\widetilde{G}(x, s)\cos zt \cos zs dt ds \\
=& \frac{1}{2}\cos zx + \frac{1}{2}\int_{-x}^x (G(x, t) + \widetilde{G}(x, t))\cos z(x - t)dt \\
&+ \frac{1}{4}\int_{-x}^x \int_{-x}^x G(x, t)\widetilde{G}(x, s)\cos z(t - s)dt ds,
\end{aligned}$$

pri čemu vrijedi $G(x,-t)=G(x,t)$, $\widetilde{G}(x,-t)=\widetilde{G}(x,t)$. Smjenama $\tau=\frac{x-t}{2}$ i $\tau=\frac{s-t}{2}$ redom, dobijamo

$$\begin{aligned}\phi(x,\lambda)\widetilde{\phi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=&\frac{1}{2}\Bigg(\cos 2zx+2\int_0^x\Big(G(x,x-\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau)\Big)\cos 2z\tau\ \ d\tau\Bigg)\\&+\int_{-x}^x\widetilde{G}(x,s)\Bigg(\int_{(s-x)/2}^{(s+x)/2}G(x,s-2\tau)\cos 2z\tau d\tau\Bigg)ds,\end{aligned}$$

odakle slijedi

$$\phi(x,\lambda)\widetilde{\phi}(x,\lambda)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Bigg(\cos 2zx+\int_0^x V(x,\tau)\cos 2z\tau d\tau\Bigg), \tag{1.4.6}$$

gdje je

$$\begin{aligned}V(x,\tau)=&2\Big(G(x,x-2\tau)+\widetilde{G}(x,x-2\tau)\Big)+\int_{2\tau-x}^x\widetilde{G}(x,s)G(x,s-2\tau)ds\\&+\int_{-x}^{x-2\tau}\widetilde{G}(x,s)G(x,s+2\tau)ds.\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

Mijenjajući (1.4.6) u (1.4.5) i zamjenom redoslijeda integracije dobijamo

$$\int_0^\pi\Bigg(\widehat{q}(\tau)+\int_\tau^\pi V(\tau,x)\widehat{q}(x)dx\Bigg)\cos 2z\tau\equiv 0,$$

iz čega slijedi

$$\widehat{q}(\tau)+\int_\tau^\pi V(\tau,x)\widehat{q}(x)dx=0,\quad \tau\in(0,\pi).$$

Ova homogena Volterova integralna jednačina ima jedinstveno trivijalno rješenje, odnosno $\widehat{q}(x)=0$ s.s. na $(0,\pi)$. Konačno iz (1.4.3) slijedi dokaz. □

Do sličnih rezultata možemo doći ako posmatramo klasični operator sa drugim graničnim uslovima, odnosno sa drugim ulaznim podacima, zato posmatramo sljedeće inverzne probleme:

Inverzni problem 1.4.2: Dati su spektralni podaci $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$ graničnog problema L, konstruisati potencijal $q(x)$ i koeficijente h i H u graničnim uslovima.

Inverzni problem 1.4.3: Dati su spektri $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ graničnih problema L i L^0, konstruisati potencijal $q(x)$ i koeficijente h i H u graničnim uslovima.

Rješenje navedenih inverznih problema ćemo dati koristeći Vajlovu funkciju. Zapravo, riješićemo inverzni problem koji sadrži, kao posebne slučajeve, prethodna dva problema.

Vajlova funkcija. Neka je $\Phi(x,\lambda)$ rješenje jednačine (1.2.1) pod uslovima $U(\Phi)=1$, $V(\Phi)=0$. Vajlovu funkciju definišemo kao $M(\lambda):=\Phi(0,\lambda)$, dok funkciju $\Phi(x,\lambda)$ nazivamo Vajlovim rješenjem za granični problem L. Vajlova funkcija se prvi put spominje za rješavanje inverznih problema na polupravoj, [lev2]. Jasno je da vrijedi

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=S(x,\lambda)+M(\lambda)\phi(x,\lambda), \tag{1.4.8}$$

$$M(\lambda)=-\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{1.4.9}$$

$$\langle\phi(s,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle_W\equiv 1, \tag{1.4.10}$$

gdje je $\Delta^0(\lambda)$ definisana u Napomeni 1.2.10. Prema tome, Vajlova funkcija je meromorfna sa prostim nulama u tačkama $\lambda=\lambda_n$, $n\geq 0$.

Teorema 1.4.4. *Za Vajlovu funkciju vrijedi*

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}. \tag{1.4.11}$$

Dokaz. Kako je $\Delta^0(\lambda)=\psi(0,\lambda)$, slijedi da je $|\Delta^0(\lambda)|\leq C\exp(|\tau|\pi)$. Koristeći (1.4.9) i (1.2.19) za dovoljno veliko $z^*>0$,

$$|M(\lambda)|\leq\frac{C_\delta}{|z|},\quad z\in G_\delta,|z|\geq z^*. \tag{1.4.12}$$

Dalje, koristeći (1.4.9) i Lemu 1.2.3, možemo izračunati

$$Res_{\lambda=\lambda_n}M(\lambda)=-\frac{\Delta^0(\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=-\frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=\frac{1}{\alpha_n}. \tag{1.4.13}$$

Posmatrajmo konturu integrala

$$J_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{M(\mu)}{\lambda-\mu}d\mu,\quad \lambda\in int\Gamma_N. \tag{1.4.14}$$

Koristeći (1.4.12) dobijamo $\lim\limits_{N\to\infty}J_N(\lambda)=0$. Sa druge strane teorema reziduma ([con1]) nam daje

$$J_N(\lambda)=-M(\lambda)+\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}, \tag{1.4.15}$$

čime je teorema dokazana. □

Inverzni problem 1.4.4: Data je Vajlova funkcija $M(\lambda)$ graničnog problema L, konstruisati operator $L(q(x), h, H)$.

U sljedećem tvrđenju ćemo dokazati teoremu jedinstvenosti za Inverzni problem 1.4.4.

Teorema 1.4.5. *Ako je $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$, onda je $L = \widetilde{L}$. Prema tome Vajlova funkcija jedinstveno određuje operator.*

Dokaz. Definišimo matricu $P(x,\lambda) = [P_{jk}(x,\lambda)]_{2x2}$ na sljedeći način

$$P(x,\lambda)\begin{bmatrix}\widetilde{\phi}(x,\lambda) & \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\\ \widetilde{\phi}'(x,\lambda) & \widetilde{\Phi}'(x,\lambda)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda)\\ \phi'(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda)\end{bmatrix}. \tag{1.4.16}$$

Koristeći (1.4.10) i (1.4.16) možemo izračunati, za $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned}P_{j1}(x,\lambda) =&\phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\phi}'(x,\lambda),\\ P_{j2}(x,\lambda) =&\Phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\phi}(x,\lambda) - \phi^{(j-1)}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda),\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

$$\begin{aligned}\phi(x,\lambda) =&P_{11}(x,\lambda)\widetilde{\phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\widetilde{\phi}'(x,\lambda),\\ \Phi(x,\lambda) =&P_{11}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\widetilde{\Phi}'(x,\lambda).\end{aligned} \tag{1.4.18}$$

Iz (1.4.17), (1.4.8) i (1.4.10) slijedi

$$\begin{aligned}P_{11}(x,\lambda) &= 1 + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\psi(x,\lambda)(\widetilde{\phi}'(x,\lambda) - \phi'(x,\lambda)) - \phi(x,\lambda)(\widetilde{\psi}'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda))\Big),\\ P_{12}(x,\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big(\phi(x,\lambda)\widetilde{\psi}(x,\lambda) - \psi(x,\lambda)\widetilde{\phi}(x,\lambda)\Big).\end{aligned}$$

Koristeći (1.2.12) i (1.2.19) vrijedi

$$|P_{11}(x,\lambda) - 1| \le \frac{C_\delta}{|z|},\ \ |P_{12}(x,\lambda)| \le \frac{C_\delta}{|z|},\ \ |z| \ge z^*, \tag{1.4.19}$$

$$|P_{22}(x,\lambda) - 1| \le \frac{C_\delta}{|z|},\ \ |P_{21}(x,\lambda)| \le \frac{C_\delta}{|z|},\ \ |z| \ge z^*, \tag{1.4.20}$$

Prema (1.4.8) i (1.4.17) imamo

$$P_{11}(x,\lambda) = \phi(x,\lambda)\widetilde{S}'(x,\lambda) - S(x,\lambda)\widetilde{\phi}'(x,\lambda) + (\widetilde{M}(\lambda) - M(\lambda))\phi(x,\lambda)\widetilde{\phi}'(x,\lambda)),$$

$$P_{12}(x,\lambda) = S(x,\lambda)\widetilde{\phi}'(x,\lambda) - \phi(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda) + (M(\lambda) - \widetilde{M}(\lambda))\phi(x,\lambda)w\phi(x,\lambda)).$$

Prema tome, ako je $M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ onda za svako fiksirano x, funkcije $P_{11}(x,\lambda)$ i $P_{12}(x,\lambda)$ su cijele po λ. Zajedno sa (1.4.19) slijedi da je $P_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda) \equiv 0$. Koristeći ove rezultate i (1.4.18) dobijamo $\phi(x,\lambda) \equiv \widetilde{\phi}(x,\lambda)$, $\Phi(x,\lambda) \equiv \widetilde{\Phi}(x,\lambda)$ za svako x i λ, odakle slijedi da je $L = \widetilde{L}$. $\square$

Na osnovu (1.4.11) podaci Vajlove funkcije $M(\lambda)$ ekvivalentni su spektralnim podacima $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$. Sa druge strane iz (1.4.9) slijedi da nule i polovi Vajlove funkcije $M(\lambda)$ odgovaraju spektrima graničnih problema L i L^0. Stoga, podaci Vajlove funkcije su ekvivalentni spektrima $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ i $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$. Prema tome, Inverzni problem 1.4.2 i Inverzni problem 1.4.3 su poseban slučaj za datu Vajlovu funkciju.

Poznato je da postoji više različitih metoda za rješavanje inverznog problema klasičnog Šturm-Liuvilovog operatora. Pored navedena dva dokaza, poznati su Geljfand-Levitanov metod, metod spektralnih preslikavanja i metod standardnih modela, [fre1], [gel1], [yur1].
Neke od pomenutih metoda se koriste za rješavanje inverznih problema Šturm-Liuvilovog tipa na poluosi. Najpoznatiji metod je korištenjem Vajlove funkcije koja se prvobitno uvela da bi riješila inverzne probleme ovog tipa. Inverzni problem na poluosi se može riješiti i metodom spektralnih preslikavanja koje predstavlja jedan od najvažnijih metoda u inverznoj spektralnoj teoriji, [tik1], [fre1], [lev2].
Neke parcijalne diferencijalne jednačine su povezane sa Šturm-Liuvilovim problemom na pravoj. Jedna od njih je i jednačina Korteveg-de Friza na pravoj čije se rješenje dobija korištenjem poznatih metoda Šturm-Liuvilog operatora. Centralnu ulogu u rješavanju ovih problema zauzimaju linearne integralne jednačne Fredholmovog tipa, [fre1], [mar1], [lev1].
Pored klasičnih graničnih uslova detaljno su istraženi i Šturm-Liuvilovi operatori sa spektralnim parametrom u graničnim uslovima, [bro1], [mcc1].

U posljednjih 40 godina pojavili su se različiti tipovi inverznih problema Šturm-Liuvilovog tipa. Navešćemo neke od njih:

1. Mnoge primjene su povezane sa diferencijalnom jednačinom oblika

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda r(x)y(x),$$

pri čemu funkcija $r(x)$ dostiže nule i mijenja znak, [fre2]. Na primjer, mijenjanje znaka se povezuje s fizičkim pojavama u kojima nule odgovaraju granici kretanja talasne mehaničke čestice povezane potencijalnim poljem. Slični problemi se pojavljuju u optici i geofizici.

2. Operator oblika

$$-y''(x) + q(x)y(x) + \int_0^x M(x-t)y(t)dt = \lambda y(x),$$

se naziva perturbacija Šturm-Liuvilovog operatora sa Volterovim integralnim operatorom. U [yur2] i [but1] je dokazano da je dovoljan jedan spektar datog operatora da se konstruiše funkcija $M(x)$ pri čemu je poznat potencijal. Inverzni problem se svodi na nelinearnu integralnu jednačinu sa singularitetom koja ima jedinstveno rješenje.

3. Poseban značaj u inverznoj spektralnoj teoriji zauzima Šturm-Liuvilov operator sa devijativnim argumentom oblika

$$-y''(x) + q(x)y(\tau(x)) = \lambda y(x), \;\; x \in (0, \pi).$$

U [pik3] autori su posmatrali slučaj homogenog argumenta $\tau(x) = \alpha x$, $\alpha \in (0, 1)$ sa graničnim uslovima

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j \in \{0, 1\}.$$

U istom radu su opisane spektralne osobine i dokazana je teorema jedinstvenosti konstrukcije potencijala iz dva spektra. U [pik2] autori posmatraju simetričan potencijal i dokazuju teoremu jedinstvenosti koristeći jedan spektar sa Dirihleovim graničnim uslovima.
Šturm-Liuvilov problem sa zaleđenim argumentom se dobija za $\tau(x) = b$, odnosno posmatra se granični problem

$$l_b : \; -y''(x) + q(x)y(b) = \lambda y(x), \;\; y^{(\beta)}(0) = y^{(\gamma)}(1), \;\; \beta, \gamma \in \{0, 1\}, \;\; b \in [0, 1].$$

Poznato je da jedinstvenost potencijala $q(x)$ od jednog spektra graničnog problema l_b zavisi od tri parametra (β, γ, b). U [but2] su opisani svi generisani i degenerisani slučajevi konstrukcije jedinstvenog potencijala za racionalne parametre b, dok za iracionalan slučaj uvijek vrijedi jedinstvenost, [wan2].
Posebno interesantan slučaj je $\tau(x) = x - a$, $a \in (0, \pi)$. Ovaj operator se naziva Šturm-Liuvilov operator sa konstantnim kašnjenjem kojim se bavimo u nastavku.

2 Šturm-Liuvilov operator sa konstantnim kašnjenjem

Diferencijalne jednačine sa kašnjenjem opisuju procese s naknadnim efektima. Imaju značajne primjene, posebno u teoriji automatskog upravljanja, teoriji samooscilatornih sistema, problemima povezanim sa sagorijevanjem u raketnim motorima kao i raznim problemima u ekonomiji, biofizici i astrofizici. Jednačine sa kašnjenjem pojavljuju se svaki put kada u nekom fizičkom problemu sila koja djeluje u tački mase zavisi od brzine i položaja tačke, ne samo u datom trenutku, već i u nekom datom prethodnom trenutku. Prisustvo kašnjenja u izučavanim sistemima često se pokazuje kao rezultat pojave koja suštinski utiče na tok procesa. Na primjer, u sistemu automatskog upravljanja, kašnjenje je vremenski interval koji je sistemu potreban da bi reagovao na ulazne impulse.
Prisustvo kašnjenja u autoregulacionim sistemima može dovesti do učestalih oscilacija i nestabilnosti sistema. Razlog nestabilnosti sagorijevanja u raketnim motorima sa tečnim gorivom uzrokovana je vremenskim kašnjenjem, vremena potrebnog za konverziju proizvoda sagorijevanja goriva, [nor1].
U monografiji [nor1] Norkin je posmatrao problem Šturm-Liuvilovog operatora sa kašnjenjem

$$-y''(x) + q(x)y(x - \tau(x)) = \lambda y(x), \;\; x \in (0, \pi),$$

sa graničnim uslovima

$$\begin{gathered} y(0) \sin\alpha + y'(0) \cos\alpha = 0, \\ y(\pi) \sin\beta + y'(\pi) \cos\beta = 0, \\ y(x - \tau(x)) \equiv y(0)\varphi(x - \tau(x)), \; x - \tau(x) < 0. \end{gathered}$$

gdje su $q(x)$ i $\tau(x) \geq 0$ neprekidne na $[0, \pi]$, $\varphi(x)$ neprekidna početna funkcija na skupu $(-a, 0]$ i $\varphi(0) = 1$.
U istoj monografiji [nor1] riješeni su direktni problemi Šturm-Liuvilovog tipa sa kašnjenjem i opisane spektralne osobine, kao i asimptotska svojstva sopstvenih vrijednosti i sopstvenih funkcija. U ovom poglavlju ćemo obraditi navedene rezultate u slučaju konstantnog kašnjenja za Dirihle/Nojmanove i Robinove granične uslove. Posebnu pažnju ćemo obratiti na karakterističnu funkciju graničnog spektralnog problema. Za kašnjenje $a \in [\pi/2, \pi)$, karakteristična funkcija je linearna u odnosu na funkciju potencijala, dok je u ostalim slučajevima nelinearna. Kada kašnjenje teži ka nuli, broj nelinearnih sabiraka raste neograničeno. Zbog toga će nam biti važno asimptotsko ponašanje karakteristične funkcije. Pojavljivanje kašnjenja je značajno promijenilo pristup u spektralnoj teoriji operatora.

2.1 Direktni problemi

Posmatramo granični problem $\mathcal{L}_{0,j} = \mathcal{L}_{0,j}(q, a)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in (0, \pi)$:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{2.1.1}$$

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j \in \{0, 1\}, \tag{2.1.2}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(0, \pi)$ tako da $q(x) = 0$ s.s. na $(0, a)$. Granične uslove (2.1.2) nazivamo Dirihle/Nojmanovi granični uslovi. Pored pomenutih graničnih uslova, posmatraćemo i Robin/Dirihleove granične uslove

$$y'(0) - hy(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j \in \{0, 1\}. \tag{2.1.3}$$

Granični problem (2.1.1) i (2.1.3) ćemo označiti sa $M_j = M_j(q, a, h)$. Možemo posmatrati Robinove granične uslove u tački π umjesto $y^{(j)}(\pi)$ u (2.1.3), odnosno

$$y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0, \;\; j \in \{0, 1\}, \quad H_0, H_1 \in \mathbb{C}, \quad H_0 \neq H_1. \tag{2.1.4}$$

Granični problem (2.1.1) i (2.1.4) ćemo označiti sa $P_j = P_j(q, a, h, H_j)$, $j = 0, 1$. Napomenimo da granični problem P_j, $j = 0, 1$, možemo svesti na granični problem M_j, $j = 0, 1$.
U nastavku koristimo oznaku $\lambda = z^2$. Kako $a \in (0, \pi)$, postoji $N \in \mathbb{N}$ tako da $aN < \pi \leq a(N + 1)$, odnosno $a \in [\pi/(N + 1), \pi/N)$.
Neka su $Y(x, \lambda)$, $W(x, \lambda)$ i $\Psi(x, \lambda)$ rješenja jednačine (2.1.1) sa graničnim uslovima

$$Y(0, \lambda) = 0, \;\; Y'(0, \lambda) = 1,$$
$$W(0, \lambda) = 1, \;\; W'(0, \lambda) = 0.$$
$$\Psi(0, \lambda) = 1, \;\; \Psi'(0, \lambda) = h.$$

Primijetimo da je $\Psi(x, \lambda) = W(x, \lambda) + hY(x, \lambda)$.

Lema 2.1.1. *Funkcije $Y(x, \lambda)$, $W(x, \lambda)$ su jedinstvena rješenja sljedećih integralnih jednačina*

$$Y(x, \lambda) = \frac{\sin zx}{z} + \frac{1}{z} \int_0^x q(t)Y(t-a) \sin z(x-t)dt, \tag{2.1.5}$$

$$W(x, \lambda) = \cos zx + \int_0^x q(t)W(t-a) \sin z(x-t)dt. \tag{2.1.6}$$

Dokaz. Dokazaćemo prvi dio leme, dokaz drugog dijela je sličan. Posmatrajmo pridruženu homogenu jednačinu jednačine (2.1.1)

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,$$

čije je rješenje $y(x) = C_1 \sin zx + C_2 \cos zx$. Da bismo riješili (2.1.1) koristićemo metod varijacije konstanti.

$$C_1'(x) \sin zx + C_2'(x) \cos zx = 0,$$
$$C_1'(x) z \cos zx - C_2'(x) z \sin zx = q(x) y(x-a).$$

Rješenja ovog sistema su

$$C_1(x) = \frac{1}{z} \int_0^x q(t) y(t-a) \cos zt dt + C_1,$$
$$C_2(x) = -\frac{1}{z} \int_0^x q(t) y(t-a) \sin zt dt + C_2.$$

Dakle, dobijamo

$$y(x) = \sin zx \Big(\frac{1}{z} \int_0^x q(t) y(t-a) \cos zt dt + C_1 \Big) + \cos zx \Big(-\frac{1}{z} \int_0^x q(t) y(t-a) \sin zt dt + C_2 \Big)$$

ili

$$y(x) = \frac{1}{z} \int_0^x q(t) y(t-a) \sin z(x-t) dt + C_1 \sin zx + C_2 \cos zx.$$

Stavljajući $Y(0,\lambda) = 0$ i $Y'(0,\lambda) = 1$ dobijamo da je $C_2 = 0$ i $C_1 = \dfrac{1}{z}$, iz čega slijedi (2.1.5). Dokažimo suprotni smjer. Diferenciranjem po x u (2.1.5) imamo

$$Y'(x,\lambda) = \cos zx + \int_0^x q(t) Y(t-a) \cos z(x-t) dt. \tag{2.1.7}$$

Još jednom diferenciramo po x

$$Y''(x,\lambda) = -z \sin zx - z \int_0^x q(t) Y(t-a) \sin z(x-t) dt + q(x) Y(x-a). \tag{2.1.8}$$

Množeći odgovarajućom konstantom i sabirajući (2.1.5), (2.1.7), (2.1.8) dobijamo (2.1.1). $\square$

Teorema 2.1.2. *Rješenje integralne jednačine (2.1.5) je dato sa*

$$Y(x,\lambda) = Y_0(x,\lambda) + Y_1(x,\lambda) + ... + Y_N(x,\lambda), \tag{2.1.9}$$

gdje je $Y_k(x,\lambda)$, $k=0,1,...,N$, *dato sljedećim formulama:*

$$\begin{aligned} Y_0(x,\lambda) &= \frac{\sin zx}{z}; \quad Y_k(x,\lambda)=0, \quad x\le ka; \\ Y_k(x,\lambda) &= \int_{ka}^{x} \frac{\sin z(x-t)}{z} q(t) Y_{k-1}(t-a,\lambda)dt, \ \ x\ge ka. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Dokaz. Koristićemo metod uzastopnih aproksimacija:

1. Neka $x\in[0,a)$ tada vrijedi $y(x-a)\equiv 0$, za $x\in[0,a)$ te na osnovu Leme 2.1.1 dobijamo
$$Y(x,\lambda)=Y_0(x,\lambda)=\frac{1}{z}\sin zx.$$

2. Ako je $x\in[a,2a)$, tada koristeći rezultat iz prvog koraka imamo
$$\begin{aligned} Y(x,\lambda) &= \frac{1}{z}\sin zx + \frac{1}{z}\int_0^x q(t)Y(t-a)\sin z(x-t)dt \\ &= Y_0(x,\lambda) + \frac{1}{z}\int_a^x q(t)Y_0(t-a)\sin z(x-t)dt \\ &= \frac{1}{z^2}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\sin z(x-t)dt + \frac{1}{z}\sin zx. \end{aligned}$$

3. Za $x\in[2a,3a)$, koristeći prethodne korake dobijamo
$$\begin{aligned} Y(x,\lambda) =&Y_0(x,\lambda)+Y_1(x,\lambda)+\frac{1}{z}\int_0^x q(t)Y_1(t-a)\sin z(x-t)dt \\ =&\frac{1}{z}\sin zx + \frac{1}{z^2}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\sin z(x-t)dt \\ &+\frac{1}{z^3}\int_{2a}^{x}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(x-t)\sin z(t_1-a)\sin z(t-a-t_1)dt_1dt. \end{aligned}$$

Ponavljajući ovaj postupak dobijamo da je na segmentu $x\in[aN,\pi]$ rješenje jednačine (2.1.5):

$$\begin{aligned} Y(x,\lambda) =&Y_0(x,\lambda)+Y_1(x,\lambda)+...+Y_N(x,\lambda) \\ =&\frac{1}{z}\sin zx+\frac{1}{z^2}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\sin z(x-t)dt \\ &+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{z^{k+1}}\int_{ka}^{x}\int_{(k-1)a}^{t-a}\cdots\int_a^{t_{k-2}-a} q(t)q(t_1)\cdots q(t_{k-1})\sin z(x-t)\sin z(t_{k-1}-a) \\ &\sin z(t-a-t_1)\sin z(t_1-a-t_2)\cdots\sin z(t_{k-2}-a-t_{k-1})dt_{k-1}...dt_1dt. \end{aligned}$$

□

Sljedeću teoremu navodimo bez dokaza, jer je dokaz sličan dokazu Teoreme 2.1.2.

Teorema 2.1.3. *Rješenje integralne jednačine (2.1.6) je dato sa*

$$W(x,\lambda) = W_0(x,\lambda) + W_1(x,\lambda) + ... + W_N(x,\lambda), \tag{2.1.11}$$

pri čemu je (za $k = 1, 2, ...N$)

$$\begin{aligned} W_0(x,\lambda) &= \cos zx; \quad W_k(x,\lambda) = 0, \quad x \leq ka; \\ W_k(x,\lambda) &= \int_{ka}^{x} \frac{\sin z(x-t)}{z} q(t) W_{k-1}(t-a,\lambda)dt, \;\; x \geq ka. \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

Primijetimo da je

$$Y_k'(x,\lambda) = \int_{ka}^{x} \cos z(x-t) q(t) Y_{k-1}(t-a,\lambda)dt, \;\; x \geq ka. \tag{2.1.13}$$

$$W_k'(x,\lambda) = \int_{ka}^{x} \cos z(x-t) q(t) W_{k-1}(t-a,\lambda)dt, \;\; x \geq ka. \tag{2.1.14}$$

Takođe, vrijedi

$$\begin{aligned} Y_1(x,\lambda) &= \frac{1}{z^2}\int_{a}^{x} q(t)\sin z(x-t)\sin z(t-a)dt, \\ Y_1'(x,\lambda) &= \frac{1}{z}\int_{a}^{x} q(t)\cos z(x-t)\sin z(t-a)dt, \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

$$\begin{aligned} W_1(x,\lambda) &= \frac{1}{z}\int_{a}^{x} q(t)\sin z(x-t)\cos z(t-a)dt, \\ W_1'(x,\lambda) &= \int_{a}^{x} q(t)\cos z(x-t)\cos z(t-a)dt. \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

Funkcije $Y^{(j)}(x,\lambda)$, $W^{(j)}(x,\lambda)$, $\Psi^{(j)}(x,\lambda)$, $j = 0, 1$, su cijele sa redom 1/2. Pokažimo asimptotska ponašanja ovih funkcija.

Teorema 2.1.4. *Neka je $\gamma = Im(z)$. Za funkcije $Y^{(j)}(x,\lambda)$ i $W^{(j)}(x,\lambda)$, $j = 0, 1$, vrijedi*

$$Y(x,\lambda) = \frac{\sin zx}{z} + Y_1(x,\lambda) + O\bigg(\frac{\exp(|\gamma|(x-2a))}{z^2}\bigg), \;\; |z| \to \infty.$$

$$Y'(x,\lambda) = \cos zx + Y_1'(x,\lambda) + O\bigg(\frac{\exp(|\gamma|(x-2a))}{z}\bigg), \;\; |z| \to \infty.$$

$$W(x,\lambda) = \cos zx + W_1(x,\lambda) + O\bigg(\frac{\exp(|\gamma|(x-2a))}{z}\bigg), \;\; |z| \to \infty.$$

$$W'(x,\lambda) = -z\sin zx + W_1'(x,\lambda) + O\bigg(\exp(|\gamma|(x-2a))\bigg), \;\; |z| \to \infty.$$

Dokaz. Koristeći (2.1.15) i (2.1.16), matematičkom indukcijom se lako može pokazati da vrijedi

$$Y_k^{(j)}(x, \lambda) = O(z^{(j-k-1)} \exp(|\gamma|(x - ka))), \ \ |z| \to \infty, \ \ x \geq ka.$$

na osnovu čega slijedi dokaz. Slično se pokazuje i za funkciju $W^{(j)}(x, \lambda)$, $j = 0, 1$, [voj2]. $\square$

2.2 Spektralne osobine

Dirihle/Nojmanov slučaj. Funkcija $Y(x,\lambda)$, $j=0,1$, predstavlja netrivijalna rješenja jednačine (2.1.1) sa početnim uslovima (u lijevom kraju intervala) $Y(0,\lambda)=0$ i $Y'(0,\lambda)=1$. Kada uvrstimo početne uslove u desnom kraju intervala dobijamo karakterističnu jednačinu graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q,a)$, $j=0,1$, odnosno:

$$\begin{aligned}\Delta_{0,0}(\lambda) &:= Y(\pi,\lambda)=0,\\ \Delta_{0,1}(\lambda) &:= Y^{'}(\pi,\lambda)=0.\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Skup sopstvenih vrijednosti $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 0}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$, $j=0,1$, odgovara nulama karakteristične jednačine $\Delta_{0,j}(\lambda)$, [nor1], [fre3]. Sopstvenoj vrijednosti $\lambda_{n,j}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$ odgovara sopstvena funkcija $Y(x,\lambda_{n,j})$. Za razliku od klasičnog Šturm-Liuvilovog problema nule karakteristične funkcije $\Delta_{0,j}(\lambda)$, $j=0,1$, nisu proste u opštem slučaju. Ipak, u nastavku ćemo posmatrati slučajeve kada su nule karakteristične funkcije proste.

Koristeći Teoremu 2.1.4 zaključujemo da vrijede sljedeće asimptotske formule za karakteristične funkcije graničnih problema L_0 i L_1:

$$\begin{aligned}\Delta_{0,0}(\lambda) &= \frac{\sin z\pi}{z}+Y_1(\pi,\lambda)+O\left(\frac{\exp(|\gamma|(\pi-2a))}{z^2}\right),\ \ |z|\to\infty,\\ \Delta_{0,1}(\lambda) &= \cos z\pi+Y_1^{'}(\pi,\lambda)+O\left(\frac{\exp(|\gamma|(\pi-2a))}{z}\right),\ \ |z|\to\infty.\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Teorema 2.2.1. *Skup nula karakteristične funkcije $\Delta_{0,j}(\lambda)$, $j=0,1$, je prebrojiv, pri čemu se u krugu $K_n=\{z:|z-n+\frac{j}{2}|<\frac{1}{n}\}$, za dovoljno veliko $n\in\mathbb{N}$, nalazi tačno jedna nula ove funkcije.*

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati za funkciju $\Delta_{0,0}(\lambda)$, slično se dokazuje i za $\Delta_{0,1}(\lambda)$. Na osnovu (2.2.2) vrijedi

$$z\Delta_{0,0}(\lambda)=\sin z\pi+\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\sin z(t-a)\sin z(\pi-t)dt+O\left(\frac{\exp(\gamma(\pi-2a))}{z^2}\right),\ \ |z|\to\infty. \tag{2.2.3}$$

Označimo sa

$$f(z)=\sin z\pi,$$

$$g(z)=\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\sin z(t-a)\sin z(\pi-t)dt+O\left(\frac{\exp(\gamma(\pi-2a))}{z^2}\right).$$

Karakteristična funkcija $\Delta_{0,0}(z)$ je neparna, tako da možemo posmatrati $\gamma > 0$. Jasno je da vrijedi

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{\exp(\gamma(\pi-a))}=\infty,$$
$$\lim_{z\to\infty}\frac{g(z)}{\exp(\gamma(\pi-a))}=0,$$

pri čemu je $\gamma = Im(z)$. Na osnovu toga zaključujemo da postoje $r_0, r_1 \in \mathbb{R}^+$ takvo da vrijedi

$$\exp(|\gamma|(\pi-a)) < |f(z)|, \quad |r_0| < |z|,$$
$$|g(z)| < \exp(|\gamma|(\pi-a)), \quad |r_1| < |z|.$$

Ako je $\max\{r_0, r_1\} < |z|$, tada vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$. Na osnovu Rušeove teoreme [con1], zaključujemo da funkcija $\Delta_{0,0}(z) = f(z) + g(z)$ ima jednak broj nula kao i funkcija $f(z)$ unutar kruga $L_n = \{z : |z| < n + \frac{1}{2}\}$ gdje je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno takav da $max\{r_0, r_1\} < n$. Kako funkcija $\sin \pi z$ u razmatranom krugu ima tačno $n + 1$ korijen zaključujemo da i karakteristična funkcija ima $n + 1$ korijen, a samim tim i prebrojivo mnogo korijena u skupu kompleksnih brojeva. Slično, ako izaberemo krug $K_n = \{z : |z - n| < \frac{1}{n}\}$ takav da je $\max\{r_0, r_1\} + 1 < n$, ponovnom primjenom Rušeove teoreme na iste funkcije završavamo dokaz. □

Teorema 2.2.2. *Spektar $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$, $j = 0, 1$, je oblika*

$$\lambda_{n,j} = z_{n,j}^2, \quad z_{n,j} = n - \frac{j}{2} + \frac{I_1\cos(n-\frac{j}{2})a}{2\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l^2, \tag{2.2.4}$$

gdje je $I_1 = \int_a^\pi q(t)dt$, a simbol $\{\kappa_n\}$ označava različite nizove u l^2.

Dokaz. Teoremu dokazujemo u slučaju $j = 0$. Uvedimo oznaku $z_n = z_{n,0}$.
Na osnovu Teoreme 2.1.2 vrijedi

$$z_n = n + a_n,$$

gdje

$$|a_n| < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad a_n = o(1),\ n \to \infty.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = +\infty$, te iz $z_n^2\Delta_{0,0}(z_n^2) = 0$ dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(z_n \sin z_n\pi + \int_a^\pi q(t)\sin z_n(t-a)\sin z_n(\pi-t)dt\right) = 0, \tag{2.2.5}$$

pri čemu smo koristili

$$\lim_{n\to\infty} z_n O\left(\frac{\exp(\gamma_n(\pi-2a))}{z_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\gamma_n(\pi-2a))}{z_n} O(1) = 0,$$

jer je $|\gamma_n| \le |a_n|$, pa je ovaj niz ograničen. Uvrštavajući $z_n = n + a_n$ u (2.2.5) imamo

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+a_n)\sin(n+a_n)\pi + \int_a^\pi q(t)\sin(n+a_n)(t-a)\sin(n+a_n)(\pi-t)dt\right) = 0. \quad (2.2.6)$$

Kako je $a_n = o(1),\ n\to\infty$, lako se pokaže da je

$$\int_a^\pi q(t)\sin((n+a_n)(t-a))\sin((n+a_n)(\pi-t))dt = O(1),\ \ n\to\infty.$$

Iz (2.2.6) imamo, za $n\to\infty$,

$$\begin{aligned}
(n+a_n)\sin(n+a_n)\pi =& O(1),\\
(-1)^n(n+a_n)\sin a_n\pi =& O(1),\\
\frac{a_n\pi(-1)^n(n+a_n)\sin a_n\pi}{a_n\pi} =& O(1),\\
a_n\pi(-1)^n(n+a_n) =& O(1),\\
na_n = O(1) \quad \Rightarrow \quad a_n =& \frac{c_n}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Sada odredimo c_n. Pošto je $z_n = n + \dfrac{c_n}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, za $n\to\infty$, vrijede sljedeće asimptotske formule:

$$\sin\pi z_n = (-1)^n\frac{c_n\pi}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad (2.2.7)$$

$$\cos(\pi-a)z_n = (-1)^n(\cos na + \frac{c_n(\pi-a)}{n}\sin na) + o(\frac{1}{n}), \quad (2.2.8)$$

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad (2.2.9)$$

$$\cos(\pi-2t+a)z_n = (-1)^n(\cos n(2t-a) + \frac{c_n(\pi-2t+a)}{n} + o(\frac{1}{n}), \quad (2.2.10)$$

$$\sin(\pi-t)z_n = (-1)^n(-\sin nt + \frac{c_n(\pi-t)}{n}\cos nt) + o(\frac{1}{n}). \quad (2.2.11)$$

Koristeći formule transformacije proizvoda trigonometrijskih funkcija u zbir iz (2.2.3) dobijamo

$$\begin{aligned}
z_n^2\,\Delta_{0,0}(z_n^2) =& z_n\sin\pi z_n - \frac{1}{2}\cos z_n(\pi-a)\int_a^\pi q(t)dt\\
&+\frac{1}{2}\int_a^\pi q(t)\cos z_n(\pi-2t+a)dt + o\left(\frac{1}{z_n}\right),\ n\to\infty.
\end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Uvrštavajući formule (2.2.7)-(2.2.11) u (2.2.12) dobijamo

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg[(-1)^n\frac{c_n\pi}{n}-\frac{(-1)^n}{2}\Big(\int_a^\pi q(t)dt\Big)\Big(\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big(\cos an+\frac{c_n(\pi-a)}{n}\sin na+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)(-1)^n\Big)\int_a^\pi q(t)\Big(\cos n(2t-a)+\frac{c_n(n-2t+a)}{n}\Big)dt+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Bigg]=0.$$

Nakon sređivanja zaključujemo da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\Bigg[\frac{1}{2}\Big(\cos an\int_a^\pi q(t)dt-\int_a^\pi q(t)\cos n(2t-a)dt\Big)-c_n\pi\Bigg]=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\Big(\cos an\int_a^\pi q(t)dt-\int_a^\pi q(t)\cos n(2t-a)dt\Big)-c_n\pi=o(1),$$

te konačno dobijamo

$$c_n=\frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}\cos an\int_a^\pi q(t)dt-\frac{1}{2}\int_a^\pi q(t)\cos n(2t-a)dt\Big).$$

□

Teorema 2.2.3. *Spektar* $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 0}$*, graničnog problema* $\mathcal{L}_{0,j}$*,* $j=0,1$*, jedinstveno određuje karakterističnu funkciju i vrijedi*

$$\Delta_{0,0}(\lambda)=\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,0}-\lambda}{n^2},\quad \Delta_{0,1}(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,1}-\lambda}{(n-1/2)^2}. \tag{2.2.13}$$

Dokaz. Dovoljno je da dokažemo jednakost za karakterističnu funkciju $\Delta_{0,0}(\lambda)$. Koristeći Adamarovu faktorizaciju [con1,p.289], $\Delta_{0,0}(\lambda)$ je jedinstveno određena svojim nulama do na multiplikativnu konstantu:

$$\Delta_{0,0}(\lambda)=C\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda}{\lambda_{0,n}}\Big). \tag{2.2.14}$$

Posmatrajmo funkciju

$$\frac{\sin z\pi}{z}=\pi\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{\lambda}{n^2}\Big).$$

Tada vrijedi

$$\frac{z\Delta_{0,0}(\lambda)}{\sin z\pi}=\frac{C}{\pi}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\lambda_{n,0}}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{\lambda_{n,0}-n^2}{n^2-\lambda}\Big).$$

Uzimajući u obzir (2.2.2) i (2.2.4) možemo izračunati

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{z\Delta_{0,0}(\lambda)}{\sin z\pi}=1,\quad \lim_{\lambda\to-\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda_{n,0}-n^2}{n^2-\lambda}\right)=1,$$

odakle slijedi

$$C=\pi\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n,0}}{n^2}.$$

□

Robin/Dirihleov slučaj. Funkcija $\Psi(x,\lambda)$, $j=0,1$, predstavlja netrivijalna rješenja jednačine (2.1.1) sa početnim uslovima u lijevom kraju intervala $\Psi(0,\lambda)=1$ i $\Psi'(0,\lambda)=h$. Kada uvrstimo početne uslove u desni kraj intervala dobijamo karakterističnu jednačinu graničnog problema M_j, $j=0,1$, odnosno:

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda) &:= \Psi(\pi,\lambda)=W(\pi,\lambda)+hY(\pi,\lambda)=0,\\ Z_1(\lambda) &:= \Psi'(\pi,\lambda)=W'(\pi,\lambda)+hY'(\pi,\lambda)=0. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Koristeći Teoremu 2.1.4 može se lako pokazati da vrijede sljedeće asimptotske formule karakterističnih funkcija M_1 i M_2 :

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda) &= \cos z\pi+\frac{h\sin z\pi}{z}+Y_1(\pi,\lambda)+hW_1(\pi,\lambda)+O\Bigg(\frac{\exp(|\gamma|(\pi-2a)}{z}\Bigg),\\ Z_1(\lambda) &= -z\sin z\pi+h\cos z\pi+Y_1^{'}(\pi,\lambda)+hW_1^{'}(\pi,\lambda)+O\Bigg(\exp(|\gamma|(\pi-2a)\Bigg). \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Skup sopstvnih vrijedosti $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema M_j, $j=0,1$, je prebrojiv i odgovara nulama karakteristične funkcije $Z_j(\lambda)$. Koristeći (2.2.16) i metode opisane u prethodnom slučaju lako možemo dokazati sljedeća tvrđenja, [yur3].

Teorema 2.2.4. *Spektar $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema M_j, $j=0,1$, je oblika:*

$$\sqrt{\mu_{n,j}}=n-\frac{1-j}{2}+\frac{h}{n\pi}+\frac{I_1\cos(n-\frac{1-j}{2})a}{2n\pi}+\frac{\kappa_n}{n},\ \ \{\kappa_n\}\in l^2. \tag{2.2.17}$$

Teorema 2.2.5. *Spektar $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$, graničnog problema M_j, $j=0,1$, jedinstveno određuje karakterističnu funkciju i vrijede sljedeće formule*

$$Z_0(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{n,0}-\lambda}{(n-1/2)^2},\quad Z_1(\lambda)=\pi(\mu_{0,1}-\lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_{n,1}-\lambda}{n^2}. \tag{2.2.18}$$

Robinov slučaj. Kao u prethodnom slučaju funkcija $\Psi(x, \lambda)$ predstavlja netrivijalna rješenja jednačine (2.1.1) sa početnim uslovima $\Psi(0, \lambda) = 1$ i $\Psi(0, \lambda) = h$. Karakteristična funkcija graničnog problema P_j, $j = 0, 1$, je oblika

$$\delta_j(\lambda) := \Psi'(\pi, \lambda) + H_j \Psi(\pi, \lambda) = Z_1(\lambda) + H_j Z_0(\lambda). \tag{2.2.19}$$

Sopstvene vrijednosti $\{\rho_{n,j}\}_{n \geq 1}$ graničnog problema P_j, $j = 0, 1$, se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije $\delta_j(\lambda)$, $j = 0, 1$, i oblika su ([voj1], [voj2]):

$$\sqrt{\rho_{n,j}} = n + \frac{h + H_j}{n\pi} + \frac{I_1 \cos na}{2n\pi} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l^2. \tag{2.2.20}$$

Takođe, karakteristična funkcija $\delta_j(\lambda)$, $j = 0, 1$, je jedinstveno određena od sopstvenih vrijednosti $\{\rho_{n,j}\}_{n \geq 0}$ i vrijede formule

$$Z_0(\lambda) = \pi(\rho_{0,0} - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{n,0} - \lambda}{n^2}, \quad Z_1(\lambda) = \pi(\rho_{0,1} - \lambda) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_{n,1} - \lambda}{n^2}. \tag{2.2.21}$$

Primijetimo da je, [yur3],

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda) &= \frac{\delta_1(\lambda) - \delta_0(\lambda)}{H_1 - H_0}, \\ Z_1(\lambda) &= \frac{H_0 \delta_1(\lambda) - H_1 \delta_0(\lambda)}{H_0 - H_1}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Prethodna jednačina nam govori da Robinov granični problem možemo svesti na Robin/Dirihleov granični problem koji je znatno jednostavniji. Ovo je od izuzetne važnosti u inverznim problemima ovog tipa. Zbog ove osobine u nastavku ćemo posmatrati samo prva dva slučaja.

2.3 Operatori sa početnom funkcijom

U nastavku posmatramo granični problem $N_j = N_j(q, a, \varphi, h)$, $j = 0, 1$,

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; x \in (0, \pi), \tag{2.3.1}$$

sa graničnim uslovima

$$y'(0) - hy(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \tag{2.3.2}$$

$$y(x-a) \equiv y(0)\varphi(x), \;\; x \in [0, a], \tag{2.3.3}$$

gdje je potencijal $q(x) \in L^2(0,\pi)$ kompleksna funkcija, $a \in [\pi/3, \pi)$ je kašnjenje i $\varphi(x)$ neprekidna funkcija na $[0, a]$, tako da $\varphi(a) = 1$.
Funkcija $\varphi(x)$ se naziva početna funkcija i bez umanjenja opštosti ćemo pretpostaviti da je $\varphi(x) \neq 0$ skoro svuda. Ukoliko je $\varphi(x) = 0$ na $E \subset [0, a]$ i $|E| > 0$, tada je potrebno da potencijal $q(x)$ bude poznat na skupu E, najčešće se uzima da je $q(x) = 0$. Takođe, pretpostavićemo da je $y(0) \neq 0$, u suprotnom problem se svodi na granični problem M_j, $j = 0, 1$, odnosno (2.1.1) i (2.1.3).
Koristićemo iste metode da riješimo direktni problem kao u prethodnim slučajevima, zato sljedeća tvrđenja navodimo bez dokaza.

Lema 2.3.1. *Neka je $N(x, \lambda)$ rješenje graničnog problema N_j, $j = 0, 1$, sa početnim uslovima $N'(0, \lambda) = h$, $N(0, \lambda) = 1$. Tada je funkcija $N(x, \lambda)$ jedinstveno rješenje Volterove integralne jednačine*

$$N(x, \lambda) = \cos zx + h\frac{\sin zx}{z} + \int_0^x q(t)N(t, \lambda)\frac{\sin z(x-t)}{z}dt. \tag{2.3.4}$$

Teorema 2.3.2. *Rješenje integralne jednačine (2.3.4) je dato sa*

$$N(x, \lambda) = N_0(x, \lambda) + N_1(x, \lambda), \;\; a \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right), \tag{2.3.5}$$

gdje je

$$\begin{aligned} N_0(x, \lambda) &= \cos zx + \frac{h \sin zx}{z} + Q(x); \\ N_1(x, \lambda) &= \int_a^x \frac{\sin z(x-t)}{z} q(t) N_0(t-a, \lambda)dt, \;\; x \geq a, \\ Q(x) &= \begin{cases} \frac{1}{z}\int_0^x \varphi(t)q(t)\sin z(x-t)dt, & x \in (0, a), \\ \frac{1}{z}\int_0^a \varphi(t)q(t)\sin z(x-t)dt, & x \in (a, \pi), \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Karakteristična funkcija graničnog problema N_j, $j=0,1$, je oblika

$$d_j(\lambda) := N^{(j)}(\pi,\lambda).$$

Neka je $a\in[\pi/2,\pi)$, koristeći (2.3.6) dobijamo da je

$$\begin{aligned} d_0(\lambda) =& \cos z\pi + \frac{h\sin z\pi}{z} + \frac{1}{z}\int_0^a \varphi(t)q(t)\sin z(\pi-t)dt \\ &+\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-t)\cos z(t-a)dt + \frac{h}{z^2}\int_a^\pi q(t)\sin z(t-a)\sin z(\pi-t)dt \\ &+\frac{1}{z^2}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-t)\int_0^{t-a}\varphi(s)q(s)\sin z(t-a-s)dsdt, \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) =& -z\sin z\pi + h\cos z\pi + \int_0^a \varphi(t)q(t)\cos z(\pi-t)dt \\ &+\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-t)\cos z(t-a)dt + \frac{h}{z}\int_a^\pi q(t)\sin z(t-a)\cos z(\pi-t)dt \\ &+\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-t)\int_0^{t-a}\varphi(s)q(s)\sin z(t-a-s)dsdt. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Sopstvene vrijednosti graničnog problema se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije. Slično kao u prethodnim slučajevima vrijede sljedeće teoreme

Teorema 2.3.3. *Spektar $\{\nu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema N_j, $j=0,1$, je oblika:*

$$\sqrt{\nu_{n,j}} = n - \frac{1-j}{2} + \frac{h}{n\pi} + \frac{I_1\cos(n-\frac{1-j}{2})a}{2n\pi} + \frac{\kappa_n}{n},\ \ \{\kappa_n\}\in l^2, \tag{2.3.9}$$

Teorema 2.3.4. *Spektar $\{\nu_{n,j}\}_{n\geq 0}$, graničnog problema N_j, $j=0,1$, jedinstveno određuje karakterističnu funkciju i vrijede sljedeće formule*

$$d_0(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_{n,0}-\lambda}{(n-1/2)^2},\quad d_1(\lambda) = \pi(\nu_{0,1}-\lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_{n,1}-\lambda}{n^2}. \tag{2.3.10}$$

Umjesto graničnih uslova (2.3.2) možemo posmatrati Robinove granične uslove

$$y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0,\ \ j=0,1,\quad H_0,H_1\in\mathbb{C},\quad H_0\neq H_1$$

Ovaj problem sa dva kašnjenja je obrađen u [voj2].

3 Inverzni problemi operatora sa kašnjenjem

U prethodnom poglavlju smo posmatrali direktne probleme operatora Šturm-Liuvilovog tipa sa konstantnim kašnjenjem. Dobijeni rezultati su od izuzetne važnosti za dalja istraživanja. U ovom poglavlju posmatramo inverzne probleme pomenutih operatora na osnovu dva spektra. Operatori sa kašnjenjem su uveli potpuno novi pristup u inverznoj spektralnoj teoriji. Nijedan od poznatih metoda za klasične Šturm-Liuvilove operatore se ne može primijeniti za operatore sa kašnjenjem. U jednom od prvih rezultata inverzne teorije za operatore sa kašnjenjem je dokazano da su dva spektra dovoljna da se jedinstveno odredi potencijal iz prostora analitičkih funkcija, [pik1]. Za potencijale iz prostora kvadratno integrabilnih funkcija, ovaj problem je predstavljao izazov duži niz godina. U [fre3] autori su uspjeli da uopšte Ambarcumjanov rezultat za klasične operatore, odnosno dokazali su kada su sopstvne vrijednosti dva spektra iste kao kod nula potencijala, tada potencijal mora biti nula za svako kašnjenje. Ova teorema je nazvana teorema jedinstvenosti što će se kasnije ispostaviti kao neopravdan naziv.

Kineski matematičar C.F. Yang je u [yan1] riješio inverzne nodalne probleme za Šturm-Liuvilove operatore sa konstantnim kašnjenjem. U ovim problemima umjesto sopstvenih vrijednosti poznate su nule sopstvenih funkcija, koje se još nazivaju nodalne tačke, [wan1]. Ipak, za poznate spektre inverzni problem se ispostavio izrazito zahtjevan. Ranije smo naveli da je karakteristična funkcija graničnog spektralnog problema linearna u odnosu na funkciju potencijala kada kašnjenje nije manje od polovine intervala. Zahvaljujući tome inverzni problemi su riješeni u ovim slučajevima, [vla1], [yur4], [ign1]. Ispostaviće se da i u nelinearnom slučaju, odnosno kada je kašnjenje veće od dvije petine intervala, a manje od polovine intervala vrijedi teorema jedinstvenosti, [bon1], [voj1], [pik4]. Ove rezultate ćemo dokazati u ovom poglavlju za Dirihle/Nojmanove i Robin/Dirihleove početne uslove. Štaviše, dokazano je da su dijelovi dva spektra dovoljni da se jedinstveno konstruiše operator ukoliko kašnjenje nije manje od dvije petine intervala, [but3], [but4].

Pored klasičnih inverznih problema posmatraju se i nekompletni inverzni problemi. Oni su korisni iz razloga što su nam, pored spektralnih informacija, ponekad poznate neke osobine potencijala. Nekompletni inverzni problemi se najčešće posmatraju kada ne vrijedi teorema jedinstvenosti. U tom slučaju je potrebno da posjedujemo dodatne informacije koje bi garantovale teoremu jedinstvenosti. Konkretno, posmatraćemo kašnjenje manje od dvije petine intervala pri čemu će potencijal biti poznat na dijelu intervala. Takođe, u istom slučaju kada su poznata dva spektra, dovoljno je da je potencijal simetričan na podintervalu kako bi dokazali teoremu jedinstvenosti. Slični problemi su posmatrani u [bon2], [dju2], [dju3].

3.1 Kašnjenje iz intervala $[\pi/2, \pi)$

Posmatramo granični problem $\mathcal{L}_{0,j} = \mathcal{L}_{0,j}(q)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in [\pi/2, \pi)$

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{3.1.1}$$

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j = 0, 1, \tag{3.1.2}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(0,\pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0, a)$.

Neka je $Y(x,\lambda)$ rješenje jednačine (3.1.1) tako da zadovoljava početne uslove $Y(0,\lambda) = 0$, $Y'(0,\lambda) = 1$. Sopstvene vrijednosti od $\mathcal{L}_{0,j}$, $j = 0, 1$, se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije (2.2.1)

$$\Delta_{0,j}(\lambda) = Y^{(j)}(\pi,\lambda) \tag{3.1.3}$$

Na osnovu Teoreme 2.1.2 vrijedi

$$Y(x,\lambda) = \frac{\sin zx}{z} + \frac{1}{z^2}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\sin z(x-t)dt, \tag{3.1.4}$$

$$Y'(x,\lambda) = \cos zx + \frac{1}{z}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\cos z(x-t)dt, \tag{3.1.5}$$

gdje je $z = \lambda^2$. Mijenjajući (3.1.4), (3.1.5) u (3.1.3) dobijamo

$$\begin{aligned}\Delta_{0,0}(\lambda) &= \frac{\sin z\pi}{z} - \frac{\cos z(\pi-a)}{2z^2}\int_a^\pi q(t)dt \\ &+\frac{1}{2z^2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-2t+a)dt,\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{0,1}(\lambda) &= \cos z\pi + \frac{\sin z(\pi-a)}{2z}\int_a^\pi q(t)dt \\ &-\frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-2t+a)dt,\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

pri čemu smo koristili trigonometrijsku transformaciju, [vla1].

Na osnovu Teoreme 2.2.2 spektar $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$, $j = 0, 1$, je oblika

$$\lambda_{n,j} = z_{n,j}^2, \;\; z_{n,j} = n - \frac{j}{2} + \frac{I_1\cos(n-\frac{j}{2})a}{2\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \;\; \{\kappa_n\} \in l^2, \tag{3.1.8}$$

Inverzni problem 3.1.1: Neka je $a \in [\pi/2, \pi)$. Dati su spektri $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$, $j = 0, 1$, odrediti potencijal $q(x)$.

Na osnovu Teoreme 2.2.3 spektar $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$, $j=0,1$, jedinstveno određuje karakterističnu funkciju $\Delta_{0,j}(\lambda)$, pa je lijeva strana u jednačinama (3.1.6) i (3.1.7) poznata.

Teorema 3.1.1. *Vrijednost* $I_1=\int_a^\pi q(t)dt$ *je jedinstveno određena spektrom* $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 1}$.

Dokaz. Koristeći (3.1.6) za $|\cos n_k a|>\delta>0$ dobijamo da je

$$I_1=\lim_{n_k\to\infty} 2n_k^2(-1)^{n_k+1}(\cos n_k a)^{-1}\Delta_{0,0}(n_k^2).$$

Štaviše, podspektar $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\geq 1}$ je dovoljan da odredi vrijednost I_1 pod uslovom $\lim_{k\to\infty}\cos(n_k a)\neq 0$. Ipak, ukoliko vrijedi da $\cos(n_k a)\to 0$, tada podspektar $\{\lambda_{n_k,1}\}_{k\geq 1}$ jedinstveno određuje vrijednost integrala I_1. □

Ukoliko je $I_1\neq 0$, tada su nam podaci spektra $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 1}$ dovoljni da odredimo kašnjenje sljedećom formulom ($\sin(na)\neq 0$)

$$a=\arccos\left(\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_{n-2,0}-(n-2)^2-\lambda_{n+2,0}+(n+2)^2}{\lambda_{n-1,0}-(n-1)^2-\lambda_{n+1,0}+(n+1)^2}\right).$$

Međutim, ukoliko je $I_1=0$ tada kašnjenje nije jedinstveno određeno. U tu svrhu navodimo sljedeći kontraprimjer.

Primjer 3.1.2. *Neka je* $a_0\in(\pi/2,\pi)$ *i funkcija* $h(x)\in L^2(a_0,\pi)$ *proizvoljna funkcija tako da vrijedi* $\int_{a_0}^\pi h(x)dx=0$. *Za kašnjenje* $a_1<a_0$ *izaberimo funkciju*

$$h_1(x)=\begin{cases}0, & x\in(a_1,a_0),\\ h(x), & x\in(a_0,\pi).\end{cases}$$

Potencijali $h(x)$ *i* $h_1(x)$ *imaju iste karakteristične funkcije za različita kašnjenja.*

Prema tome kašnjenje nije jedinstveno određeno u opštem slučaju. U nastavku se podrazumijeva da je kašnjenje unaprijed zadano.
U sljedećem tvrđenju ćemo dati rješenje inverznog problema za Šturm-Liuvilov operator uz Dirihle/Nojmanove granične uslove za kašnjenje $a\in[\pi/2,\pi)$.

Teorema 3.1.3. *Spektri* $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 1}$ *i* $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 1}$ *graničnih problema* $L_0(q)$ *i* $L_1(q)$ *jedinstveno određuju potencijal* $q(x)$.

Dokaz. Već smo dokazali da dva spektra jedinstveno određuju $\Delta_{0,0}(\lambda)$, $\Delta_{0,1}(\lambda)$ i I_1. Na osnovu (3.1.6) i (3.1.7) dobijamo

$$2z^2\Delta_{0,0}(\lambda)-2z\sin z\pi+\cos z(\pi-a)I_1=\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-2t+a)dt, \tag{3.1.9}$$

$$2z\Delta_{0,1}(\lambda) - 2z\cos z\pi - \sin z(\pi - a)I_1 = \int_a^\pi q(t)\sin z(\pi - 2t + a)dt, \tag{3.1.10}$$

pri čemu je lijeva strana u prethodne dvije jednačine poznata.
Uvođenjem smjene $\pi - 2t + a = 2s$ u integralima na desnoj strani jednačina (3.1.9) i (3.1.10) dobijamo:

$$F_0(z) = \int_{\frac{-\pi+a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} q\left(\frac{\pi - 2s + a}{2}\right)\cos(2zs)ds, \tag{3.1.11}$$

$$F_1(z) = \int_{\frac{-\pi+a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} q\left(\frac{\pi - 2s + a}{2}\right)\sin(2zs)ds, \tag{3.1.12}$$

pri čemu je

$$F_0(z) = 2z^2\Delta_{0,0}(\lambda) - 2z\sin z\pi + \cos z(\pi - a)I_1,$$

$$F_1(z) = -2z\Delta_{0,1}(\lambda) + 2z\cos z\pi + \sin z(\pi - a)I_1.$$

Kako $q\left(\frac{\pi - 2x + a}{2}\right) \in L^2\left(\frac{-\pi + a}{2}, \frac{\pi - a}{2}\right)$, iskoristićemo bazu ovog prostora:

$$\left\{\exp\left(\frac{2\pi i m x}{\pi - a}\right)\right\}_{m\in\mathbb{Z}}.$$

Uvrštavanjem $z = \frac{m\pi}{\pi - a}$, $m \in \mathbb{Z}$ zatim množenjem (3.1.11) sa $\frac{1}{\pi - a}\exp\left(\frac{2mi\pi x}{\pi - a}\right)$ i (3.1.12) sa $\frac{-i}{\pi - a}\exp\left(\frac{2mi\pi x}{\pi - a}\right)$, te sumiranjem dobijamo

$$f(x) = q\left(\frac{\pi - 2x + a}{2}\right),\ x \in (a, \pi), \tag{3.1.13}$$

gdje je

$$f(x) = \frac{1}{\pi - a}\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(F_0\left(\frac{m\pi}{\pi - a}\right) - iF_1\left(\frac{m\pi}{\pi - a}\right)\right)\exp\left(\frac{2mi\pi x}{\pi - a}\right).$$

Kako je funkcija $f(x)$ poznata iz (3.1.13) možemo izračunati $q((\pi - 2x + a)/2)$. □

Slična ideja ovog rezultata je obrađena u radu [vla1]. Ispostavilo se da su dva spektra više nego dovoljna da se odredi potencijal. U radu [but4] je dokazano pod kojim uslovima dva podspektra $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\geq 1}$ i $\{\lambda_{n_k,1}\}_{k\geq 1}$ određuju jedinstveni potencijal. Preciznije, potreban i dovoljan uslov da dva podspektra $\{\lambda_{n_k,0}\}_{k\geq 1}$ i $\{\lambda_{n_k,1}\}_{k\geq 1}$ određuju jedinstveni potencijal je da sistemi $\{\cos(n_k x)\}_{n\geq 1}$ i $\{\sin(n_k x)\}_{k\geq 1}$ budu kompletni u $L^2(0, \pi - a)$. U dokazu se umjesto

Furijeove baze koristi Risova baza. Velika prednost ovog metoda je što ne trebamo koristiti spektre da konstruišemo karakteristične funkcije, već koristimo informacije da sopstvene vrijednosti anuliraju karakterističnu funkciju.

U nastavku rješavamo inverzni problem Šturm-Liuvilovog operatora sa konstantnim kašnjenjem uz Robin/Dirihleove granične uslove. Posmatramo granični problem $M_j = M_j(q,h)$, $j = 0, 1$, sa konstantnim kašnjenjem $a \in [\pi/2, \pi)$:

$$\begin{gathered} -y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \\ y'(0) - hy(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j = 0, 1, \end{gathered} \tag{3.1.14}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(a,\pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0,a)$.

Neka je $\Psi(x,\lambda)$ rješenje jednačine (3.1.1) tako da zadovoljava početne uslove $\Psi(0,\lambda) = 1$, $\Psi'(0,\lambda) = h$. Sopstvene vrijednosti od M_j, $j = 0, 1$, se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije (2.2.14)

$$Z_j(\lambda) = \Psi^{(j)}(\pi,\lambda) \tag{3.1.15}$$

Na osnovu Teoreme 2.1.2, Teoreme 2.1.3 i činjenice $\Psi(x,\lambda) = W(x,\lambda) + hY(x,\lambda)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \Psi(x,\lambda) =& \cos zx + \frac{h \sin zx}{z} + \frac{1}{z}\int_a^x q(t)\cos z(t-a)\sin z(x-t)dt \\ &+ \frac{h}{z^2}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\sin z(x-t)dt \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

$$\begin{aligned} \Psi'(x,\lambda) =& -z\sin zx + h\cos zx + \int_a^x q(t)\cos z(t-a)\cos z(x-t)dt \\ &+ \frac{h}{z}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\cos z(x-t)dt \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Na osnovu (3.1.15),(3.1.16) i (3.1.17) vrijedi

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda) =& \cos z\pi + \frac{h\sin z\pi}{z} + \frac{1}{2z}\sin z(\pi-a)I_1 + \frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-2t+a)dt \\ &- \frac{h}{2z^2}\cos z(\pi-a)I_1 + \frac{h}{2z^2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-2t+a)dt, \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

$$\begin{aligned} Z_1(\lambda) =& -z\sin z\pi + h\cos z\pi + \frac{1}{2}\cos z(\pi-a)I_1 + \frac{1}{2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-2t+a)dt \\ &+ \frac{h}{2z}\sin z(\pi-a)I_1 - \frac{h}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-2t+a)dt. \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Na osnovu Teoreme 2.2.4 zaključujemo da je spektar $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $M_j(q,h,a)$, $j=0,1$, oblika:

$$\sqrt{\mu_{n,j}} = n - \frac{1-j}{2} + \frac{h}{n\pi} + \frac{I_1\cos(n-\frac{1-j}{2})a}{2n\pi} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l^2. \tag{3.1.20}$$

Inverzni problem 3.1.2: Dati su spektri $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema M_j, $j=0,1$, odrediti potencijal $q(x)$ i granični parametar h.

Koristeći Teoremu 2.2.5 pomoću spektra $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema M_j, $j=0,1$, konstruišemo karakteristične funkcije $Z_j(\lambda)$.

Teorema 3.1.4. *Spektar $\{\mu_{n,0}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema M_0 jedinstveno određuje vrijednost integrala I_1 i parametra h.*

Dokaz. Koristeći spektar $\{\mu_{n,0}\}_{n\geq 1}$ možemo konstruisati $Z_0(\lambda)$, odnosno lijeva strana u (3.1.18) je poznata. Za $|\sin n_k a| > \delta > 0$ vrijedi, [yur4],

$$I_1 = 2\left(\lim_{n_k\to\infty}(-1)^{n_k+1}(\sin n_k a)^{-1}(Z_0(n_k^2) - (-1)^{n_k})n_k\right).$$

Slično, iz (3.1.18) dobijamo

$$h = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2n+1}{2}\right)Z_0\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right) - I_1\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)(\pi-a)\right)\right].$$

$\square$

Dalje, primijetimo da vrijedi:

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\Big(-\cos z(\pi-a)+\cos z(\pi-2t+a)\Big)dt &= \int_a^\pi q(t)\int_a^{2t-a}\sin z(\pi-s)dsdt\\ &= \int_a^{2\pi-a}\sin z(\pi-t)\int_{\frac{t+a}{2}}^\pi q(s_1)ds_1dt,\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{z}\int_a^\pi q(t)\Big(\sin z(\pi-a)-\sin z(\pi-2t+a)\Big)dt &= \int_a^\pi q(t)\int_a^{2t-a}\cos z(\pi-s)dsdt\\ &= \int_a^{2\pi-a}\cos z(\pi-t)\int_{\frac{t+a}{2}}^\pi q(s_1)ds_1dt.\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

Do prethodne transformacije se može doći i parcijalnom integracijom. Štaviše, u radovima [dju2], [pik4], [vla1], [voj1], [voj2], [yur3], [yur4] se koristi metod parcijalne integracije za

transformaciju sličnih integrala. Ipak, ispostavilo se da je prethodna transformacija mnogo jednostavnija, jer se samo koristi zamjena redoslijeda integracije.
U sljedećem stavu ćemo dati rješenje inverznog problema Šturm-Liuvilovog tipa uz Robin/Dirihleove granične uslove za kašnjenje $a \in [\pi/2, \pi)$.

Teorema 3.1.5. *Spektri $\{\mu_{n,0}\}_{n\geq 1}$ i $\{\mu_{n,1}\}_{n\geq 1}$ graničnih problema $M_0(q,h)$ i $M_1(q,h)$ jedinstveno određuju potencijal $q(x)$.*

Dokaz. Već smo dokazali da dva spektra jedinstveno određuju $Z_0(\lambda)$, $Z_1(\lambda)$, I_1 i h. Koristeći (3.1.18),(3.1.19),(3.1.21) i (3.1.22) dobijamo

$$G_0(z) = \int_a^{\pi} q(t)\sin z(\pi - 2t + a)dt + h\int_a^{2\pi-a} \sin z(\pi - t)\int_{\frac{t+a}{2}}^{\pi} q(s_1)ds_1 dt, \tag{3.1.23}$$

$$G_1(z) = \int_a^{\pi} q(t)\cos z(\pi - 2t + a)dt + h\int_a^{2\pi-a} \cos z(\pi - t)\int_{\frac{t+a}{2}}^{\pi} q(s_1)ds_1 dt, \tag{3.1.24}$$

gdje je

$$G_0(z) = 2zZ_0(\lambda) - 2z\cos z\pi - 2h\sin z\pi - \sin z(\pi - a)I_1,$$

$$G_1(z) = 2Z_1(\lambda) + 2z\sin z\pi - 2h\cos z\pi - \cos z(\pi - a)I_1.$$

Uvođenjem smjene $\pi - 2t + a = 2s$, odnosno $\pi - t = 2s$ u (3.1.23) i (3.1.24) dobijamo

$$G_0(z) = \int\limits_{\frac{-\pi+a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} q\left(\frac{\pi - 2s + a}{2}\right)\sin(2zs)ds + 2h\int\limits_{\frac{-\pi+a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} \sin(2zs)\int\limits_{\frac{\pi-2s+a}{2}}^{\pi} q(s_1)ds_1 ds, \tag{3.1.25}$$

$$G_1(z) = \int\limits_{\frac{-\pi+a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} q\left(\frac{\pi - 2s + a}{2}\right)\cos(2zs)ds + 2h\int\limits_{\frac{-\pi+a}{2}}^{\frac{\pi-a}{2}} \cos(2zs)\int\limits_{\frac{\pi-2s+a}{2}}^{\pi} q(s_1)ds_1 ds. \tag{3.1.26}$$

Uvrštavanjem $z = \dfrac{m\pi}{\pi - a}$, $m \in \mathbb{Z}$, zatim množenjem (3.1.25) sa $\dfrac{1}{\pi - a}\exp\left(\dfrac{2mi\pi x}{\pi - a}\right)$ i (3.1.26) sa $\dfrac{-i}{\pi - a}\exp\left(\dfrac{2mi\pi x}{\pi - a}\right)$, te sumiranjem dobijamo

$$f_2(x) = q\left(\frac{\pi - 2x + a}{2}\right) + 2h\int\limits_{\frac{\pi-2x+a}{2}}^{\pi} q(t)dt, \quad x \in \left(\frac{-\pi + a}{2}, \frac{\pi - a}{2}\right),$$

odnosno

$$f_2\left(\frac{\pi - 2x + a}{2}\right) = q(x) + 2h\int\limits_x^{\pi} q(t)dt, \quad x \in (a, \pi), \tag{3.1.27}$$

gdje je

$$f_2(x) = \frac{1}{\pi - a} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left(G_0\left(\frac{m\pi}{\pi - a}\right) - iG_1\left(\frac{m\pi}{\pi - a}\right)\right) \exp\left(\frac{2mi\pi x}{\pi - a}\right).$$

Jednačina (3.1.27) predstavlja Volterovu integralnu jednačinu drugog reda. Jedinstveno rješenje ove integralne jednačine postoji i ono je oblika

$$q(x) = f_2\left(\frac{\pi - 2x + a}{2}\right) - 2h \int_x^{\pi} f_2\left(\frac{\pi - 2t + a}{2}\right) \exp(2h(x - t))dt.$$

□

Napomena 3.1.6. Slične rezultate možemo dobiti za granične probleme P_j, $j = 0, 1$, generisane jednačinom (3.1.1) i Robinovim graničnim uslovima

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0,$$

gdje su H_j kompleksni brojevi i $H_1 \neq H_2$. Sopstvene vrijednosti $\{\rho_{n,j}\}_{n\geq 0}$ se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije $\delta_j(\lambda) = \Psi'(\pi, \lambda) + H_j\Psi(\pi, \lambda)$.
Inverzni problem je formulisan na sljedeći način: Dati su spektri $\{\rho_{n,j}\}_{n\geq 1}$, konstruisati potencijal $q(x)$ i koeficijente H_1, H_2 i h.
Koristeći (2.2.22) problem se svodi na problem sa Robin/Dirihleovim graničnim uslovima. Koeficijente H_1 i H_2 možemo odrediti na sličan način kao što smo odredili h.

3.2 Kašnjenje iz intervala $[2\pi/5, \pi/2)$

Posmatramo granični problem $\mathcal{L}_{0,j} = \mathcal{L}_{0,j}(q)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in [2\pi/5, \pi/2)$

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{3.2.1}$$

$$y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j = 0, 1, \tag{3.2.2}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(0, \pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0, a)$.

Neka je $Y(x, \lambda)$ rješenje jednačine (3.2.1) tako da zadovoljava početne uslove $Y(0, \lambda) = 0$, $Y'(0, \lambda) = 1$. Sopstvene vrijednosti od $\mathcal{L}_{0,j}$ se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije (2.2.1), odnosno

$$\Delta_{0,j}(\lambda) = Y^{(j)}(\pi, \lambda). \tag{3.2.3}$$

Na osnovu Teoreme 2.1.2 vrijedi

$$\begin{aligned} Y(x, \lambda) =& \frac{\sin zx}{z} + \frac{1}{z^2} \int_a^x q(t) \sin z(t-a) \sin z(x-t) dt \\ &+ \frac{1}{z^3} \int_{2a}^x \int_a^{t-a} q(t)q(t_1) \sin z(x-t) \sin z(t_1 - a) \sin z(t - a - t_1) dt_1 dt, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$\begin{aligned} Y'(x, \lambda) =& \cos zx + \frac{1}{z} \int_a^x q(t) \sin z(t-a) \cos z(x-t) dt \\ &+ \frac{1}{z^2} \int_{2a}^x \int_a^{t-a} q(t)q(t_1) \cos z(x-t) \sin z(t_1 - a) \sin z(t - a - t_1) dt_1 dt. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Koristeći (3.2.3),(3.2.4) i (3.2.5) dobijamo karakteristične funkcije:

$$\begin{aligned} \Delta_{0,0}(\lambda) =& \frac{\sin z\pi}{z} + \frac{1}{z^2} \int_a^\pi q(t) \sin z(t-a) \sin z(\pi-t) dt \\ &+ \frac{1}{z^3} \int_{2a}^\pi \int_a^{t-a} q(t)q(t_1) \sin z(\pi-t) \sin z(t_1 - a) \sin z(t - a - t_1) dt_1 dt, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{0,1}(\lambda) =& \cos z\pi + \frac{1}{z} \int_a^\pi q(t) \sin z(t-a) \cos z(\pi-t) dt \\ &+ \frac{1}{z^2} \int_{2a}^\pi \int_a^{t-a} q(t)q(t_1) \cos z(\pi-t) \sin z(t_1 - a) \sin z(t - a - t_1) dt_1 dt. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Spektralne osobine graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q)$, $j = 0, 1$, su opisane u Teoremi 2.2.2 odnosno sa (3.1.8).

Inverzni Problem 3.2.1: Neka je $a \in [2\pi/5, \pi/2)$. Dati su spektri $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$, za $j = 0, 1$, odrediti potencijal $q(x)$.

Iz Teoreme 2.2.3 nam je poznato da je karakteristična funkcija $\Delta_{0,j}(\lambda)$, $j = 0, 1$, jedinstveno određena spektrom $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$. Takođe, na osnovu Teoreme 3.1.1 možemo izračunati I_1 na osnovu spektralnih vrijednosti, pa je neophodno da transformišemo karakteristične jednačine (3.2.6) i (3.2.7). Za razliku od Inverznog problema 3.1.2 gdje smo koristili samo zamjenu redoslijeda integracije, ovdje ćemo ipak iskoristiti metod parcijalne integracije koji je prvobitno opisan radovima [bon1] i [pik4]. Uvodimo notaciju

$$I_2 = \int_{2a}^{\pi} q(t) \int_{a}^{t-a} q(s)dsdt.$$

Prvo transformišemo proizvod trigonometrijskih funkcija u zbir:

$$\begin{aligned} z^2\Delta_{0,0}(z) &= z\sin z\pi - \frac{\cos z(\pi-a)}{2}I_1 + \frac{1}{2}\int_a^{\pi} q(t)\cos z(\pi+a-2t)dt - \frac{\sin z(\pi-2a)}{4z}I_2 \\ &+ \frac{1}{4z}\int_{2a}^{\pi}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(\pi-2t_1)dt_1dt - \frac{1}{4z}\int_{2a}^{\pi}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(\pi-2t+2a)dt_1dt \\ &+ \frac{1}{4z}\int_{2a}^{\pi}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(\pi-2t+2t_1)dt_1dt. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned} z\Delta_{0,1}(z) &= z\cos z\pi + \frac{\sin z(\pi-a)}{2}I_1 - \frac{1}{2}\int_a^{\pi} q(t)\sin z(\pi-2t+a)dt - \frac{\cos z(\pi-2a)}{4z}I_2 \\ &+ \frac{1}{4z}\int_{2a}^{\pi}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\cos z(\pi-2t_1)dt_1dt - \frac{1}{4z}\int_{2a}^{\pi}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\cos z(\pi-2t+2a)dt_1dt \\ &+ \frac{1}{4z}\int_{2a}^{\pi}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\cos z(\pi-2t+2t_1)dt_1dt. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Mijenjajući redoslijed integracije dobijamo:

$$\int_{2a}^{\pi}\int_{a}^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(\pi-2t_1)dt_1dt = \int_{a}^{\pi-a} q(t_1)\sin z(\pi-2t_1)\int_{t_1+a}^{\pi} q(t)dtdt_1,$$

$$-\int_{2a}^{\pi}\int_{a}^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(\pi-2t+2a)dt_1dt = -\int_{a}^{\pi-a} q(t+a)\sin z(\pi-2t)\int_{a}^{t} q(t_1)dt_1dt,$$

$$\int_{2a}^{\pi}\int_{a}^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(\pi-2t+2t_1)dt_1dt = \int_{a}^{\pi-a} \sin z(\pi-2t_1)\int_{t_1+a}^{\pi} q(t)q(t-t_1)dtdt_1.$$

Uvodimo notaciju

$$K_0(t) = \begin{cases} q(t+a)\displaystyle\int_{a}^{t} q(s)ds - q(t)\int_{t+a}^{\pi} q(s)ds - \int_{t+a}^{\pi} q(s-t)q(s)ds, & t\in[a,\pi-a], \\ 0, & t\in[0,a)\cup(\pi-a,\pi]. \end{cases}$$

$$\widetilde{q}(t) = \begin{cases} q(t+\frac{a}{2}), & t\in[\frac{a}{2},\pi-\frac{a}{2}], \\ 0, & t\in(0,\frac{a}{2})\cup(\pi-\frac{a}{2},\pi). \end{cases}$$

$$\widetilde{a_c}(z) = \int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} \widetilde{q}(t)\cos z(\pi-2t)dt, \quad \widetilde{a_s}(z) = \int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} \widetilde{q}(t)\sin z(\pi-2t)dt,$$

$$k_{c,0}(z) = \int_{a}^{\pi-a} K_0(t)\cos z(\pi-2t)dt, \quad k_{s,0}(z) = \int_{a}^{\pi-a} K_0(t)\sin z(\pi-2t)dt.$$

Jasno je da funkcija $K_0(t)\in L^2[0,\pi]$. Iz (3.2.8) imamo

$$z^2\Delta_{0,0}(\lambda) = \sin z\pi + \frac{1}{2}\left(\widetilde{a_c}(z) - \cos z(\pi-a)I_1\right) - \frac{1}{4z}\left(k_{s,0}(z) + I_2\sin z(\pi-2a)\right), \quad (3.2.10)$$

dok iz (3.2.9) dobijamo

$$z\Delta_{0,1}(\lambda) = z\cos z\pi + \frac{1}{2}\left(-\widetilde{a_s}(z) + \sin z(\pi-a)I_1\right) - \frac{1}{4z}\left(k_{c,0}(z) + I_2\cos z(\pi-2a)\right). \quad (3.2.11)$$

Koristeći parcijalnu integraciju u (3.2.10) i (3.2.11) imamo

$$z^2\Delta_{0,0}(\lambda) = \sin z\pi + \frac{1}{2}\Bigg(\widetilde{a_c}(z) - \cos z(\pi-a)I_1\Bigg) + \frac{1}{2}K^*_{c,0}(z), \quad (3.2.12)$$

$$z\Delta_{0,1}(\lambda) = z\cos z\pi + \frac{1}{2}\Bigg(-\widetilde{a_s}(z) + \sin z(\pi-a)I_1\Bigg) - \frac{1}{2}K^*_{s,0}(z), \quad (3.2.13)$$

gdje je

$$K^*_{c,0}(z) = \int_a^{\pi-a} \cos z(\pi - 2t) \int_t^{\pi-a} K_0(s) ds dt, \quad K^*_{s,0}(z) = \int_a^{\pi-a} \sin z(\pi - 2t) \int_t^{\pi-a} K_0(s) ds dt.$$

Radi lakšeg računanja uvodimo notaciju

$$\begin{aligned} A_0(z) &= 2z^2\Delta_{0,0}(z) - 2z\sin z\pi + \cos z(\pi - a)I_1, \\ A_1(z) &= -2z\Delta_{0,1}(z) + 2z\cos z\pi + \sin z(\pi - a)I_1. \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

Funkcije $A_0(z)$ i $A_1(z)$ su jedinstveno određene spektrima $\{\lambda_{n,0}\}_{n\geq 1}$ i $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 1}$.
Iz (3.2.12) i (3.2.13) imamo:

$$A_0(z) = \widetilde{a}_c(z) + K^*_{c,0}(z), \quad A_1(z) = \widetilde{a}_s(z) + K^*_{s,0}(z).$$

Uvrštavajući $z = m$, $m \in \mathbb{Z}$, u (3.2.14) dobijamo:

$$(-1)^m A_0(m) = \int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} \widetilde{q}(t)\cos 2mt dt + \int_a^{\pi-a} \cos 2mt \int_t^{\pi-a} K_0(s) ds dt, \tag{3.2.15}$$

$$(-1)^{m+1} A_1(m) = \int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} \widetilde{q}(t)\sin 2mt dt + \int_a^{\pi-a} \sin 2mt \int_t^{\pi-a} K_0(s) ds dt. \tag{3.2.16}$$

Množeći (3.2.15) sa $\dfrac{1}{\pi}\exp 2imt$ i (3.2.16) sa $\dfrac{-i}{\pi}\exp(2imt)$ za $m \in \mathbb{Z}$, te sumiranjem dobijamo integralnu jednačinu

$$\widetilde{q}(t) + \int_t^{\pi-a} K_0(s) ds \ \mathbf{1}_{(a,\pi-a)}(t) = f(t), \quad t \in (\frac{a}{2}, \pi - \frac{a}{2}). \tag{3.2.17}$$

gdje je

$$f(t) = \frac{A_0(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^m \Big(A_0(m) + iA_1(m) \Big) \exp(2imt).$$

Prethodni postupak je detaljno opisan u radovima [dju2] i [dju3]. Za razliku od Furijeove baze $\{\exp(\frac{2mi\pi x}{\pi-a})\}_{m\in\mathbb{Z}}$ koju smo koristili u slučaju $a \in [\pi/2, \pi)$, ovdje koristimo bazu $\{\exp(2mix)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ na intervalu $[0, \pi]$. Isti postupak možemo primijeniti i za bazu $\{\exp(\frac{2mi\pi x}{\pi-a})\}_{m\in\mathbb{Z}}$ samo je potrebna mala modifikacija računa. Više o Furijeovim bazama nalazi se u [zyg1].
U sljedećoj teoremi ćemo dati rješenje Inverznog problema 3.2.1:

Teorema 3.2.1. *Neka je $a \in [2\pi/5, \pi/2)$. Spektri $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnih problema $\mathcal{L}_{0,j}$, $j = 0, 1$, jedinstveno određuju potencijal $q(x)$.*

Dokaz. Potencijal $q(x)$ zadovoljava integralnu jednačinu (3.2.17), pa uvodeći smjenu $t = x - a/2$ dobijamo

$$q(x) + \int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_0(s)ds \; \mathbf{1}_{(3a/2,\pi-a/2)}(x) = f\big(x - \frac{a}{2}\big), \quad x \in (a,\pi). \tag{3.2.18}$$

Posmatramo sljedeće slučajeve:

1. Za $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, integralna jednačina (3.2.18) se svodi na

$$q(x) = f\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

   Prema tome, potencijal je jedinstveno određen na intervalu $[a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$ skoro svuda.

2. Za $x \in (3a/2, \pi - a/2)$ potencijal $q(x)$ zadovoljava integralnu jednačinu (3.2.18). Uočimo da vrijedi

$$\int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_0(t)dt = \int_a^{x-\frac{a}{2}} q(t)dt \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(s)\,ds - \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q(t)\,dt \int_{x+t-\frac{a}{2}}^{\pi} q(s)\,ds. \tag{3.2.19}$$

   Prema tome integralnu jednačinu možemo zapisati u obliku

$$q(x) + \int_a^{x-\frac{a}{2}} q(t)dt \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(s)\,ds - \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q(t)\,dt \int_{x+t-\frac{a}{2}}^{\pi} q(s)\,ds = f(x - \frac{a}{2}). \tag{3.2.20}$$

   Kako je potencijal $q(x)$ poznat s.s. na intervalu $[a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, lako se može dokazati da je izraz

$$\int_a^{x-\frac{a}{2}} q(t)dt \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(s)\,ds - \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q(t)\,dt \int_{x+t-\frac{a}{2}}^{\pi} q(s)\,ds$$

   takođe poznat. Prema tome iz (3.2.20) možemo odrediti potencijal $q(x)$ s.s. na intervalu $(3a/2, \pi - a/2)$.

. □

Pored Furijeove baze, možemo koristiti i Risovu bazu da konstruišemo integralnu jednačinu (3.2.17). Odnosno, da bismo odredili potencijal $q(x)$ dovoljni su nam podspektri, [but4]. Ovaj metod je mnogo efikasniji za određivanja potencijala. Važna prednost je u tome da ne trebamo konstruisati karakteristične funkcije, već uvrštavamo njene nule u jednačinama

(3.2.12) i (3.2.13).

Robin/Dirihleovi granični uslovi. Umjesto Dirihle/Nojmanovih graničnih uslova isti problem možemo posmatrati sa Robin/Dirihleovim graničnim uslovima. Odnosno, posmatramo granični problem $M_j = M_j(q,h)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in [\pi/2, \pi)$

$$\begin{aligned} -y''(x) + q(x)y(x-a) &= \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \\ y'(0) - hy(0) = y^{(j)}(\pi) &= 0, \;\; j \in \{0,1\} \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(a,\pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0,a)$.

Inverzni problem 3.2.2: Neka je $a \in [2\pi/5, \pi/2)$. Dati su spektri $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$, graničnog problema $M_j(q,h)$, $j = 0,1$, odrediti potencijal $q(x)$ i granični parametar h.

Na osnovu Teoreme 3.1.3 možemo odrediti vrijednost integrala I_1 i parametra h. Koristeći spektre $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$, $j = 0,1$, na osnovu Teoreme 2.2.3 možemo konstruisati karakteristične funkcije $Z_0(\lambda)$ i $Z_1(\lambda)$. Iz (2.2.14) dobijamo, [pik4],

$$\begin{aligned} Z_0(\lambda) =& \cos z\pi + \frac{h\sin z\pi}{z} + \frac{1}{2z}\sin z(\pi-a)I_1 + \frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-2t+a)dt \\ &-\frac{h}{2z^2}\cos z(\pi-a)I_1 + \frac{h}{2z^2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-2t+a)dt \\ &-\frac{1}{4z^2}\Big(I_2\cos z(\pi-2a) - k_{c,0}(z)\Big) - \frac{h}{4z^3}\Big(I_2\sin z(\pi-2a) + k_s^1(z)\Big), \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

$$\begin{aligned} Z_1(\lambda) =& -z\sin z\pi + h\cos z\pi + \frac{1}{2}\cos z(\pi-a)I_1 + \frac{1}{2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi-2t+a)dt \\ &+\frac{h}{2z}\sin z(\pi-a)I_1 - \frac{h}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi-2t+a)dt \\ &-\frac{1}{4z}\Big(I_2\sin z(\pi-2a) - k_{s,0}(z)\Big) - \frac{h}{4z^2}\Big(I_2\cos z(\pi-2a) + k_c^1(z)\Big), \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

gdje su, za $j = 0,1$,

$$k_{s,j}(z) = \int_a^{\pi-a} K_j(t)\sin z(\pi-2t)dt,$$

$$k_{c,j}(z) = \int_a^{\pi-a} K_j(t)\cos z(\pi-2t)dt,$$

$$K_j(t) = \begin{cases} 0, & t\in[0,a), \\ q(t+a)\displaystyle\int_a^t q(s)ds - q(t)\int_{t+a}^\pi q(s)ds - (-1)^j\int_{t+a}^\pi q(s-t)q(s)ds, & t\in[a,\pi-a], \\ 0, & t\in(\pi-a,\pi]. \end{cases} \tag{3.2.24}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\frac{1}{4z^2}\Big(I_2\sin z(\pi-2a)+k_s^1(z)\Big)=\int_a^{\pi-a}\sin z(\pi-2t)\int_t^{\pi-a}\int_s^{\pi-a}K_1(\tau)d\tau dsdt, \quad (3.2.25)$$

$$\frac{1}{4z^2}\Big(I_2\cos z(\pi-2a)+k_c^1(z)\Big)=\int_a^{\pi-a}\cos z(\pi-2t)\int_t^{\pi-a}\int_s^{\pi-a}K_1(\tau)d\tau dsdt, \quad (3.2.26)$$

pri čemu smo koristili da je

$$\int_a^{\pi-a}(s-a)K_1(s)ds=0.$$

Koristeći (3.2.22), (3.2.23), (3.2.25), (3.2.26) dobijamo

$$\begin{aligned}G_0(z)&=\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}q\big(t+\frac{a}{2}\big)\sin z(\pi-2t)dt-h\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\sin z(\pi-2t)\int_{t+\frac{a}{2}}^{\pi}q(s_1)ds_1dt\\&+\int_a^{\pi-a}\sin z(\pi-2t)\int_t^{\pi-a}K_0(s)dsdt+2h\int_a^{\pi-a}\sin z(\pi-2t)\int_t^{\pi-a}\int_s^{\pi-a}K_1(\tau)d\tau dsdt\end{aligned} \quad (3.2.27)$$

$$\begin{aligned}G_1(z)&=\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}q\big(t+\frac{a}{2}\big)\cos z(\pi-2t)dt+2h\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\cos z(\pi-2t)\int_{t+\frac{a}{2}}^{\pi}q(s_1)ds_1dt\\&+\int_a^{\pi-a}\cos z(\pi-2t)\int_t^{\pi-a}K_0(s)dsdt-h\int_a^{\pi-a}\cos z(\pi-2t)\int_t^{\pi-a}\int_s^{\pi-a}K_1(\tau)d\tau dsdt\end{aligned} \quad (3.2.28)$$

gdje je

$$G_0(z)=2zZ_0(\lambda)-2z\cos z\pi-2h\sin z\pi-\sin z(\pi-a)I_1,$$

$$G_1(z)=2Z_1(\lambda)+2z\sin z\pi-2h\cos z\pi-\cos z(\pi-a)I_1.$$

Koristeći metode Furijeove analize detaljno opisane za konstrukciju integralne jednačine (3.2.17) dobijamo integralnu jednačinu, za $t\in(a/2,\pi-a/2)$,

$$\begin{aligned}q(t+\frac{a}{2})+2h\int_{t+\frac{a}{2}}^{\pi}q(s)ds+\Big(\int_t^{\pi-a}K_0(s)ds\Big)\mathbf{1}_{(a,\pi-a)}(t)&\\+\Big(2h\int_t^{\pi-a}\int_s^{\pi-a}K_1(\tau)d\tau ds\Big)\mathbf{1}_{(a,\pi-a)}(t)&=f(t)\end{aligned}$$

odnosno, za $x\in(a,\pi)$,

$$\begin{aligned}q(x)+2h\int_x^{\pi}q(s)ds\mathbf{1}_{(a,\pi)}(x)+\Big(\int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a}K_0(s)ds\Big)\mathbf{1}_{(3a/2,\pi-a/2)}(x)&\\+\Big(2h\int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a}\int_s^{\pi-a}K_1(\tau)d\tau ds\Big)\mathbf{1}_{(3a/2,\pi-a/2)}(x)&=f(x-\frac{a}{2}).\end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Teorema 3.2.2. *Neka je kašnjenje $a \in [2\pi/5, \pi/2)$. Spektri $\{\mu_{n,0}\}_{n\geq 1}$ i $\{\mu_{n,1}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $M_j(q,h)$, $j = 0, 1$, jedinstveno određuju potencijal $q(x)$ i parametar h.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.1.4 parametar h i vrijednost I_1 su jedinstveno određeni spektrom $\{\mu_{n,0}\}_{n\geq 1}$. Dalje, posmatramo sljedeće slučajeve:

1. Za $x \in [\pi - a/2, \pi]$, integralna jednačina (3.2.29) se svodi na Volterovu integralnu jednačinu
$$q(x) + 2h \int_x^\pi q(s)ds = f\left(x - \frac{a}{2}\right),$$
koja ima jedinstveno rješenje.

2. Za $x \in [a, 3a/2]$, iz (3.2.29) dobijamo Volterovu integralnu jednačinu
$$q(x) - 2h \int_a^x q(s)ds = f\left(x - \frac{a}{2}\right) - 2hI_1,$$
odakle možemo izračunati $q(x)$.

3. Za $x \in [3a/2, \pi - a/2]$ integralna jednačina (3.2.29) se svodi na
$$q(x) + 2h \int_x^\pi q(s)ds + \int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_0(s)ds + 2h \int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} \int_s^{\pi-a} K_1(\tau)d\tau ds = f\left(x - \frac{a}{2}\right),$$
pri čemu su integrali $\int\limits_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_0(s)ds$, $\int\limits_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} \int\limits_s^{\pi-a} K_1(\tau)d\tau ds$ poznati, jer je potencijal $q(x)$ poznat na intervalu $[a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$. Prema tome posljednja integralna jednačina je Volterova integralna jednačina, odakle možemo izračunati potencijal $q(x)$ na intervalu $[3a/2, \pi - a/2]$.

□

Prethodna teorema je dokazana u radu [pik4] uz pretpostavku da je poznata vrijednost integrala $I_2 = \int_a^{\pi-a} q(t) \int_{t+a}^\pi q(s)dsdt$. Ipak, zahvaljujući (3.2.25) i (3.2.26) dobili smo jednostavniji oblik integralne jednačine, koja je u našem slučaju zapisana sa (3.2.29). Prema tome, pomenuta pretpostavka je suvišna.

3.3 Inverzni problem sa početnom funkcijom

Posmatramo granični problem $N_j = N_j(q, a)$, $j = 0, 1$,

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; x \in (0, \pi). \tag{3.3.1}$$

sa graničnim uslovima

$$y'(0) - hy(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \tag{3.3.2}$$

$$y(x-a) \equiv y(0)\varphi(x), \;\; x \in [0, a], \tag{3.3.3}$$

gdje je potencijal $q(x) \in L^2(0, \pi)$ kompleksna funkcija, $\varphi(x) \in C[0, a]$ i kašnjenje $a \in [\pi/2, \pi)$. Spektralne osobine ovog problema smo posmatrali u poglavlju 2.3. U nastavku posmatramo inverzni problem koji je forumilsan na sljedeći način

Inverzni problem 3.3.1 Neka je $a \in [\pi/2, \pi)$ i neka je $\varphi(x)$ poznata funkcija na intervalu $[0, a]$. Dati su spektri $\{\nu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $N_j(q)$, $j = 0, 1$, odrediti $q(x)$.

Već smo ranije dokazali da su karakteristične funkcije $d_0(\lambda)$ i $d_1(\lambda)$ jedinstveno određene iz datih spektara. Iz jednačina (2.3.7) i (2.3.8) dobijamo

$$\begin{aligned} d_0(\lambda) =& \cos z\pi + \frac{h \sin z\pi}{z} + \frac{1}{z}\int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(2t)q(2t)\sin z(\pi - 2t)dt + \frac{1}{2z}I_1 \sin z(\pi - a) \\ &+ \frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi - 2t + a)dt - \frac{h}{2z^2}\cos z(\pi - a)I_1 + \frac{h}{2z^2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi - 2t + a)dt \\ &+ \frac{1}{2z^2}\int_a^\pi q(t)\int_0^{t-a} \varphi(s)q(s)\Big(\cos z(\pi - 2t + a + s) - \cos z(\pi - a - s)\Big)dsdt, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

$$\begin{aligned} d_1(\lambda) =& -z\sin z\pi + h\cos z\pi + \int_0^{\frac{a}{2}} \varphi(2t)q(2t)\cos z(\pi - 2t)dt + \frac{1}{2}I_1 \cos z(\pi - a) \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^\pi q(t)\cos z(\pi - 2t + a)dt + \frac{h}{2z}\sin z(\pi - a)I_1 - \frac{h}{2z}\int_a^\pi q(t)\sin z(\pi - 2t + a)dt \\ &+ \frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\int_0^{t-a} \varphi(s)q(s)\Big(-\sin z(\pi - 2t + a + s) + \sin z(\pi - a - s)\Big)dsdt. \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Primijetimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\int_0^{t-a}\varphi(s)q(s)\Big(\cos z(\pi-2t+a+s)-\cos z(\pi-a-s)\Big)dsdt\\
&=\int_a^\pi q(t)\int_0^{t-a}\varphi(s)q(s)\int_{\frac{a+s}{2}}^{t-\frac{a}{2}-\frac{s}{2}}\sin z(\pi-2x)dxdsdt\\
&=\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin z(\pi-2x)R_0(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\sin z(\pi-2x)R_1(x)dx,
\end{aligned}
\tag{3.3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2z}\int_a^\pi q(t)\int_0^{t-a}\varphi(s)q(s)\Big(-\sin z(\pi-2t+a+s)+\sin z(\pi-a-s)\Big)dsdt\\
&=\int_a^\pi q(t)\int_0^{t-a}\varphi(s)q(s)\int_{\frac{a+s}{2}}^{t-\frac{a}{2}-\frac{s}{2}}\sin z(\pi-2x)dxdsdt\\
&=\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos z(\pi-2x)R_0(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\cos z(\pi-2x)R_1(x)dx,
\end{aligned}
\tag{3.3.7}
$$

gdje su

$$R_0(x)=\int_{2x}^{\pi}q(t)\int_0^{2x-a}q(s)\varphi(s)dsdt+\int_{x+\frac{a}{2}}^{2x}q(t)\int_0^{2t-2x-a}q(s)\varphi(s)dsdt,$$

$$R_1(x)=\int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi}q(t)\int_0^{2t-2x-a}\varphi(s)q(s)dsdt.$$

Prema tome, koristeći (3.3.6),(3.3.7), (3.1.21) i (3.1.22) karakteristične funkcije možemo zapisati

$$
\begin{aligned}
H_0(z)=&\int_0^{\frac{a}{2}}\varphi(2t)q(2t)\sin z(\pi-2t)dt+\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}q(t)\sin z(\pi-2t)dt\\
&+h\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\sin z(\pi-2t)\int_{t+\frac{a}{2}}^{\pi}q(s_1)ds_1dt\\
&+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin z(\pi-2x)R_0(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\sin z(\pi-2x)R_1(x)dx,
\end{aligned}
\tag{3.3.8}
$$

$$
\begin{aligned}
H_1(z)=&\int_0^{\frac{a}{2}}\varphi(2t)q(2t)\cos z(\pi-2t)dt+\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}q(t+\frac{a}{2})\cos z(\pi-2t)dt\\
&+h\int_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\cos z(\pi-2t)\int_{t+\frac{a}{2}}^{\pi}q(s_1)ds_1dt\\
&+\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos z(\pi-2x)R_0(x)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}}\cos z(\pi-2x)R_1(x)dx,
\end{aligned}
\tag{3.3.9}
$$

gdje su

$$H_0(z)=2zd_0(\lambda)-2z\cos z\pi-2h\sin z\pi-I_1\sin z(\pi-a),$$

$$H_1(z) = 2d_1(\lambda) + 2z\sin z\pi - 2h\cos z\pi - I_1\cos z(\pi - a).$$

Uvrštavajući $z = m$, $m \in \mathbb{Z}$, zatim množeći (3.3.8) sa $\dfrac{-i}{\pi}\exp(2imt)$ i (3.3.9) sa $\dfrac{i}{\pi}\exp(2imt)$, te sumirajući dobijamo, za $x \in [0, \pi - a/2]$,

$$\begin{aligned} f(x) =& q(2x)\varphi(2x)\mathbf{1}_{[0,a/2)}(x) + q(x + \frac{a}{2})\mathbf{1}_{[a/2,\pi-a/2)}(x) + 2h\int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(t)dt\mathbf{1}_{[a/2,\pi-a/2]}(x) \\ &+R_0(x)\mathbf{1}_{[a/2,\pi/2]}(x) + R_1(x)\mathbf{1}_{[\pi/2,\pi-a/2)}(x), \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

gdje je

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^m}{\pi}\Big(iH_0(m) + H_1(m)\Big)\exp(2imx).$$

Teorema 3.3.1. *Potencijal $q(x)$ je jedinstveno određen spektrima $\{\nu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnih problema N_j, $j = 0, 1$.*

Dokaz. Prethodnim postupkom možemo konstruisati integralnu jednačinu (3.3.10) koju potencijal $q(x)$ mora da zadovolji.

1. Za $x \in [0, a/2)$ integralna jednačina se svodi na

$$f(x) = q(2x)\varphi(2x), \tag{3.3.11}$$

odakle možemo odrediti $q(x)$, $x \in [0, a)$.

2. Za $x \in [\pi/2, \pi - a/2]$ integralna jednačina se svodi na Volterovu integralnu jednačinu

$$f(x) = q\big(x + \frac{a}{2}\big) + 2h\int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(t)dt + \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(t)\int_0^{2t-2x-a}\varphi(s)q(s)dsdt, \tag{3.3.12}$$

gdje je $2h + \int_0^{2t-2x-a}\varphi(s)q(s)ds$ poznato i predstavlja jezgro Volterovog integralnog operatora. Iz (3.3.12) određujemo potencijal $q(x)$, $x \in [\pi/2 + a/2, \pi)$.

3. Za $x \in [a/2, \pi/2)$ integralna jednačina se svodi na Volterovu integralnu jednačinu

$$f(x) - \int_{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}}^{\pi} q(t)R_2(x,t)dt = q\big(x + \frac{a}{2}\big) + \int_{x+\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{2}} q(t)R_2(x,t)dt, \tag{3.3.13}$$

gdje je

$$R_2(x,t) = 2h + \int_0^{2x-a}\varphi(s)q(s)ds\mathbf{1}_{[2x,\pi)}(t) + \int_0^{2t-2x-a}\varphi(s)q(s)ds\mathbf{1}_{[x+a/2,2x]}(t),$$

pri čemu je lijeva strana u (3.3.13) poznata. Integralna jednačina (3.3.13) ima jedinstveno rješenje, prema tome možemo izračunati potencijal $q(x)$, $x \in (a, \pi/2 + a/2)$.

□

3.4 Nekompletni inverzni problemi

Posmatramo granični problem $\mathcal{L}_{\nu,j} = \mathcal{L}_{\nu,j}(q)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$

$$ly := -y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{3.4.1}$$

$$y^{(\nu)}(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j = 0, 1, \;\; \nu = 0, 1, \tag{3.4.2}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(0,\pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0, a)$.
Za $\nu = 0$ dobijamo Dirihle/Nojmanove granične uslove odnosno granični problem $\mathcal{L}_{0,j}(q)$, ovaj slučaj ćemo još nazivati *Slučaj 1.* Za $\nu = 1$ dobijamo Robin/Dirihleove granične uslove pri čemu je parametar $h = 0$, odnosno $\mathcal{L}_{1,j}(q) := M_j(q, 0)$, ovaj slučaj ćemo još nazivati *Slučaj 2.* Zbog praktičnih razloga ćemo koristiti sljedeće oznake za karakteristične funkcije graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}$, $j = 0, 1$,

$$\Delta_{1,j}(\lambda) := Z_j(\lambda).$$

Neka su $Y(x, \lambda)$, $W(x, \lambda)$ rješenja od (3.4.1) sa graničnim uslovoma

$$Y(0, \lambda) = 0, \;\; Y'(0, \lambda) = 1,$$
$$W(0, \lambda) = 1, \;\; W'(0, \lambda) = 0.$$

Koristeći Teoremu 2.1.2 i Teoremu 2.1.3 dobijamo

$$\begin{aligned} Y(x,\lambda) = {} & \frac{\sin zx}{z} + \frac{1}{z^2}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\sin z(x-t)dt \\ & + \frac{1}{z^3}\int_{2a}^{x}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\sin z(x-t)\sin z(t_1-a)\sin z(t-a-t_1)dt_1dt, \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

odnosno

$$\begin{aligned} W(x,\lambda) = {} & \cos zx + \frac{1}{z}\int_a^x q(t)\sin z(t-a)\cos z(x-t)dt \\ & + \frac{1}{z^2}\int_{2a}^{x}\int_a^{t-a} q(t)q(t_1)\cos z(x-t)\sin z(t_1-a)\sin z(t-a-t_1)dt_1dt, \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Na osnovu (2.2.1) i (2.2.14) dobijamo karakteristične funkcije graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q)$, $j = 0, 1$,

$$\Delta_{0,j}(\lambda) = Y^{(j)}(\pi, \lambda), \tag{3.4.5}$$

odnosno graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}(q)$, $j = 0, 1$,

$$\Delta_{1,j}(\lambda) = W^{(j)}(\pi, \lambda). \tag{3.4.6}$$

Na osnovu (3.2.12) i (3.2.13), karakteristične funkcije graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}$ date sa (3.4.5) možemo zapisati u obliku

$$\Delta_{0,0}(\lambda) = \frac{1}{z}\sin z\pi + \frac{1}{2z}\left(\widetilde{a_c}(z) - \cos z(\pi - a)I_1\right) + \frac{1}{2z}K^*_{c,0}(z), \tag{3.4.7}$$

$$\Delta_{1,0}(\lambda) = \cos z\pi + \frac{1}{2}\left(-\widetilde{a_s}(z) + \sin z(\pi - a)I_1\right) - \frac{1}{2}K^*_{s,0}(z), \tag{3.4.8}$$

gdje je, za $\nu = 0, 1$,

$$\widetilde{a_c}(z) = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} \widetilde{q}(t)\cos z(\pi - 2t)dt, \quad \widetilde{a_s}(z) = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} \widetilde{q}(t)\sin z(\pi - 2t)dt,$$

$$K^*_{c,\nu}(z) = \int\limits_{a}^{\pi-a} \cos z(\pi - 2t)\int\limits_{t}^{\pi-a} K_\nu(s)dsdt, \quad K^*_{s,\nu}(z) = \int\limits_{a}^{\pi-a} \sin z(\pi - 2t)\int\limits_{t}^{\pi-a} K_\nu(s)dsdt,$$

pri čemu je $K_\nu(t)$ dato sa (3.2.24).

Koristeći metode Furijeove analize iz (3.4.7) i (3.4.8) možemo konstruisati integralnu jednačinu

$$q(x) + \left(\int\limits_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_0(s)ds\right)\mathbf{1}_{(3a/2,\pi-a/2)}(x) = f_0(x - \frac{a}{2}), \quad x \in (a, \pi). \tag{3.4.9}$$

gdje je

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{A_0(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}(-1)^m\Big(A_0(m) + iA_1(m)\Big)\exp(2imt), \\ A_0(z) &= 2z^2\Delta_{0,0}(z) - 2z\sin z\pi + \cos z(\pi - a)I_1, \\ A_1(z) &= -2z\Delta_{0,1}(z) + 2z\cos z\pi + \sin z(\pi - a)I_1. \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Slično, na osnovu (3.2.26),(3.2.27), karakteristične funkcije graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}$ date sa (3.4.6) možemo zapisati u obliku

$$\Delta_{0,1}(\lambda) = \cos z\pi + \frac{1}{2z}\left(\widetilde{a_s}(z) - \sin z(\pi - a)I_1\right) + \frac{1}{2z}K^*_{s,1}(z), \tag{3.4.11}$$

$$\Delta_{1,1}(\lambda) = -z\sin z\pi + \frac{1}{2}\left(\widetilde{a_c}(z) + \cos z(\pi - a)I_1\right) + \frac{1}{2}K^*_{c,1}(z). \tag{3.4.12}$$

Koristeći Furijeove koeficijente iz (3.4.11) i (3.4.12) možemo konstruisati integralnu jednačinu

$$q(x) + \int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_1(s)ds \ \mathbf{1}_{(3a/2,\pi-a/2)}(x) = f_1(x-\frac{a}{2}), \quad x \in (a,\pi). \tag{3.4.13}$$

gdje su

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{B_0(0)}{\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (-1)^m \Big(iB_0(m) + B_1(m) \Big) \exp(2imt), \\ B_0(z) &= 2z\Delta_{0,1}(\lambda) - 2z\cos z\pi - \sin z(\pi-a) I_1, \\ B_1(z) &= 2\Delta_{1,1}(\lambda) + 2z\sin z\pi - \cos z(\pi-a) I_1. \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Uvodimo notaciju

$$q_1(x) = q(x),\ x \in (a,\pi-a), \quad q_2(x) = q(x),\ x \in (2a,\pi),$$
$$I_2 = \int_{2a}^{\pi} q(t) \int_{a}^{t-a} q(s)dsdt.$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} \int_a^{x-\frac{a}{2}} K_0(s)ds = &\int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} q_2\,(t+a) \int_a^{t-a} q_1(s)dsdt \\ &- \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1\,(t) \int_{t+a}^{\pi} q_2(s)dsdt - \int_a^{x-\frac{a}{2}} \int_{t+a}^{\pi} q_1\,(s-t)\, q_2(s)dsdt. \end{aligned}$$

Zamjenom redoslijeda integracije dobijamo

$$\begin{aligned} \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_2\,(t+a) \int_a^{t} q_1(s)dsdt &= \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1\,(s) \int_s^{x-\frac{a}{2}} q_2(t+a)dtds \\ - \int_a^{x-\frac{a}{2}} \int_{t+a}^{\pi} q_1\,(s-t)\, q_2(s)dsdt &= - \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_2(s+t)dtds \\ &\quad - \int_{\pi-x+\frac{a}{2}}^{\pi-a} q_1(s) \int_a^{\pi-s} q_2(s+t)dtds. \end{aligned}$$

Koristeći prethodne rezultate i uvodeći smjenu dobijamo

$$\begin{aligned}\int_a^{x-\frac{a}{2}} K_0(s)\,ds &= \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1(s) \int_s^{x-\frac{a}{2}} q_2(t+a)dtds - \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{s+a}^{\pi} q_2(t)dtds \\ &- \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_2(s+t)dtds - \int_{\pi-x+\frac{a}{2}}^{\pi-a} q_1(s) \int_a^{\pi-s} q_2(s+t)dtds \\ &= -\int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds - I_2 + \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{s+x-\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds.\end{aligned}$$

Konačno, dolazimo do zaključka da je za $\nu = 0, 1$,

$$Q_\nu(x) := \int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} K_\nu(s)\,ds = \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds - (-1)^\nu \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{s+x-\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds, \tag{3.4.15}$$

pri čemu smo koristili

$$\int_a^{\pi-a} K_\nu(s)ds = -(-1)^\nu I_2.$$

U nastavku za fiksirano $\nu \in \{0, 1\}$, posmatramo sljedeći inverzni problem:

Inverzni problem 3.4.1 Neka je $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$. Dati su spektri $\{\lambda_{n,j}^\nu\}_{n\geq 1}$ graničnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q)$, $j = 0, 1$. Odrediti potencijal $q(x)$ ako je funkcija $q(x)$ poznata na intervalu $(\pi/2 + a/4, \pi - a)$, kao i integral $\int\limits_{\pi/2+a/4}^{\pi-a} q(t)dt$.

Već smo ranije dokazali da iz spektara $\{\lambda_{n,j}^\nu\}_{n\geq 1}$ možemo odrediti karakteristične funkcije $\Delta_{\nu,j}(\lambda)$, $j = 0, 1$. Takođe, na osnovu Teoreme 3.1.1 ili Teoreme 3.1.3 možemo odrediti vrijednost integrala I_1. Koristeći karakteristične funkcije $\Delta_{\nu,j}(\lambda)$ graničnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q)$ na osnovu (3.4.9),(3.4.13) i (3.4.15) možemo konstruisati integralnu jednačinu

$$q(x) + Q_\nu(x)\ \mathbf{1}_{(3a/2,\pi-a/2)}(x) = f_\nu(x - \frac{a}{2}), \quad x \in (a, \pi). \tag{3.4.16}$$

Označimo sa $\{\lambda_{n,j}^\nu\}_{n\geq 1}$ sopstvene vrijednosti graničnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q)$, $j = 0, 1$, $\nu = 0, 1$.

Teorema 3.4.1. *Neka je kašnjenje $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ i neka je $\nu \in \{0, 1\}$ fiksirano. Spektri $\{\lambda_{n,j}^\nu\}_{n\geq 1}$ graničnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q)$, $j = 0, 1$, jedinstveno određuju potencijal $q(x)$ na skupu $[a, 3a/2] \cup [\pi - a, 2a] \cup [\pi - a/2, \pi]$.*

Dokaz. Fiksirajmo $\nu \in \{0,1\}$. Potencijal $q(x)$ zadovoljava integralnu jednačinu (3.4.16), pa posmatramo sljedeće slučajeve:

1. Za $x \in [a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$, integralna jednačina (3.4.16) ima oblik:

$$q(x) = f_\nu\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

   Kako je funkcija $f(x)$ jedinstveno određena spektrima $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$, zaključujemo da je potencijal $q(x)$ jedinstveno određen na skupu $[a, 3a/2] \cup [\pi - a/2, \pi]$.

2. Za $x \in [\pi - a, 2a]$ integralna jednačina (3.4.16) ima oblik

$$q(x) + \int_a^{x-\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds - (-1)^\nu \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) \int_{s+x-\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds = f_\nu(x - \frac{a}{2})$$

   Kako je potencijal $q_2(t)$ poznat za $t \in [\pi - a/2, \pi]$, integrali $\int\limits_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dt$ i $\int\limits_{s+x-\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dt$ su poznati za $x \in [\pi - a, 2a]$. Takođe, kada $x \in [\pi - a, 2a]$, funkcija $q_1(s)$ je poznata za $s \in [3a/2, \pi - x + a/2)$ kao i funkcija $q_1(s)$ za $s \in [3a/2, x - a/2)$. Prema tome, za $x \in [\pi - a, 2a]$, integrali $\int\limits_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) \int\limits_{s+x-a}^{\pi} q_2(t)dtds$ i $\int\limits_a^{x-\frac{a}{2}} q_1(s) \int\limits_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds$ su poznati. Konačno, potencijal $q(x)$ je jedinstveno određen s.s. na skupu $[\pi - a, 2a]$ spektrima $\{\lambda_{n,j}^\nu\}_{n\geq 1}$, $j = 0, 1$.

□

Dokazali smo da dva spektra jedinstveno određuju potencijal s.s. na intervalu $[a, 3a/2] \cup [\pi - a, 2a] \cup [\pi - a/2, \pi]$. Sa ciljem da riješimo Inverzni problem 3.4.1, izvršićemo sređivanje integralne jednačine (3.4.16) na intervalu $(3a/2, \pi - a) \cup (2a, \pi - a/2)$. Neka je $\nu \in \{0,1\}$, fiksirano. Iskoristićemo prethodni slučaj i sve što je poznato prebaciti na desnu stranu jednačine (3.4.16). Za $x \in (3a/2, \pi - a)$, integralnu jednačinu (3.4.16) transformišemo u sljedeću jednačinu

$$q_1(x) + \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} q_2(s) H_1(s,x)ds - (-1)^\nu \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s) H_2(s + x - \frac{a}{2})ds = F_{0,\nu}(x) \qquad (3.4.17)$$

gdje su sljedeće funkcije poznate

$$F_{0,\nu}(x) = f(x-\frac{a}{2}) + \int_{x+a}^{\pi} q_2(t)\int_{x-\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} q_1(s)dsdt + (-1)^{\nu}\int_{\pi-\frac{a}{2}}^{x+a} q_2(t)\int_{x-\frac{a}{2}}^{t-x+\frac{a}{2}} q_1(s)dsdt,$$

$$H_1(s,x) = \int_{a}^{x-\frac{a}{2}} q_1(t)dt - (-1)^{\nu}\int_{a}^{s-x+\frac{a}{2}} q_1(t)dt, \quad H_2(s+x-\frac{a}{2}) = \int_{s+x-\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dt.$$

Za $x \in (2a, \pi-\frac{a}{2})$, iz (3.4.16) dobijamo

$$q_2(x) + H_2(x+\frac{a}{2})\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} q_1(s)\,ds = F_{1,\nu}(x), \tag{3.4.18}$$

gdje su $H_2(x+\frac{a}{2}) = \int\limits_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dt$ i $F_{1,\nu}(x)$ poznati, pri čemu je

$$F_{1,\nu}(x) = f\left(x-\frac{a}{2}\right) + (-1)^{\nu}\int_{a}^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s)\int_{s+x-\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds - \int_{a}^{\frac{3a}{2}} q_1(s)\int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q_2(t)dtds.$$

Već smo dokazali da su $I_1 = \int_a^{\pi} q(s)ds$ i $q(x)$ za $x \in [0,3a/2)\cup(\pi-a,2a)\cup(\pi-a/2,\pi)$ poznati, iz čega slijedi da je izraz $\int_{3a/2}^{\pi-a} q(s)ds + \int_{2a}^{\pi-a/2} q(s)ds$ poznata funkcija . Pretpostavimo da je vrijednost integrala $\int_{3a/2}^{\pi-a} q(s)ds$ poznata, tada iz (3.4.17) dobijamo

$$q_2(x) - H_2(x+\frac{a}{2})\int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a} q_1(s)\,ds = F_{2,\nu}(x), \tag{3.4.19}$$

gdje je $F_{2,\nu}(x) = F_{1,\nu}(x) - H_2(x+\frac{a}{2})\int\limits_{\frac{3a}{2}}^{\pi-a} q_1(s)\,ds.$

Teorema 3.4.2. *Pretpostavimo da je potencijal $q(x)$ poznat na skupu $(3a/2, \pi/2+a/4)$, kao i vrijednost integrala $\int\limits_{\pi/2+a/4}^{\pi-a} q(s)ds$, tada spektri $\{\lambda_{n,j}^{\nu}\}_{n\geq 1}$ graničnih spektralnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q,a), j=0,1,$ jedinstveno određuju potencijal $q(x)$ na skupu $[a,\pi]$.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.4.1 potencijal $q(x)$ je jedinstveno određen $[0,3a/2]\cup[\pi-a,2a]\cup$

$[\pi - a/2, \pi]$. Iz (3.4.18) i (3.4.19) dobijamo integralnu jednačinu, za $x \in (3a/2, \pi - a)$,

$$\begin{aligned} q_1(x) + \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} H_2(s+\frac{a}{2}) \int_{s-\frac{a}{2}}^{\pi-a} q_1(t)\, dt H_1(s,x)ds + \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} F_{2,\nu}(s)H_1(s,x)ds \\ -(-1)^{\nu} \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s)\, H_2(s+x-\frac{a}{2})ds = F_{0,\nu}(x) \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Kako je $q(x)$ poznata funkcija na intervalu $x \in (3a/2, \pi/2 + a/4)$, iz (3.4.20) dobijamo Volterovu integralnu jednačinu za $x \in (\pi/2 + a/4, \pi - a)$

$$q_1(x) + \int_{x}^{\pi-a} q_1(t)\, H_3(t,x)dt = F_{3,\nu}(x), \tag{3.4.21}$$

pri čemu su sljedeće funkcije poznate

$$F_{3,\nu}(x) = F_{0,\nu}(x) + (-1)^{\nu} \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-x+\frac{a}{2}} q_1(s)\, H_2(s+x-\frac{a}{2})ds,$$

$$H_3(t,x) = \int_{x+\frac{a}{2}}^{t+\frac{a}{2}} H_2(s+\frac{a}{2})H_1(s,x)ds.$$

Volterova integralna jednačina (3.4.21) ima jedinstveno rješenje, prema tome možemo izračunati $q_1(x)$ za $x \in (\pi/2 + a/4, \pi - a)$. Zatim iz (3.4.19) izračunamo $q_2(x)$ za $x \in (2a, \pi - a/2)$. □

Pored nekompletnih inverznih problema u kojima je potencijal poznat na dijelu intervala, možemo posmatrati inverzne probleme sa uslovom da je potencijal simetričan na podintervalu. Koristeći metode opisane u Teoremi 3.4.2 možemo dokazati sljedeću teoremu, [dju2].

Teorema 3.4.3. *Neka je $q(x) = -q(\pi - x + a/2)$ za $x \in (3a/2, \pi - a)$, onda je potencijal $q(x)$ jedinstveno određen spektrima $\{\lambda_{n,j}^{\nu}\}_{n\geq 1}$ graničnih spektralnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q), j = 0, 1$ za fiksirano $\nu \in \{0, 1\}$.*

Napomena 3.4.4. Neka je $q(x) = q(\pi - x + a/2)$, za $x \in (3a/2, \pi - a)$ i vrijednost integrala $\int_{3a/2}^{\pi-a} q_1(x)dx$ poznata, tada je potencijal $q(x)$ jedinstveno određen spektrima $\{\lambda_{n,j}^{\nu}\}_{n\geq 1}$ graničnih spektralnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q), j = 0, 1$ za fiksirano $\nu \in \{0, 1\}$.

4 Izo-bispektralni potencijali za operatore sa kašnjenjem

Švedski matematičar G. Borg je prvi predložio pristup da se iz dva spektra graničnih problema, generisanih diferencijalnom jednačinom i jednim zajedničkim graničnim uslovom, pokuša konstruisati diferencijalni operator. Zahvaljujući njemu, ovaj način posmatranja inverznih problema za diferencijalne operatore je nazvan Borgov pristup. U prvom poglavlju smo dokazali da dva spektra jedinstveno određuju Šturm-Liuvilov operator bez kašnjenja. Borgov pristup smo koristili i za Šturm-Liuvilov operator sa konstantnim kašnjenjem.

U prethodnom poglavlju smo dokazali da dva spektra graničnih problema generisanih diferencijalnom jednačinom i Dirihle/Nojmanovim (Robin/Dirihleovim) graničnim uslovima jedinstveno određuju potencijal u slučaju kada je kašnjenje veće od dvije petine intervala. Inverzni problem za kašnjenja manja od dvije petine intervala je bio duži niz godina otvoren. S obzirom da vrijedi teorema jedinstvenosti u slučaju bez kašnjenja, kao i kada je kašnjenje veće od dvije petine intervala, jednim dijelom je bilo očekivano da teorema jedinstvenosti vrijedi i za svako kašnjenje.

Međutim, u ovom poglavlju ćemo, za svako kašnjenje manje od dvije petine intervala, konstruisati beskonačnu familiju potencijala koji imaju iste spektre. Nazivamo ih još izo-bispektralnim potencijalima. Time ćemo dati odgovor na višedecenijsko pitanje koje se odnosi na problem jedinstvenosti rješenja inverznog problema, [dju4] i [dju5]. Dva različita tipa graničnih problema koje posmatramo se odnose na Dirihle/Nojmanove granične uslove i Robin/Dirihleove granične uslove.

Za konstrukciju izo-bispektralnih potencijala posmatraćemo samoadjugovani partikularni operator. U slučaju Dirihle/Nojmanovih graničnih uslova, ispostaviće se da je problem lakši u odnosu na Robin/Dirihleove granične uslove. U drugom slučaju je potrebno pronaći partikularni operator koji ima sopstvenu funkciju čija je srednja vrijednost nula. Koristićemo numeričke metode, kao i metode linearnih diferencijalnih operatora da odredimo sopstvene funkcije pomenutog operatora. Ključna istraživanja će biti bazirana za kašnjenja veća od trećine intervala, dok ćemo za kašnjenja manja od trećine intervala koristiti slične ideje koje možemo realizovati anuliranjem potencijala na podintervalima, [dju6].

Pored pomenutih rezultata u ovom poglavlju ćemo se osvrnuti na slučaj kada su potencijali iz prostora apsolutno neprekidnih funkcija. Za Dirihile/Nojmanove granične uslove ćemo konstruisati izo-bispektralne potencijale kada je kašnjenje van kritičnih tačaka. Slučaj sa Robinovim graničnim uslovima će se ispostaviti znatno teži. Na kraju poglavlja ćemo navesti i neka nova otvorena pitanja vezana za inverzne probleme Šturm-Liuvilovih operatora sa kašnjenjem.

4.1 Partikularni samoadjugovani operator

Za rješenje inverznog problema za Šturm-Liuvilove operatore sa kašnjenjem manjim od dvije petine intervala, ključnu ulogu predstavljaju integralne jednačine (3.4.17) i (3.4.18). Naime u njima se javlja integralni operator koji posmatramo u ovom poglavlju.
Za fiksirano $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$, posmatrajmo linearan operator M_h, koji djeluje na prostoru $L^2[3a/2, \pi - a]$, zadan sa

$$M_h f(x) = \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - x + \frac{a}{2}} f(t) K_h(x + t - \frac{a}{2}) dt, \quad \frac{3a}{2} \leq x \leq \pi - a, \tag{4.1.1}$$

gdje je

$$K_h(x) = \int_x^{\pi} h(s) ds, \quad \text{za nenula } \ h(x) \in L^2[5a/2, \pi].$$

Lema 4.1.1. *Operator M_h zadan sa (4.1.1) je samoadjugovan i kompaktan operator.*

Dokaz. Zamjenom redoslijeda integracije dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - a} M_h f(x) g(x) dx &= \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - a} g(x) \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - x + \frac{a}{2}} f(t) K_h(x + t - \frac{a}{2}) dt dx \\
&= \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - a} f(t) \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - t + \frac{a}{2}} g(x) K_h(x + t - \frac{a}{2}) dx dt = \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - a} f(t) M_h(g)(t) dt
\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je

$$M_h = M_h^*.$$

Dalje, očigledno je da vrijedi

$$\int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - a} \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - a} |K_h(x + t - \frac{a}{2})|^2 dt dx < \infty,$$

te na osnovu Teoreme 1.1.11 operator M_h zadan sa (4.1.1) je Hilbert-Šmitov operator, odnosno kompaktan operator. □

Lema 4.1.2. *Sopstvene vrijednosti operatora M_h zadanog sa (4.1.1) su realne. Operator ima prebrojivo beskonačno sopstvenih vrijednosti, te odgovarajuće sopstvene funkcije čine ortogonalnu bazu prostora $L^2[3a/2, \pi - a]$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 4.1.1 i Teoreme 1.1.8 sopstvene vrijednosti operatora M_h su realne, te odgovarajuće sopstvene funkcije ortogonalne. □

Dokazali smo da sopstvene funkcije samoadjugovanog partikularnog operatora čine ortogonalnu bazu. Pored primjene u inverznim spektralnim problemima, pomenuti operator je od velike važnosti i za teoriju specijalnih funkcija. Takođe, primjena je povezana i sa problemom savijanja grede sa slobodnim vibracijama. Jedan od ključnih problema u inverznoj spektralnoj teoriji za operatore sa kašnjenjm je da za pomenuti operator pronađemo funkciju $h(x)$ tako da operator sadrži sopstvenu funkciju čija je srednja vrijednost nula.

U cilju pronalaženja takvog operatora, posmatramo slučaj kada je $a = \pi/3$ i $h_b(x) = \cos(b(\pi - x))$, odnosno posmatramo operator

$$M_b f(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}-x} f(t)\Big(-\frac{1}{b}\sin(b(-\frac{7\pi}{6}+t+x))\Big)dt. \tag{4.1.2}$$

Neka je μ sopstvena vrijednost operatora M_b i $f_b(x)$ odgovarajuća sopstvena funkcija, pri čemu je $\|f_b(x)\|_L^2 = 1$ i $f_b(\pi/2) < 0$. Prema tome vrijedi

$$M_b f_b(x) = \mu f_b(x). \tag{4.1.3}$$

Koristeći translaciju u (4.1.3) dobijamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}-x} e_b(t)\Big(-\frac{1}{b}\sin(b(-\frac{\pi}{6}+t+x))\Big)dt = \mu e_b(x), \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}, \tag{4.1.4}$$

gdje je $e_b(x) = f_b(x+\pi/2)$, $x \in (0, \pi/6)$. U narednim koracima ćemo objasniti način na koji dolazimo do analitičkog oblika srednje vrijednosti sopstvene funkcije $e_b(x)$ koja zadovoljava jednačinu (4.1.4) tako da je $|1/\mu| < b^2$.

Prvi korak: Svodimo problem (4.1.4) na linearnu diferencijalnu jednačinu. Diferenciranjem jednačine (4.1.4) dobijamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}-x} e_b(t)\Big(-\cos\Big(b(-\frac{\pi}{6}+t+x)\Big)\Big)dt = \mu e_b^{'}(x). \tag{4.1.5}$$

Ponovnim diferenciranjem jednačine (4.1.5) imamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}-x} e_b(t)\Big(\sin\Big(b(-\frac{\pi}{6}+t+x)\Big)\Big)dt + e_b(\frac{\pi}{6}-x) = \mu e_b^{''}(x). \tag{4.1.6}$$

Iz (4.1.4) i (4.1.6) dobijamo

$$\mu e_b^{''}(x) + b^2\mu e_b(x) = e_b(\frac{\pi}{6}-x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x e_b(t)\Big(-\frac{1}{b}\sin\Big(b(t-x)\Big)dt\Big). \tag{4.1.7}$$

Kada dva puta diferenciramo jednačinu (4.1.7) imamo

$$e_b^{(4)}(x) + 2b^2 e_b''(x) + (b^4 - \frac{1}{\mu^2})e_b(x) = 0. \tag{4.1.8}$$

Primijetimo da ako $e_b(x)$ zadovoljava (4.1.4) onda mora zadovoljiti jednačinu (4.1.8) i granične uslove

$$\begin{aligned} e_b(\frac{\pi}{6}) = 0, \quad e_b'(\frac{\pi}{6}) &= 0, \\ e_b(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e_b(t)\Big(-\frac{1}{b}\sin\Big(b(\frac{-\pi}{6}+t)\Big)\Big)dt, \\ e_b'(0) = \frac{1}{\mu}\int_0^{\frac{\pi}{6}} e_b(t)\Big(-\cos\Big(b(\frac{-\pi}{6}+t)\Big)\Big)dt. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Vrijedi i obratno, ako $e_b(x)$ zadovoljava (4.1.8) i (4.1.9) tada $e_b(x)$ zadovoljava jednačinu (4.1.4). Da bismo pojednostavili račun umjesto graničnih uslova (4.1.9) posmatraćemo sljedeće granične uslove

$$\begin{aligned} e_b(\frac{\pi}{6}) = 0, \quad e_b'(\frac{\pi}{6}) &= 0, \\ e_b''(0)+b^2 e_b(0) &= 0, \\ e_b'''(0)+b^2 e_b'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Napomenimo da ukoliko funkcija $e_b(x)$ zadovoljava (4.1.8) i (4.1.10) da ne mora da zadovolji integralnu jednačinu (4.1.4). Ipak uvrštavanjem u integralnu jednačinu (4.1.4) lako možemo odabrati podskup rješenja diferencijalne jednačine (4.1.8) sa graničnim uslovima (4.1.10). Ovaj problem se može jednostavno riješiti i sa dodavanjem još jednog graničnog uslova.
Prema tome posmatramo diferencijalnu jednačinu (4.1.8) sa graničim uslovima (4.1.10) i $|1/\mu| < b^2$.

Drugi korak: Određujemo karakterističnu funkciju spektralnog problema (4.1.4), pri čemu je $|1/\mu| < b^2$. Neka je $m = 1/\mu$. Opšte rješenje diferencijalne jednačine (4.1.8) je dato sa

$$e_b(x) = C_1\cos(x\sqrt{b^2+m}) + C_2\sin(x\sqrt{b^2+m}) + C_3\cos(x\sqrt{b^2-m}) + C_4\sin(x\sqrt{b^2-m}) \tag{4.1.11}$$

Uvrštavanjem (4.1.11) u (4.1.10) dobijamo sistem

$$A_b(m)\cdot\vec{C} = \vec{0}, \tag{4.1.12}$$

gdje je $\vec{C} = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$ i

$$A_b(m) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi\sqrt{b^2+m}}{6}) & \sin(\pi\frac{\sqrt{b^2+m}}{6}) & \cos(\frac{\pi\sqrt{b^2-m}}{6}) & \sin(\frac{\pi\sqrt{b^2-m}}{6}) \\ -\beta_0\sin(\frac{\pi\sqrt{b^2+m}}{6}) & \beta_0\cos(\frac{\pi\sqrt{b^2+m}}{6}) & -\beta_1\sin(\frac{\pi\sqrt{b^2-m}}{6}) & \beta_1\cos(\frac{\pi\sqrt{b^2-m}}{6}) \\ -m & 0 & m & 0 \\ 0 & b^2\beta_0-\beta_0^3 & 0 & b^2\beta_1-\beta_1^3 \end{pmatrix} \tag{4.1.13}$$

pri čemu je $\beta_j = \sqrt{b^2+(-1)^j m}$.
Definišemo funkciju $G_b(m) = det(A_b(m))$, na skupu $\{\mu \in \mathbb{R} : |1/\mu| < b^2\}$. Dobijamo

$$G_b(m) = 2m^2\left(\beta_0\beta_1 + \beta_0\beta_1\cos(\frac{\pi\beta_0}{6})\cos(\frac{\pi\beta_1}{6}) + b^2\sin(\frac{\pi\beta_0}{6})\sin(\frac{\pi\beta_1}{6})\right).$$

Funkcija $G_b(m)$ je realna i analitička funkcija, te određivanjem njenih nula možemo odrediti najmanju i najveću sopstvenu vrijednost integralnog operatora M_b.
Dolazimo do jednačine

$$G_b(m) = 0. \tag{4.1.14}$$

Primijetimo da parametar m zavisi od parametra b. Za fiksirano b možemo odrediti interval $[\alpha_b, \beta_b]$ tako da $m \in [\alpha_a, \beta_a]$.

Treći korak: Određujemo analitički oblik srednje vrijednosti sopstvene funkcije. Koristeći Gausov metod, možemo izračunati analitički oblik sopstvene funkcije $e_b(x)$, odnosno

$$\begin{aligned} e_b(x) = \frac{1}{\eta}\Bigg[&\left(-\cos(\frac{\pi}{6}\beta_0)\cot(\frac{\pi}{12}\beta_1) - \frac{\beta_1\sin(\frac{\pi}{6}\beta_1)}{\beta_0}\right)\cos(\beta_0 x) \\ &+\left(\frac{\beta_1\cos(\frac{\pi}{6}\beta_0)}{\beta_0} - \cot\left(\frac{\pi}{12}\beta_1\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\beta_0\right)\right)\sin(\beta_0 x) \\ &+\cot\left(\frac{\pi}{12}\beta_1\right)\cos(\beta_1 x) + \sin(\beta_1 x)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

gdje je η dobijeno koristeći L^2 normalizaciju, vodeći računa da je $e_a(0) < 0$.
Dalje, iz (4.1.15) možemo izračunati

$$h(b,m) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} e_b(t)dt, \tag{4.1.16}$$

Štaviše,

$$\begin{aligned} h(b,m) =&\frac{c(m)}{\eta}\Bigg(\sqrt{b^2-m} + \sqrt{b^2-m}\cos\left(\frac{\pi\sqrt{b^2+m}}{6}\right) \\ &-\sqrt{b^2+m}\cot\left(\frac{\pi\sqrt{b^2-m}}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\sqrt{b^2+m}\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

gdje je $\frac{c(m)}{\gamma} \neq 0$. Time smo došli do analitičkog oblika srednje vrijednosti sopstvene funkcije $e_b(x)$ koja zadovoljava (4.1.4), pri čemu je $|1/\mu| < b^2$.

Koristeći numeričke metode možemo odrediti da za $b = 9.48$, $m \in (-54.004, -54.002)$, te može se pokazati da je

$$h(9.48, m) > 0, \quad m \in (-54.004, -54.002).$$

Sa druge strane, za $b = 9.50$, $m \in (-54.003, -54.001)$ dobijamo da je

$$h(9.50, m) < 0 \quad m \in (-54.003, -54.001).$$

Koristeći prethodna razmatranja možemo da naslutimo oblik sopstvene funkcije, kao i sopstvenu vrijednost. Dolazimo do zaključka da je $b = \sqrt{90}$, te odgovarajuća sopstvena vrijednost je $m = -54$.

Lema 4.1.3. *Neka je* $h(x) = \cos(\sqrt{90}(\pi - x))$, *operator*

$$Mf(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}-x} f(t) \int_{x+t-\frac{\pi}{6}}^{\pi} h(s)dsdt \tag{4.1.18}$$

ima sopstvene vrijednosti $\mu_1 = -54$ *i* $\mu_2 = 54$ *i odgovarajuće sopstvene funkcije*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\cos(6x) + \cos(12x), \\ f_2(x) &= -2\sin(6x) + \sin(12x). \end{aligned} \tag{4.1.19}$$

Primijetimo da vrijedi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f_1(x)dx = 0, \qquad f_2(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Direktinim uvrštavanjem se lako dokaže prethodna lema. Primijetimo da smo prethodna razmatranja vršili u slučaju kada je kašnjenje $a = \pi/3$. Zahvaljujući prethodnoj lemi, lako možemo proširiti rezultat za svako kašnjenje iz intervala $[\pi/3, 2\pi/5)$.

Teorema 4.1.4. *Neka je kašnjenje* $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ *i funkcija*

$$h_1(x) := \frac{6\pi^2}{(2\pi - 5a)^2} \cos\left(\frac{\pi\sqrt{10}(\pi - x)}{2\pi - 5a}\right).$$

Za operator $M_{h_1}f(x)$ *definisan sa (4.1.1) vrijedi*

$$M_{h_1}e_\nu(x) = (-1)^\nu e_\nu(x), \ \nu \in \{0, 1\}, \tag{4.1.20}$$

gdje je

$$\begin{aligned} e_0(x) &= \sin\frac{2\pi(2x-3a)}{2\pi-5a} + 2\sin\frac{\pi(2x-3a)}{2\pi-5a}, \\ e_1(x) &= \cos\frac{2\pi(2x-3a)}{2\pi-5a} + \cos\frac{\pi(2x-3a)}{2\pi-5a}. \end{aligned} \tag{4.1.21}$$

Dokaz. Za fiksirano $\nu \in \{0,1\}$, relacija (4.1.20) je ekvivalentna relaciji

$$m_{\chi_\nu}\epsilon_\nu(\xi) = (-1)^\nu \epsilon_\nu(\xi), \quad 0<\xi<1, \quad m_\chi f(\xi) := \int_0^{1-\xi} f(\eta)\,d\eta \int_{\xi+\eta}^1 \chi(\theta)\,d\theta, \tag{4.1.22}$$

ako je

$$\epsilon_\nu(\xi) = e_\nu\Big(\frac{3a}{2} + \Big(\pi-\frac{5a}{2}\Big)\xi\Big), \quad \chi_\nu(\theta) = \Big(\pi-\frac{5a}{2}\Big)^2 h_\nu\Big(\frac{5a}{2} + \Big(\pi-\frac{5a}{2}\Big)\theta\Big). \tag{4.1.23}$$

Zaista kada u (4.1.20) uvedemo smjenu varijabli $\xi := (2x-3a)/A$, gdje je $A = 2\pi - 5a$, dobijamo

$$M_{h_\nu} e_\nu\Big(\frac{3a}{2} + \Big(\pi-\frac{5a}{2}\Big)\xi\Big) = (-1)^\nu \epsilon_\nu(\xi), \quad 0<\xi<1.$$

Koristeći (4.1.1) i smjene $\eta := (2t-3a)/A$ i $\theta := (2\tau-5a)/A$, dobijamo

$$(-1)^\nu\epsilon_\nu(\xi) = \Big(\pi-\frac{5a}{2}\Big)\int_0^{1-\xi}\epsilon_\nu(\eta)\,d\eta \int_{\frac{5a}{2}+(\pi-\frac{5a}{2})(\xi+\eta)}^{\pi} h_\nu(\tau)\,d\tau = \int_0^{1-\xi}\epsilon_\nu(\eta)\,d\eta\int_{\xi+\eta}^1 \chi_\nu(\theta)\,d\theta,$$

što odgovara (4.1.22).

Ostajemo da dokažemo da vrijedi (4.1.22) pri čemu su

$$\epsilon_0(\xi) = \sin\pi\xi + 2\sin 2\pi\xi, \quad \epsilon_1(\xi) = \cos\pi\xi + \cos 2\pi\xi,$$

$$\chi_1(\theta) = \frac{3\pi^2}{2}\cos\frac{\pi\sqrt{10}(1-\theta)}{2}.$$

određeni sa (4.1.21) i (4.1.23). Lako se izračuna

$$m_{\chi_1}\epsilon(\xi) = \frac{3\pi}{2\sqrt{10}}(A_1 + A_2),$$

$$\begin{aligned} A_j &= 2\int_0^{1-\xi}\cos\pi j\eta\cdot\sin\frac{\pi\sqrt{10}(1-\xi-\eta)}{2}\,d\eta \\ &= \sum_{k=0}^1\int_0^{1-\xi}\sin\Big(\frac{\pi\sqrt{10}(1-\xi)}{2} - \pi\Big(\frac{\sqrt{10}}{2} + (-1)^k j\Big)\eta\Big)\,d\eta \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{2\sqrt{10}}{5-2j^2}\Big(\cos\pi j(1-\xi) - \cos\frac{\pi\sqrt{10}(1-\xi)}{2}\Big), \end{aligned}$$

za $j = 1,2$, iz čega slijedi (4.1.22) za $\nu = 1$. Slično se dokazuje i za slučaj $\nu = 0$.

□

4.2 Kašnjenje iz intervala $[\pi/3, 2\pi/5)$

Kao što smo već naveli u ovom poglavlju ćemo dokazati da rješenje inverznog problema za Šturm-Liuvilove operatore sa kašnjenjem nije jedinstveno u opštem slučaju. Koristićemo rezultate iz prethodnog poglavalja kako bi konstruisali izo-bispektralne potencijale. Više informacija o pomenutom postupku možete naći u radovima [dju4], [dju5].
Za fiksirano $\nu \in \{0, 1\}$ posmatrajmo granični problem $\mathcal{L}_{\nu,j} = \mathcal{L}_{\nu,j}(q)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{4.2.1}$$

$$y^{(\nu)}(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j = 0, 1, \tag{4.2.2}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(0, \pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0, a)$.
Slično kao u Poglavlju 3.4 slučaj $\nu = 0$ ćemo još nazivati *Slučaj 1*, dok slučaj $\nu = 1$ nazivamo *Slučaj 2*.

Fiksirajmo $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$. Za nenula realnu funkciju $h(x) \in L_2(5a/2, \pi)$, posmatramo integralni operator

$$M_h f(x) = \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi - x + \frac{a}{2}} K_h\Big(x + t - \frac{a}{2}\Big) f(t)\, dt, \;\; \frac{3a}{2} < x < \pi - a, \quad \text{where} \quad K_h(x) = \int_x^{\pi} h(\tau)\, d\tau. \tag{4.2.3}$$

Na osnovu Leme 4.1.1, operator M_h je kompaktan samoadjugovan operator koji djeluje na prostor $L_2(3a/2, \pi - a)$. Dalje, na osnovu Leme 4.1.2 operator ima najmanje jednu sopstvenu vrijednost η. Može se pretpostaviti da je sopstvena vrijednost $\eta = 1$, što se uvijek može postići uvrštavanjem $h(x)/\eta$ umjesto $h(x)$. Ipak, iz praktičnih razloga za fiksirano $\nu \in \{0, 1\}$ posmatramo $h_\nu(x) := (-1)^\nu h(x)/\eta$. Tada je $(-1)^\nu$ je sopstvena vrijednost operatora M_{h_ν}. Neka je $e_\nu(x)$ odgovarajuća sopstvena funkcija, odnosno

$$M_{h_\nu} e_\nu(x) = (-1)^\nu e_\nu(x), \quad \frac{3a}{2} < x < \pi - a. \tag{4.2.4}$$

Slučaj 1.

Neka je $Y(x, \lambda)$ rješenje jednačine (4.2.1) sa početnim uslovima $Y(0, \lambda) = 0$ i $Y'(0, \lambda) = 1$. Za $j = 0, 1$, sopstvene vrijednosti $\mathcal{L}_{0,j}(q, a)$ se podudaraju sa nulama karakteristične funkcije $\Delta_{0,j}(\lambda) = Y^{(j)}(\pi, \lambda)$. Napomenimo da je

$$\omega := \int_a^{\pi} q(x)\, dx. \tag{4.2.5}$$

Inverzni problem 4.2.1 Neka je $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$. Dati su spektri $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q,a)$, $j = 0, 1$, odrediti potencijal $q(x)$.

Na osnovu (3.4.13) i (3.4.15) vrijede sljedeće jednačine:

$$\Delta_{0,0}(\lambda) = \frac{\sin z\pi}{z} - \omega\frac{\cos z(\pi - a)}{2z^2} + \frac{1}{2z^2}\int_a^\pi w_0(x)\cos z(\pi - 2x + a)\,dx, \tag{4.2.6}$$

$$\Delta_{1,0}(\lambda) = \cos z\pi + \omega\frac{\sin z(\pi - a)}{2z} - \frac{1}{2z}\int_a^\pi w_0(x)\sin z(\pi - 2x + a)\,dx, \tag{4.2.7}$$

gdje je funkcija $w_0(x)$ jedinstveno određena sljedećom formulom, za $k = 0:$

$$w_k(x) = \begin{cases} q(x), & x \in \Big(a, \dfrac{3a}{2}\Big) \cup \Big(\pi - \dfrac{a}{2}, \pi\Big), \\ q(x) + Q_k(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, \pi - \dfrac{a}{2}\Big), \end{cases} \qquad k = 0, 1, \tag{4.2.8}$$

pri čemu je

$$Q_k(x) = \int_{x-\frac{a}{2}}^{\pi-a}\Big(q(t+a)\int_a^t q(\tau)\,d\tau - q(t)\int_{t+a}^\pi q(\tau)\,d\tau - (-1)^k\int_{t+a}^\pi q(\tau-t)q(\tau)\,d\tau\Big)dt. \tag{4.2.9}$$

Posmatrajmo familiju potencijala $B := \{q_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ određenih formulom

$$q_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big(0, \dfrac{3a}{2}\Big) \cup (\pi - a, 2a) \cup \Big(\pi - \dfrac{a}{2}, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ \alpha e(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, \pi - a\Big), \\ -\alpha K_h\Big(x + \dfrac{a}{2}\Big)\displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e(t)\,dt, & x \in \Big(2a, \pi - \dfrac{a}{2}\Big), \\ h(x), & x \in \Big(\dfrac{5a}{2}, \pi\Big). \end{cases} \tag{4.2.10}$$

Teorema 4.2.1. *Za $j = 0, 1$, spektar $\{\lambda_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q_\alpha, a)$ ne zavisi od α.*

Teorema 4.2.1 znači da problem $\mathcal{L}_{0,0}(q_\alpha, a)$ i $\mathcal{L}_{0,1}(q_\alpha, a)$ ima jedan i isti par spektara $\{\lambda_{n,0}\}_{n1\geq 1}$ i $\{\lambda_{n,1}\}_{n\geq 1}$ za sve vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{C}$, tj. rješenje Inverznog problema 4.2.1 nije jedinstveno. Dokaz je dat u nastavku.

Dokaz. Zaključujemo da spektar $\mathcal{L}_{0,j}(q,a)$, ne zavisi od $q(x) \in B$ za neki podskup $B \subset L_2(0,\pi)$ ako ne zavisi odgovarajuća sopstvena funkcija $\Delta_{0,j}(\lambda)$.
Primijetimo, kako je funkcija $\Delta_{0,0}(\lambda)$ cijela po λ, iz jednačine (4.2.7) slijedi

$$\omega = \int_a^\pi w_0(x)\,dx, \tag{4.2.11}$$

što se može provjeriti direktnim računom koristeći (4.2.8) i (4.2.9) za $k=0$. Prema tome, spektar $\mathcal{L}_{0,j}(q,a)$, $j=0,1$, je nezavisan od $q(x) \in B$ ako je nezavisna funkcija $w_0(x)$.

Mijenjanjem redoslijeda integracije u (4.2.10), lako se dobije da vrijedi

$$Q_k(x) = \int_a^{x-\frac{a}{2}} q(t)dt \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(\tau)\,d\tau - (-1)^k \int_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q(t)\,dt \int_{x+t-\frac{a}{2}}^{\pi} q(\tau)\,d\tau, \tag{4.2.12}$$

gdje je $x \in (3a/2, \pi - a/2)$. Neka $q(x) = 0$ na $(a, 3a/2)$. Onda (4.2.8) ima oblik

$$Q_0(x) = \begin{cases} -M_{q_2} q_1(x), & x \in \left(\dfrac{3a}{2}, \pi - a\right), \\ 0, & x \in (\pi - a, 2a), \\ K_{q_2}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) \displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} q_1(t)\,dt, & x \in \left(2a, \pi - \dfrac{a}{2}\right), \end{cases} \tag{4.2.13}$$

gdje je

$$q_1(x) = q(x), \quad x \in \left(\frac{3a}{2}, \pi - a\right), \quad q_2(x) = q(x), \quad x \in \left(\frac{5a}{2}, \pi\right),$$

dok M_h i $K_h(x)$ su određene sa (4.2.3). Prema tome formule (4.2.9) i (4.2.13) daju

$$w_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(a, \dfrac{3a}{2}\right), \\ q_1(x) - M_{q_2} q_1(x), & x \in \left(\dfrac{3a}{2}, \pi - a\right), \\ q(x), & x \in (\pi - a, 2a), \\ q(x) + K_{q_2}\left(x + \dfrac{a}{2}\right) \displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} q_1(t)\,dt, & x \in \left(2a, \pi - \dfrac{a}{2}\right), \\ q(x), & x \in \left(\pi - \dfrac{a}{2}, \dfrac{5a}{2}\right), \\ q_2(x), & x \in \left(\dfrac{5a}{2}, \pi\right). \end{cases} \tag{4.2.14}$$

Mijenjajući $q(x) = q_\alpha(x)$ u (4.2.14), gdje $q_\alpha(x)$ je određeno sa (4.2.5), i uzimajući u obzir (4.2.4), dobijamo

$$w_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(a, \dfrac{5a}{2}\right), \\ h(x), & x \in \left(\dfrac{5a}{2}, \pi\right). \end{cases}$$

Iz (4.2.7), (4.2.8) i (4.2.11) zaključujemo da karakteristična funkcija $\Delta_{0,j}(\lambda)$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q_\alpha, a)$ za $j = 0, 1$, je nezavisno od α, čime završavamo dokaz Teoreme 4.2.1. $\square$

Konstruisali smo klasu potencijala B tako da funkcija $w_0(x)$ u jednačinama (4.2.7) i (4.2.8) ne zavisi od odabira potancijala iz date klase. Primijetimo da ω takođe ne zavisi od odabira potencijala iz klase B. Ova osobina je jako važna s obzirom da se ω pojavljuje u funkcijama $\Delta_{0,0}(\lambda)$ i $\Delta_{1,0}(\lambda)$. Ipak, ova strategija u ovoj formi ne vrijedi u Slučaju 2. Glavni razlog leži u činjenici da se umjesto operatora M_h posmatra operator $-M_h$ i zbog toga ω zavisi od α. Detaljnije se ovim problemom bavimo u nastavku.

Slučaj 2.

Posmatramo granični problem (4.2.1) sa graničnim uslovima (4.2.2) gdje je $\nu = 1$. Sopstvene vrijednosti graničnog problema $\mathcal{L}_{j,1}(q, a)$ se podudaraju sa karakterističnom funkcijom $\Delta_{1,j}(\lambda) := W^{(j)}(\pi, \lambda)$, gdje je $W(x, \lambda)$ rješenje jednačine (4.2.1) sa početnim uslovima $W(0, \lambda) = 1$ i $W'(0, \lambda) = 0$.

Inverzni problem 4.2.2 Neka je $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$. Dati su spektri $\{\mu_{n,j}\}_{n\geq 1}$ graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}(q, a)$, $j = 0, 1$, odrediti potencijal $q(x)$.

Na osnovu (3.4.11) i (3.4.12) vrijedi:

$$\Delta_{0,1}(\lambda) = \cos z\pi + \omega \frac{\sin z(\pi - a)}{2z} + \frac{1}{2z} \int_a^\pi w_1(x) \sin z(\pi - 2x + a)\, dx, \tag{4.2.15}$$

$$\Delta_{1,1}(\lambda) = -z \sin z\pi + \frac{\omega}{2} \cos z(\pi - a) + \frac{1}{2} \int_a^\pi w_1(x) \cos z(\pi - 2x + a)\, dx, \tag{4.2.16}$$

gdje je ω dato formulom (4.2.6), dok je funkcija $w_1(x)$ oblika (4.2.9) za $k = 1$. Slično familiji B, možemo konstruisati B_1 familiju potencijala $p_\alpha(x)$ tako da funkcija $w_1(x)$ ne zavisi od izbora potencijala iz date klase. Zaista, isti metod konstrukcije potencijala možemo primijeniti uključujući operator $-M_h$ umjesto M_h. Međutim, glavna razlika u Slučaju 2 je da ne vrijedi (4.2.11). Drugim riječima, konstanta ω nije određena funkcijom $w_1(x)$. Prema tome, karakteristične funkcije (4.2.15) i (4.2.16) bi zavisile od α. Iz tog razloga da konstruišemo operator M_h tako da bar jedna njegova sopstvena funkcija ima srednju vrijednost nula.

Posmatramo familiju potencijala $B_\nu := \{q_{\alpha,\nu}(x)\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ zadanu sa formulom

$$q_{\alpha,\nu}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big(0, \dfrac{3a}{2}\Big) \cup (\pi - a, 2a) \cup \Big(\pi - \dfrac{a}{2}, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ \alpha e_\nu(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, \pi - a\Big), \\ -\alpha K_{h_\nu}\Big(x + \dfrac{a}{2}\Big) \displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_\nu(t)\,dt, & x \in \Big(2a, \pi - \dfrac{a}{2}\Big), \\ h_\nu(x), & x \in \Big(\dfrac{5a}{2}, \pi\Big). \end{cases} \tag{4.2.17}$$

Teorema 4.2.2. *Za $j = 0, 1$, spektar graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}(a, q_{\alpha,1})$ je nezavisan od α ako vrijedi*

$$\int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-a} e_1(x)\,dx = 0. \tag{4.2.18}$$

Prema tome, problem konstrukcije izo-bispektralnih potencijala graničnih problema $\mathcal{L}_{1,0}(a, q)$ i $\mathcal{L}_{1,1}(a, q)$ se svodi na problem pronalaska funkcije $h(x) \in L_2(5a/2, \pi)$ tako da operator M_h ima najmanje jednu sopstvenu funkciju čija je srednja vrijednost nula i kojoj odgovara nenula sopstvena vrijednost. Odgovor na ovo pitanje je dat u sljedećem stavu.

Lema 4.2.3. *Neka je*

$$h_1(x) := \frac{6\pi^2}{(2\pi - 5a)^2} \cos\frac{\pi\sqrt{10}(\pi - x)}{2\pi - 5a}, \quad e_1(x) := \cos\frac{2\pi(2x - 3a)}{2\pi - 5a} + \cos\frac{\pi(2x - 3a)}{2\pi - 5a}. \tag{4.2.19}$$

Onda su relacija (4.2.4) za $\nu = 1$ kao i relacija (4.2.18) ispunjene.

Dokaz. Relacija (4.2.4) vrijedi na osnovu Teoreme 4.1.4, dok relaciju (4.2.18) dokazujemo u nastavku

$$\int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-a} e_1(x)\,dx = \frac{2\pi - 5a}{2\pi}\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi(2x - 3a)}{2\pi - 5a} + \sin\frac{\pi(2x - 3a)}{2\pi - 5a}\Big)\Big|_{x=\frac{3a}{2}}^{\pi-a} = 0.$$

□

Iz Teoreme 4.2.2 i Leme 4.2.3 zaključujemo da ukoliko je familija B_1 konstruisana koristeći funkcije $h_1(x)$ i $e_1(x)$ određene sa (4.2.19) tada data familija predstavlja izo-bispektralne potencijale za granične probleme $\mathcal{L}_{1,0}(a, q)$ i $\mathcal{L}_{1,1}(a, q)$. Prema tome, Inverzni problem 4.2.2 *nije jedinstveno određen u Slučaju 2.*

Napomena. Kao što smo ustanovili ranije razlika između slučajeva $\nu = 0$ i $\nu = 1$ je u sljedećem. Kako su funkcije $\Delta_{\nu,j}(\lambda)$ cijele po λ, iz jednačine (4.2.7) za $\nu = 0$, slijedi da je

$$\omega = \int_a^\pi w_0(x)\,dx, \tag{4.2.20}$$

što se može ustanoviti i direktnim računom koristeći(4.2.8) i (4.2.9). Prema tome, za $\nu = 0$, izo-bispektralni potencijali B zahtijevaju da $w_0(x)$ ne zavisi od izbora potencijala iz klase B. Kakogod, za $\nu = 1$, ova relacija ne vrijedi (4.2.20). Drugim riječima, konstanta ω nije jedinstveno određena sa $w_1(x)$. Obje funkcije $\Delta_{1,0}(\lambda)$ i $\Delta_{1,1}(\lambda)$ mogu zavisiti od izbora potencijala $q(x) \in B$, iako $w_1(x)$ ne zavisi.

Neka je $q(x) = 0$ na $(a, 3a/2)$. Odavde, iz formula (4.2.8) i (4.2.9) dobijamo

$$w_\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big(a, \dfrac{3a}{2}\Big), \\ q(x) - (-1)^\nu M_h q(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, \pi - a\Big), \\ q(x), & x \in (\pi - a, 2a), \\ q(x) + K_h\Big(x + \dfrac{a}{2}\Big)\displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} q(t)\,dt, & x \in \Big(2a, \pi - \dfrac{a}{2}\Big), \\ q(x), & x \in \Big(\pi - \dfrac{a}{2}, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ h(x), & x \in \Big(\dfrac{5a}{2}, \pi\Big), \end{cases} \tag{4.2.21}$$

gdje je $h(x) = q(x)$ na $(5a/2, \pi)$, te operatori M_h, $K_h(x)$ su dati sa (4.2.3).

Dokaz Teoreme 4.2.2. Spektar graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}(a, q)$ ne zavisi od izbora potencijala $q(x) \in B_1$ za neki podskup $B_1 \subset L_2(0, \pi)$ ako ne zavise odgovarajuće karakteristične funkcije $\Delta_{\nu,j}(\lambda)$. Mijenjajući $q(x) = q_{\alpha,1}(x)$ u (4.2.21) za $\nu = 1$, gdje je $q_{\alpha,1}(x)$ određeno sa (4.2.17) za $\nu = 1$, i uzimajući (4.2.4) u obzir za $\nu = 1$, dobijamo

$$w_1(x) = 0, \quad a < x < \frac{5a}{2}, \qquad w_1(x) = h_1(x), \quad \frac{5a}{2} < x < \pi.$$

Prema tome, funkcija $w_1(x)$ je nezavisna od α. Ostaje da se dokaže da to isto i za vrijednost ω određenu sa (4.2.5) pri čemu je $q(x) = q_{\alpha,1}(x)$. Integrirajući treći red u (4.2.17) za $\nu = 1$, dobijamo

$$\mathcal{I} := \int_{2a}^{\pi-\frac{a}{2}} K_{h_1}\Big(x + \frac{a}{2}\Big)\,dx \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_1(t)\,dt = \int_{2a}^{\pi-\frac{a}{2}} K_{h_1}\Big(x + \frac{a}{2}\Big)\,dx \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_1(x + a - t)\,dt.$$

Mijenjajući redoslijed integracije, možemo izračunati

$$\mathcal{I} = \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} dx \int_{x+\frac{a}{2}}^{\pi-\frac{a}{2}} K_{h_1}\Big(t + \frac{a}{2}\Big) e_1(t + a - x)\,dt = \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-a} dx \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-x+\frac{a}{2}} K_{h_1}\Big(x + t - \frac{a}{2}\Big) e_1(t)\,dt,$$

što zajedno sa jednačinama (4.2.4) i (4.2.18) povlači

$$\mathcal{I} = \int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-a} M_{h_1} e_1(x)\,dx = -\int_{\frac{3a}{2}}^{\pi-a} e_1(x)\,dx = 0.$$

Prema tome iz (4.2.17) i (4.2.18) dobijamo

$$\omega = \int_a^\pi q_{\alpha,1}(x)\,dx = \int_{\frac{5a}{2}}^{\pi} h_1(x)\,dx,$$

odnosno vrijednost ω ne zavisi α, čime je završen dokaz. □

AC slučaj

Dokazali smo da inverzni problem za operatore Šturm-Liuvilovog tipa sa konstantnim kašnjenjem na intervalu $[\pi/3, 2\pi/5)$ nema jedinstveno rješenje kada posmatramo potencijale iz prostora kvadratno integrabilnih funkcija. Vrlo važno pitanje je da li isto vrijedi i u slučaju kada je potencijal iz prostora apsolutno neprekidnih funkcija. U nastavku ćemo djelimično dati odgovor na ovo pitanje, tačnije opisaćemo slučaj sa Dirihle/Nojmanovim graničnim uslovima. Za Robinove granične uslove pomenuti problem još uvijek nije riješen.

Prema tome, posmatramo granični problem $\mathcal{L}_{0,j}(q,a)$, $j = 0,1$, generisan sa (4.2.1) i (4.2.2) za $\nu = 0$, pri čemu potencijal $q(x) \in AC[a,\pi]$. Karakteristične funkcije graničnog problema su date sa (4.2.7) i (4.2.8). U nastavku ćemo konstruisati klasu izo-bispektralnih potencijala iz prostora $AC[a,\pi]$. U tu svrhu posmatramo

$$e_0(x) := \sin\frac{2\pi(2x-3a)}{2\pi-5a} + 2\sin\frac{\pi(2x-3a)}{2\pi-5a} \tag{4.2.22}$$

i uvodimo familiju $\tilde{B}_0 := \{q_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathbb{C}}$ određenu formulom

$$q_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big[0, \dfrac{3a}{2}\Big) \cup [\pi-a, 2a), \\ \alpha e_0(x), & x \in \Big[\dfrac{3a}{2}, \pi-a\Big), \\ -\alpha K_{h_0}\Big(x+\dfrac{a}{2}\Big)\displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_0(t)\,dt, & x \in \Big[2a, \pi-\dfrac{a}{2}\Big), \\ g(x), & x \in \Big[\pi-\dfrac{a}{2}, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ h_0(x), & x \in \Big[\dfrac{5a}{2}, \pi\Big], \end{cases} \tag{4.2.23}$$

pri čemu je $h_0(x) = h_1(x)$, gdje je $h_1(x)$ određeni (4.2.19), dok je $g(x)$ proizvoljna funkcija iz prostora $AC[\pi - a/2, 5a/2]$ koja ispunjava sljedeće uslove

$$g\Big(\pi-\frac{a}{2}\Big) = 0, \quad g\Big(\frac{5a}{2}\Big) = \frac{6\pi^2}{(2\pi-5a)^2}\cos\frac{\pi\sqrt{10}}{2}. \tag{4.2.24}$$

Teorema 4.2.4. *Neka je $a \in (\pi/3, 2\pi/5)$ fiksirano. Za $j = 0, 1$, spektar graničnih problema $\mathcal{L}_{0,j}(a, q_\alpha)$ je nezavisan od α.*

Dokaz. Koristeći Teoremu 4.1.4 može se dokazati da vrijedi (4.2.4) za $\nu = 0$ pri čemu je $h_0(x) = h_1(x)$ određeno sa (4.2.19) i $e_0(x)$ određeno sa (4.2.22). Dalje, mijenjajući $q(x) = q_\alpha(x)$ u (4.2.14) za $\nu = 0$, gdje je $q_\alpha(x)$ određeno sa (4.2.23), te uzimajući u obzir (4.2.4) za $\nu = 0$, dobijamo

$$w_0(x) = 0, \ \ a < x < \pi - \frac{a}{2}, \quad w_0(x) = g(x), \ \ \pi - \frac{a}{2} < x < \frac{5a}{2}, \quad w_0(x) = h_0(x), \ \ \frac{5a}{2} < x < \pi.$$

Prema tome funkcija $w_0(x)$ je nezavisna od α. Štaviše, za $j = 0, 1$, karakteristične funkcije $\Delta_{0,j}(\lambda)$ graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(q_\alpha, a)$ su nezavisne od α.

Konačno, primijetimo da za $\alpha \in \mathbb{C}$ i $a \in (\pi/3, 2\pi/5)$, potencijal $q_\alpha(x) \in AC[0, \pi]$ zahvaljujući (4.2.24) i činjenici da je $e_0(3a/2) = e_0(\pi - a) = K_{h_0}(\pi) = 0$. $\square$

U prethodnom dokazu smo koristili prednost da možemo izabrati proizvoljnu funkciju na intervalu $[\pi - a/2, 5a/2)$. Međutim, ukoliko je kašnjenje $a = \pi/3$, tada je $\pi - a/2 = 5a/2$ što znači da moramo izabrati funkciju $h(x)$ tako da je $h(5a/2) = 0$. Ovo je otežavajuća okolnost, s obzirom da od odabira funkcije $h(x)$ direktno zavisi sopstvena funkcija operatora M_h. Ovaj problem još uvijek nije riješen i predstavlja otvoreno pitanje, kao i izazov za mnoge matematičare.

Otvoren problem 1: *Neka je $a = \pi/3$. Naći funkciju $h(x) \in AC[5\pi/6, \pi]$ tako da operator M_h dat sa (4.1.1) ima bar jednu sopstvenu funkciju $e(x)$ tako da je $e(3a/2) = 0$.*

Za razliku od Slučaja 1, mnogo veći izazov predstavlja konstrukcija izo-bispektralnih potencijala iz prostora apsolutnih neprekidnih funkcija za Slučaj 2, odnosno sa Robin/Dirihleovim graničnim uslovima. Ovaj problem nije riješen čak i kada je kašnjenje iz intervala $(\pi/3, 2\pi/5)$. Naime, da bismo riješili ovaj problem potrebno je da nađemo funkciju $h(x)$ tako da bar jedna sopstvena funkcija $e(x)$ ima srednju vrijednost nula, ali i da dostiže nulu u lijevom kraju intervala. Za slučaj $a = \pi/3$, pored pomenutih uslova potrebno je da funkcija $h(x)$ zadovoljava uslov da je $h(5a/2) = 0$.

Otvoren problem 2: *Neka je $a \in (\pi/3, 2\pi/5)$. Naći funkciju $h(x) \in AC[5\pi/6, \pi]$ tako da operator M_h dat sa (4.1.1) ima bar jednu sopstvenu funkciju $e(x)$ koja ispunjava uslove da je $e(3a/2) = 0$ i*

$$\int_{3a/2}^{\pi - a} e(x)dx = 0.$$

4.3 Kašnjenje iz intervala $(0, \pi/3)$

Za fiksirano $\nu \in \{0,1\}$ posmatrajmo granični problem $\mathcal{L}_{\nu,j} = \mathcal{L}_{\nu,j}(q)$ sa konstantnim kašnjenjem $a \in (0, \pi/3)$

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x), \;\; 0 < x < \pi, \tag{4.3.1}$$

$$y^{(\nu)}(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \;\; j = 0, 1, \tag{4.3.2}$$

gdje je potencijal $q(x)$ kompleksna funkcija iz $L^2(0,\pi)$ tako da $q(x) \equiv 0$ na $(0,a)$. Označimo sa $\{\lambda_{n,j}^\nu\}_{n\geq 1}$ spektar graničnog problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(q,a)$ i posmatrajmo sljedeći inverzni problem

Inverzni problem 4.3.1 Neka je $a \in (0, \pi/3)$. Dati su spektri $\{\lambda_{n,0}^\nu\}_{n\geq 1}$ i $\{\lambda_{n,1}^\nu\}_{n\geq 1}$, graničnih problema $\mathcal{L}_{\nu,0}$ i $\mathcal{L}_{\nu,1}$ naći potencijal $q(x)$.

Za razliku od dosadašnjih oznaka, u nastavku ćemo prilagoditi oznake kako bismo lakše mogli predstaviti formule za slučajeve $\nu = 0$ i $\nu = 1$. Za fiksirano $\nu = 0,1$, označimo $y_\nu(x,\lambda)$ jedinstveno rješenje jednačine (4.3.1) sa početnim uslovima $y_\nu^{(j)}(0,\lambda) = \delta_{\nu,j}$, $j = 0,1$, gdje je $\delta_{\nu,j}$ Kronekerov delta simbol. Ovdje i u nastavku, sa $f^{(j)}$ kao i sa f' ćemo označiti odgovarajuće izvode funkcije f u odnosu na *prvi* argument. Označimo

$$\omega(x) = \int_a^x q(t)\,dt, \quad \omega_1(x) = \int_{2a}^x q(t)\omega(t-a)\,dt, \quad y_{0,0}(x,\lambda) = \cos zx, \quad y_{1,0}(x,\lambda) = \frac{\sin zx}{z}.$$

Funkcije $y_0(x,\lambda)$ i $y_1(x,\lambda)$ nazivamo kosinusni i sinusni tip rješenja jednačine (4.3.1), koje u slučaju da je $q(x) \equiv 0$, odgovaraju redom $y_{0,0}(x,\lambda)$ i $y_{1,0}(x,\lambda)$, .

Za svaki par parametara $\nu, j \in \{0,1\}$, sopstvene vrijednosti graničnog problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(a,q)$ računajući njihove višestrukosti se podudaraju sa nulama karakterističnih funkcija $\Delta_{\nu,j}(\lambda) = y_{1-\nu}^{(j)}(\pi,\lambda)$, graničnih problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(a,q)$.

Za $\nu = 0,1$, na osnovu Teoreme 2.1.2 i Teoreme 2.1.3 imamo da je

$$y_\nu(x,\lambda) = \sum_{k=0}^N y_{\nu,k}(x,\lambda), \quad y_{\nu,k}(x,\lambda) = \int_{ka}^x \frac{\sin z(x-t)}{z} q(t) y_{\nu,k-1}(t-a,\lambda)\,dt, \quad k \geq 1. \tag{4.3.3}$$

Sljedeća lema daje eksplicitni oblik formula $y_{\nu,k}(x,\lambda)$ za $\nu = 0,1$ i $k = 1,2$.

Lema 4.3.1. *Za $\nu = 0,1$, vrijede sljedeće formule*

$$y_{\nu,1}(x,\lambda) = (-1)^\nu \frac{\omega(x)}{2\lambda^\nu} y_{1-\nu,0}(x-a,\lambda) + \frac{1}{2\lambda^\nu}\int_a^x q(t) y_{1-\nu,0}(x-2t+a,\lambda)\,dt, \quad a \leq x \leq \pi, \tag{4.3.4}$$

$$y_{\nu,2}(x,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^{\nu}}\int\limits_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}}P_{\nu}(x,t)y_{1-\nu,0}(x-2t+a,\lambda)\,dt,\quad 2a\le x\le\pi, \tag{4.3.5}$$

gdje je

$$P_{\nu}(x,t)=\int\limits_{t+\frac{a}{2}}^{x}q(\tau)\,d\tau\int\limits_{a}^{t-\frac{a}{2}}q(\xi)\,d\xi+(-1)^{\nu}\int\limits_{a}^{x-t+\frac{a}{2}}q(\tau)\,d\tau\int\limits_{t+\tau-\frac{a}{2}}^{x}q(\xi)\,d\xi,\quad \frac{3a}{2}\le t\le x-\frac{a}{2}. \tag{4.3.6}$$

Dokaz. Neka je $\nu\in\{0,1\}$ fiksirano. Primjenjujući trigonometrijsku formulu

$$\frac{\sin z(x-t)}{z}y_{\nu,0}(\xi,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^{\nu}}\Big((-1)^{\nu}y_{1-\nu,0}(x-t+\xi,\lambda)+y_{1-\nu,0}(x-t-\xi,\lambda)\Big), \tag{4.3.7}$$

sa $\xi=t-a$ u drugoj formuli (4.3.3) za $k=1$, dolazimo do (4.3.4).

Dalje, mijenjajući (4.3.4) u drugu formulu u (4.3.3) za $k=2$, dobijamo

$$y_{\nu,2}(x,\lambda)=\frac{1}{2\lambda^{\nu}}\int\limits_{2a}^{x}\frac{\sin z(x-t)}{z}q(t)\Big((-1)^{\nu}\omega(t-a)y_{1-\nu,0}(t-2a,\lambda)$$

$$+\int\limits_{a}^{t-a}q(\tau)y_{1-\nu,0}(t-2\tau,\lambda)\,d\tau\Big)dt.$$

Koristeći (4.3.7) za $\xi=t-2a$ i za $\xi=t-2\tau$, imamo

$$y_{\nu,2}(x,\lambda)=-\frac{\omega_1(x)}{4\lambda}y_{\nu,0}(x-2a,\lambda)+\frac{(-1)^{\nu}}{4\lambda}\int\limits_{a}^{x-a}q(t+a)y_{\nu,0}(x-2t,\lambda)\,dt\int\limits_{a}^{t}q(\tau)\,d\tau$$

$$+\frac{(-1)^{1-\nu}}{4\lambda}\int\limits_{2a}^{x}q(t)\,dt\int\limits_{a}^{t-a}q(\tau)y_{\nu,0}(x-2\tau,\lambda)\,d\tau+\frac{1}{4\lambda}\int\limits_{2a}^{x}q(t)\,dt\int\limits_{a}^{t-a}q(t-\tau)y_{\nu,0}(x-2\tau,\lambda)\,d\tau.$$

Nakon smjene redoslijeda integracije u zadnja dva sabirka, dobijamo

$$y_{\nu,2}(x,\lambda)=-\frac{\omega_1(x)}{4\lambda}y_{\nu,0}(x-2a,\lambda)+\frac{(-1)^{\nu}}{4\lambda}\int\limits_{a}^{x-a}R_{\nu}(x,t)y_{\nu,0}(x-2t,\lambda)\,dt, \tag{4.3.8}$$

gdje je

$$R_{\nu}(x,t)=q(t+a)\int\limits_{a}^{t}q(\tau)\,d\tau-q(t)\int\limits_{t+a}^{x}q(\tau)\,d\tau+(-1)^{\nu}\int\limits_{t+a}^{x}q(\tau)q(\tau-t)\,d\tau.$$

Integracijom po drugoj promjenljivoj, dobijamo

$$\int_t^{x-a} R_\nu(x,\tau)\,d\tau = \int_{t+a}^{x} q(\tau)\,d\tau \int_a^{\tau-a} q(\xi)\,d\xi - \int_t^{x-a} q(\tau)\,d\tau \int_{\tau+a}^{x} q(\xi)\,d\xi$$
$$+ (-1)^\nu \int_t^{x-a} d\tau \int_a^{x-\tau} q(\xi+\tau) q(\xi)\,d\xi.$$

Mijenjajući redoslijed integracije u posljednja dva sabirka, dobijamo

$$\int_t^{x-a} R_\nu(x,\tau)\,d\tau = \int_{t+a}^{x} q(\tau)\,d\tau \int_a^{t} q(\xi)\,d\xi + \ (-1)^\nu \int_a^{x-t} q(\tau)\,d\tau \int_{t+\tau}^{x} q(\xi)\,d\xi = P_\nu\Big(x, t+\frac{a}{2}\Big),$$

gdje je funkcija $P_\nu(x,t)$ data sa (4.3.6). U suštini, vrijedi

$$P_\nu\Big(x,\frac{3a}{2}\Big) = (-1)^\nu \int_a^{x-a} q(t)\,dt \int_{a+t}^{x} q(\tau)\,d\tau = (-1)^\nu \int_{2a}^{x} q(t)\,dt \int_a^{t-a} q(\tau)\,d\tau = (-1)^\nu \omega_1(x).$$

Prema tome, koristeći parcijalnu integraciju u (4.3.8) zajedno sa relacijama

$$y'_{\nu,0}(x,\lambda) = (-\lambda)^\nu y_{1-\nu,0}(x,\lambda), \quad \nu = 0,1, \tag{4.3.9}$$

dolazimo do (4.3.5). □

Posljedica 4.3.2. *Vrijede sljedeće formule*

$$y'_{\nu,1}(x,\lambda) = \frac{\omega(x)}{2} y_{\nu,0}(x-a,\lambda) + \frac{(-1)^\nu}{2} \int_a^{x} q(t) y_{\nu,0}(x-2t+a,\lambda)\,dt, \quad a \le x \le \pi, \tag{4.3.10}$$

$$y'_{\nu,2}(x,\lambda) = \frac{(-1)^\nu}{2} \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} P_\nu(x,t) y_{\nu,0}(x-2t+a,\lambda)\,dt, \quad 2a \le x \le \pi. \tag{4.3.11}$$

Dokaz. Zahvaljujući (4.3.9) i činjenici $w'(x) = q(x)$, formula (4.3.10) se lako može dobiti diferencirajući (4.3.4). Analogno, diferencirajući (4.3.5), dobijamo

$$y'_{\nu,2}(x,\lambda) = A_\nu(x,\lambda) + B_\nu(x,\lambda) + \frac{(-1)^\nu}{2} \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} P_\nu(x,t) y_{\nu,0}(x-2t+a,\lambda)\,dt, \quad 2a \le x \le \pi, \tag{4.3.12}$$

gdje je

$$A_\nu(x,\lambda) = \frac{(-1)^\nu}{2} P_\nu\Big(x, x-\frac{a}{2}\Big) y_{\nu,0}(2a,\lambda),$$

$$B_\nu(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda^\nu} \int\limits_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} \frac{\partial}{\partial x} P_\nu(x,t) y_{1-\nu,0}(x-2t+a,\lambda)\, dt.$$

Iz (4.3.6) imamo $P_\nu(x, x-a/2) = 0$, odnosno $A_\nu(x,\lambda) \equiv 0$ za $\nu = 0,1$. Dalje, dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x} P_\nu(x,t) = q(x) \left(\int\limits_a^{t-\frac{a}{2}} q(\tau)\, d\tau + (-1)^\nu \int\limits_a^{x-t+\frac{a}{2}} q(\tau)\, d\tau \right).$$

Uvodeći smjenu $t \to (x+a-t)/2$, dolazimo do

$$B_\nu(x,\lambda) = \frac{q(x)}{4\lambda^\nu} \int\limits_{2a-x}^{x-2a} G(x,t,\lambda)\, dt,$$

$$G(x,t,\lambda) = \left(\int\limits_a^{t-\frac{a}{2}} q(\tau)\, d\tau + (-1)^\nu \int\limits_a^{x-t+\frac{a}{2}} q(\tau)\, d\tau \right) y_{1-\nu,0}(t,\lambda).$$

Ostaje da primijetimo da je za svako fiksirano $x \in (2a,\pi]$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, funkcija $G(x,t,\lambda)$ neparna u odnosu na t na intervalu $(2a-x, x-2a)$. Prema tome $B_\nu(x,\lambda) \equiv 0$ za $\nu = 0,1$, te konačno dobijamo (4.3.11). $\square$

U slučaju koji posmatramo $a \in (0,\pi/3)$, pored $y_{\nu,1}(x,\lambda)$ i $y_{\nu,2}(x,\lambda)$, u sumi (4.3.3), se pojavljuju i sabirci $y_{\nu,k}(x,\lambda)$ za $k = \overline{3,N}$. Sabirci $y_{\nu,k}(x)$, $k > 2$ značajno komplikuju istraživanje, jer u karakterističnoj funkciji raste broj nelinearnih integralnih sabiraka. Naš cilj je da anuliramo potencijal na podintervalima i da na taj način dobijamo jednostavniji oblik karakteristične funkcije. Naime, za $q(x) = 0$ s.s. na $(3a,\pi)$, funkcija data sa (4.3.3) se može predstaviti kao

$$y_\nu(x,\lambda) = y_{\nu,0}(x,\lambda) + y_{\nu,1}(x,\lambda) + y_{\nu,2}(x,\lambda), \quad \nu = 0,1, \tag{4.3.13}$$

odakle možemo dobiti mnogo jednostavnije oblike karakterističnih funkcija.

Lema 4.3.3. *Neka je $q(x) = 0$ s.s. na $(3a, \pi)$. Onda, za $\nu, j = 0, 1$, vrijedi*

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{\nu,\nu}(\lambda) &= (-\lambda)^{\nu}\Big(\frac{\sin z\pi}{z} - \omega\frac{\cos z(\pi-a)}{2\lambda} + \frac{(-1)^{\nu}}{2\lambda}\int\limits_a^{3a} w_\nu(x)\cos z(\pi-2x+a)\,dx\Big),\\ \Delta_{\nu,j}(\lambda) &= \cos z\pi + \omega\frac{\sin z(\pi-a)}{2z} + \frac{(-1)^j}{2z}\int\limits_a^{3a} w_\nu(x)\sin z(\pi-2x+a)\,dx, \quad \nu \neq j,\end{aligned}\right\} \tag{4.3.14}$$

gdje je $\omega = \omega(\pi)$ i funkcija $w_\nu(x)$ određena formulom

$$w_\nu(x) = \begin{cases} q(x), & x \in \Big(a, \dfrac{3a}{2}\Big) \cup \Big(\dfrac{5a}{2}, 3a\Big),\\ q(x) + Q_\nu(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{5a}{2}\Big),\end{cases} \tag{4.3.15}$$

dok je

$$Q_\nu(x) = \int\limits_{x+\frac{a}{2}}^{3a} q(t)\,dt \int\limits_a^{x-\frac{a}{2}} q(\tau)\,d\tau - (-1)^{\nu}\int\limits_a^{\frac{7a}{2}-x} q(t)\,dt \int\limits_{x+t-\frac{a}{2}}^{3a} q(\tau)\,d\tau, \quad x \in \Big(\frac{3a}{2}, \frac{5a}{2}\Big). \tag{4.3.16}$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavke leme, formula (4.3.6) nam daje $P_\nu(x,t) = 0$ za $t \geq 5a/2$ i $\nu = 0, 1$. Prema tome, mijenjajući $x = \pi$ u (4.3.13), te uzimajući u obzir (4.3.4)–(4.3.6) i (4.3.10), (4.3.11), dolazimo do formula (4.3.14) i (4.3.15) gdje je funkcija $Q_\nu(x)$, $\nu = 0, 1$, određena formulom

$$Q_\nu(x) = P_{1-\nu}(\pi, x) = \int\limits_{x+\frac{a}{2}}^{\pi} q(t)\,dt \int\limits_a^{x-\frac{a}{2}} q(t)\,dt - (-1)^{\nu}\int\limits_a^{\pi-x+\frac{a}{2}} q(t)\,dt \int\limits_{x+t-\frac{a}{2}}^{\pi} q(\tau)\,d\tau.$$

Očigledno da gornju granicu integracije π možemo zamijeniti sa $3a$, te primijetimo da se zadnji integral anulira za vrijednosti $x + t - a/2 \geq 3a$. Prema tome, gornja granica zadnjeg integrala $\pi - x + a/2$ se može zamijeniti sa $7a/2 - x$, odakle dobijamo (4.3.16). $\square$

U ovom poglavlju ćemo dokazati da rješenje Inverznog problema 4.3.1 nije jedinstvno za slučajeve $\nu = 0$ i $\nu = 1$ kada je kašnjenje $a \in (0, \pi/3)$. Konkretno, za svako ν konstruisaćemo beskonačnu familiju izo-bispektralnih potencijala $q(x)$, takvih da granični problemi $\mathcal{L}_{\nu,0}(a,q)$ i $\mathcal{L}_{\nu,1}(a,q)$ posjeduju isti par spektara. Kao što smo pokazali u prethodnim poglavljima, spektar graničnog problema $\mathcal{L}_{\nu,j}(a,q)$ ne zavisi od izbora potencijala iz klase B za neki podskup $B \subset L_2(0,\pi)$, ukoliko ne zavise karakteristične funkcije $\Delta_{\nu,j}(\lambda)$. Dovoljno je da posmatramo potencijal $q(x)$, takav da je $q(x) = 0$ na skupu $(3a, \pi)$.

Napomena 4.3.4. Razlika između slučajeva $\nu = 0$ i $\nu = 1$ se sastoji u sljedećem. Kako su funkcije $\Delta_{\nu,j}(\lambda)$ cijele po λ, prva jednačina u (4.3.14) za $\nu = 0$ povlači

$$\omega = \int_a^\pi w_0(x)\, dx, \tag{4.3.17}$$

što se može provjeriti direktnim računom koristeći (4.3.15) i (4.3.16) za $\nu = 0$. Prema tome, za $\nu = 0$, familija $B \subset L_2(0, \pi)$ predstavlja izo-bispektralne potenicjale ukoliko je funkcija $w_0(x)$ nezavisna od izbora potencijala $q(x) \in B$. Ipak, za slučaj $\nu = 1$, ne vrijedi relacija (4.3.17). Drugim riječima konstanta ω nije određena sa $w_1(x)$. Prema tome, obje funkcije $\Delta_{1,0}(\lambda)$ i $\Delta_{1,1}(\lambda)$ mogu zavisiti od izbora $q(x) \in B$ čak i kada funkcija $w_1(x)$ ne zavisi od izbora potencijala.

Fiksirajmo $a \in (0, \pi/3)$ i posmatrajmo integralni operator

$$M_h f(x) = \int_{\frac{3a}{2}}^{\frac{7a}{2}-x} K_h\Big(x + t - \frac{a}{2}\Big) f(t)\, dt, \quad \frac{3a}{2} < x < 2a, \quad \text{where} \quad K_h(x) = \int_x^{3a} h(\tau)\, d\tau, \tag{4.3.18}$$

za realnu nenula funkciju $h(x) \in L_2(5a/2, 3a)$. Prema tome, M_h je kompaktan samoadjugovani operator koji djeluje na $L_2(3a/2, 2a)$, i kao takav posjeduje najmanje jednu sopstvenu vrijednost η, $\eta \neq 0$. Fiskirajmo $\nu \in \{0, 1\}$ i stavimo $h_\nu(x) := (-1)^\nu h(x)/\eta$. Tada je $(-1)^\nu$ sopstvena vrijednost operatora M_{h_ν}. Neka je $e_\nu(x)$ odgovarajuća sopstvena funkcija, odnosno

$$M_{h_\nu} e_\nu(x) = (-1)^\nu e_\nu(x), \quad \frac{3a}{2} < x < 2a. \tag{4.3.19}$$

Posmatrajmo familiju potencijala $B_\nu := \{q_{\alpha,\nu}(x)\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ određenu formulom

$$q_{\alpha,\nu}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big(0, \dfrac{3a}{2}\Big), \\ \alpha e_\nu(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, 2a\Big), \\ -\alpha K_{h_\nu}\Big(x + \dfrac{a}{2}\Big) \displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_\nu(t)\, dt, & x \in \Big(2a, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ h_\nu(x), & x \in \Big(\dfrac{5a}{2}, 3a\Big). \end{cases} \tag{4.3.20}$$

Lema 4.3.5. *Za fiksirano $\nu \in \{0, 1\}$, funkcija $w_\nu(x)$ određena formulama (4.3.15) i (4.3.16), gdje je $q(x) = q_{\alpha,\nu}(x)$ data sa (4.3.20), je nezavisna od α.*

Dokaz. Fiksirajmo $\nu \in \{0,1\}$ i neka je $q(x) = 0$ na $(a, 3a/2)$. Onda je (4.3.16) oblika

$$Q_\nu(x) = \begin{cases} -(-1)^\nu \displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{\frac{7a}{2}-x} q(t)\,dt \int_{x+t-\frac{a}{2}}^{3a} q(\tau)\,d\tau, & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, 2a\Big), \\ \displaystyle\int_{x+\frac{a}{2}}^{3a} q(t)\,dt \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} q(\tau)\,d\tau, & x \in \Big(2a, \dfrac{5a}{2}\Big), \end{cases}$$

što zajedno sa (4.3.15) i (4.3.18) povlači

$$w_\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big(a, \dfrac{3a}{2}\Big), \\ q(x) - (-1)^\nu M_q q(x), & x \in \Big(\dfrac{3a}{2}, 2a\Big), \\ q(x) + K_q\Big(x + \dfrac{a}{2}\Big) \displaystyle\int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} q(t)\,dt, & x \in \Big(2a, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ q(x), & x \in \Big(\dfrac{5a}{2}, 3a\Big). \end{cases} \tag{4.3.21}$$

Mijenjajući $q(x) = q_{\alpha,\nu}(x)$, određenu sa (4.3.20), u (4.3.21) i uzimajući (4.3.19) u obzir dolazimo do

$$w_\nu(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Big(a, \dfrac{5a}{2}\Big), \\ h_\nu(x), & x \in \Big(\dfrac{5a}{2}, \pi\Big), \end{cases}$$

čime kompletiramo dokaz. □

Lema 4.3.5 zajedno sa (4.3.17) nam daje sljedeću teoremu.

Teorema 4.3.6. *Za $j = 0,1$, spektar graničnog problema $\mathcal{L}_{0,j}(a, q_{\alpha,0})$ je nezavisan od α.*

Prema tome, B_0 je skup izo-bispektralnih potencijala za slučaj $\nu = 0$, odnosno Inverzni problem 4.3.1 *nema jedinstveno rješenje u opštem slučaju za $\nu = 0$ i $a \in (0, \pi/3)$*. Kakogod, na osnovu Napomene 4.3.4, skup B_1, u opštem slučaju, ne sadrži izo-bispektralne potencijale za $\nu = 1$. Ipak, vrijedi sljedeća teorema.

Teorema 4.3.7. *Za $j = 0,1$, spektar graničnog problema $\mathcal{L}_{1,j}(a, q_{\alpha,1})$ je nezavisan od α ako vrijedi*

$$\int_{\frac{3a}{2}}^{2a} e_1(x)\,dx = 0. \tag{4.3.22}$$

Dokaz. Na osnovu Leme 4.3.5, ostaje da se dokaže da vrijednost

$$\omega = \int_a^\pi q_{\alpha,1}(x)\,dx$$

je nezavisna od α kada vrijedi (4.3.22). Integrirajući treći red (4.3.20) za $\nu = 1$, dobijamo

$$\mathcal{I} := \int_{2a}^{\frac{5a}{2}} K_{h_1}\Big(x + \frac{a}{2}\Big)\,dx \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_1(t)\,dt = \int_{2a}^{\frac{5a}{2}} K_{h_1}\Big(x + \frac{a}{2}\Big)\,dx \int_{\frac{3a}{2}}^{x-\frac{a}{2}} e_1(x+a-t)\,dt.$$

Mijenjajući redoslijed integracije i nakon integracije po unutrašnjoj promjenljivoj, dobijamo

$$\mathcal{I} = \int_{\frac{3a}{2}}^{2a} dx \int_{x+\frac{a}{2}}^{\frac{5a}{2}} K_{h_1}\Big(t + \frac{a}{2}\Big)e_1(t+a-x)\,dt = \int_{\frac{3a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{3a}{2}}^{\frac{7a}{2}-x} K_{h_1}\Big(x + t - \frac{a}{2}\Big)e_1(t)\,dt,$$

što zajedno sa prvom jednačinom u (4.3.18) kao i (4.3.19) za $\nu = 1$ i (4.3.22) implicira

$$\mathcal{I} = \int_{\frac{3a}{2}}^{2a} M_{h_1}e_1(x)\,dx = -\int_{\frac{3a}{2}}^{2a} e_1(x)\,dx = 0.$$

Prema tome, na osnovu (4.3.20) za $\nu = 1$, pretpostavka teoreme (4.3.22) nam daje

$$\omega = \int_a^\pi q_{\alpha,1}(x)\,dx = \int_{\frac{5a}{2}}^{3a} h_1(x)\,dx,$$

odnosno, vrijednost ω ne zavisi od α, čime završavamo dokaz . □

Zadnja teorema redukuje konstrukciju izo-bispektralnih potencijala graničnih problema $\mathcal{L}_{1,0}(a,q)$ i $\mathcal{L}_{1,1}(a,q)$ na problem pronalaska funkcije $h(x) \in L_2(5a/2, 3a)$ takve da operator M_h ima najmanje jednu sopstvenu funkciju čija je srednja vrijednost nula i kojoj odgovara sopstvena vrijednost različita od nule. Odgovor na ovo pitanje je dat u sljedećem tvrđenju.

Teorema 4.3.8. *Neka je*

$$h_1(x) := \frac{6\pi^2}{a^2}\cos\pi\sqrt{10}\Big(3 - \frac{x}{a}\Big), \quad e_1(x) := \cos\frac{4\pi x}{a} - \cos\frac{2\pi x}{a}. \tag{4.3.23}$$

Tada vrijedi (4.3.19) za $\nu = 1$ kao i uslov (4.3.22).

Dokaz. Krenimo sa (4.3.22), što možemo provjeriti direktnim uvrštavanjem:

$$\int_{\frac{3a}{2}}^{2a} e_1(x)\,dx = \frac{a}{2\pi}\Big(\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi x}{a} - \sin\frac{2\pi x}{a}\Big)\Big|_{x=\frac{3a}{2}}^{2a} = 0.$$

Dalje, iz (4.3.18) i (4.3.23), imamo

$$M_{h_1}e_1(x) = \frac{3\pi}{a\sqrt{10}}(A_1 + A_2), \tag{4.3.24}$$

gdje je

$$A_j = 2(-1)^j \int_{\frac{3a}{2}}^{\frac{7a}{2}-x} \cos\frac{2\pi jt}{a} \cdot \sin\pi\sqrt{10}\Big(\frac{7}{2}-\frac{x+t}{a}\Big)\,dt, \quad j=1,2.$$

Za svako $j\in\{1,2\}$, možemo izračunati:

$$A_j = (-1)^j \sum_{k=0}^{1} \int_{\frac{3a}{2}}^{\frac{7a}{2}-x} \sin\pi\Big(\sqrt{10}\Big(\frac{7}{2}-\frac{x}{a}\Big) - \frac{\sqrt{10}+2j(-1)^k}{a}t\Big)\,dt.$$

Dovršavajući integraciju, dolazimo do rezultata

$$\begin{aligned}
A_j &= \frac{(-1)^j}{\pi}\sum_{k=0}^{1}\frac{a}{\sqrt{10}+2j(-1)^k}\cos\pi\Big(\sqrt{10}\Big(\frac{7}{2}-\frac{x}{a}\Big)-\frac{\sqrt{10}+2j(-1)^k}{a}t\Big)\Big|_{t=\frac{3a}{2}}^{\frac{7a}{2}-x}\\
&= \frac{(-1)^j}{\pi}\sum_{k=0}^{1}\frac{a}{\sqrt{10}+2j(-1)^k}\Big(\cos 2\pi j\Big(\frac{7}{2}-\frac{x}{a}\Big)-\cos\pi\Big(\sqrt{10}\Big(2-\frac{x}{a}\Big)-3j(-1)^k\Big)\Big)\\
&= \frac{a\sqrt{10}}{\pi(5-2j^2)}\Big(\cos\frac{2\pi jx}{a}-\cos\pi\sqrt{10}\Big(2-\frac{x}{a}\Big)\Big), \quad j=1,2.
\end{aligned}$$

Mijenjajući dobijene rezultate A_1 i A_2 u (4.3.24), dolazimo do (4.3.19) za $\nu=1$. □

Teorema 4.3.7 i Teorema 4.3.8 povlače da familija B_1 konstruisana koristeći funkcije $h_1(x)$ i $e_1(x)$ određena sa (4.3.23) predstavlja klasu izo-bispektralnih potencijala za probleme $\mathcal{L}_{1,0}(a,q)$ i $\mathcal{L}_{1,1}(a,q)$. Prema tome, Inverzni problem 4.3.1 *nije jedinstveno određen za slučaj* $\nu=1$ *kada je kašnjenje* $a\in(0,\pi/3)$. Postupak konstrukcije izo-bispektralnih potencijala za kašnjenja manja od trećine intervala je detaljno opisan u radu [dju6].

Zaključak

Dokazali smo da dva spektra Šturm-Liuvilovih operatora sa kašnjenjem generisana sa Dirihle/Nojmanovim (Robinovim) graničnim uslovima nisu dovoljna da se jedinstveno odredi potencijal iz prostora kvadratno integrabilnih funkcija za kašnjenja manja od dvije petine intervala. Na ovaj način smo pokazali da teorema jedinstvenosti na osnovu dva spektra ne vrijedi za ove operatore. S obzirom da je Pikula u [pik1] dokazao da su dva spektra dovoljna da se jedinstveno odredi Šturm-Liuvilov operator sa kašnjenjem kada je potencijal iz prostora analitičkih fukcija $\mathcal{A}[a,\pi]$, interesantno bi bilo istražiti da li postoji prostor funkcija $\mathcal{G}[a,\pi]$, $\mathcal{A}[a,\pi] \subset \mathcal{G}[a,\pi] \subset L^2[a,\pi]$, koji će imati osobinu da teorema jedinstvenosti vrijedi za potencijale iz ovog prostora. Prilikom određivanja prostora $\mathcal{G}[a,\pi]$ bitno je imati u vidu da kada je potencijal iz prostora apsolutno neprekidnih funckija $AC[a,\pi]$ i kašnjenje $a \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5})$, Šturm-Liuvilov operator generisan Dirhle/Nojmanovim graničnim uslovima nije jedinstveno određen. Ovaj rezultat se može proširiti za kašnjena $a \in (0,\pi/3) \setminus \{2\pi/n, n \geq 7\}$ sa sličnim idejama anuliranja potencijala na podintervalima kao u radu [dju6]. Iz tog razloga je logično posmatrati klasu funkcija $\mathcal{G}[a,\pi] \subset AC[a,\pi]$, a svakako je interesantno istražiti slučaj $\mathcal{G}[a,\pi] = C^1[a,\pi]$, odnosno $\mathcal{G}[a,\pi] = C^\infty[a,\pi]$.

Pored navedenih rezultata, u istraživanju smo dokazali da dva spektra operatora Šturm-Liuvilovog tipa sa početnom funkcijom jedinstveno određuju potencijal kada je kašnjenje veće od polovine intervala. Inverzni problemi za operatore sa početnom funkcijom su se pokazali značajno komplikovaniji u odnosu na inverzne probleme operatora bez početne funkcije. Iz toga razloga je važno da se riješi inverzni problem za ove operatore kada je kašnjenje veće od dvije petine intervala, a manje od polovine intervala. Takođe, u istraživanju smo riješili nekompletne inverzne probleme za Šturm-Liuvilove operatore kada je kašnjenje veće od trećine intervala, a manje od dvije petine intervala. U suštini, pored dva spektra operatora sa kašnjenjem, pretpostavili smo da je potencijal poznat na podintervalu. S obzirom da smo dokazali da teorema jedinstvenosti ne vrijedi na osnovu dva spektra za proizvoljno kašnjenje, nekompletni inverzni problemi predstavljaju važan segment u daljim istraživanjima inverznih problema operatora sa kašnjenjem.

Pošto teorema jedinstvenosti inverznog problema za operatore Šturm-Liuvilovog tipa vrijedi za kašnjenja $a \in \{0\} \cup [2\pi/5, \pi)$, odnosno ne vrijedi za $a \in (0, 2\pi/5)$, interesantno bi bilo detaljnije istražiti zbog čega se javlja ovaj fenomen. Jedan od pristupa jeste da se posmatraju ograničeni potencijali iz prostora $L^2[a,\pi]$, za kašnjenja $a \in (0, 2\pi/5)$. Naime, može se dokazati da za svako kašnjenje $a \in [\pi/3, 2\pi/5)$ vrijedi teorema jedinstvenosti ukoliko se posmatraju potencijali $q(x)$ iz skupa

$$\mathcal{M}(a) = \left\{ q(x) \in L^2(a,\pi) : |q(x)| \leq \frac{1}{2\pi - 5a}, \quad x \in (a, 3a/2) \cup (\pi - a/2, \pi) \right\},$$

pri čemu je jasno da vrijedi $\mathcal{M}(a) \to L^2(a,\pi)$ kada $a \to 2\pi/5$. Iz toga razloga je logično da pokušamo dokazati da isto vrijedi i za prostor

$$\mathcal{N}(a) = \left\{ q(x) \in L^2(a,\pi) : |q(x)| \leq \frac{c}{a}, \quad x \in (a,\pi), \quad c \in \mathbb{R}^+ \right\}.$$

Na taj način bismo uspostavili jasnu vezu između inverznih problema za Šturm-Liuvilove operatore sa kašnjenjem sa inverznim problemom Šturm-Liuvilovih operatora bez kašnjenja. Pored navedenog problema, moguće je posmatrati i druge podskupove funkcija prostora $L^2(a,\pi)$ sa ciljem da se uspostavi veza između pomenutih operatora. Ovo pitanje je otvoreno i predstavlja veliki izazov matematičarima koji se bave inverznom spektralnom teorijom.

U istraživanju smo dali važne odgovore u inreznoj spektralnoj teoriji. Pored toga smo dali kratak pregled novih otvorenih problema u ovoj oblasti. Ovi rezultati su od izuzetne važnosti za dalja istraživanja u inverznoj spektralnoj teoriji za operatore sa kašnjenjem.

Literatura

[amb1] Ambarzumian, V. *Uber eine frage der eigenwerttheorie.* Zeitschrift fur Physik 53.9 (1929): 690-695.

[ars1] Arsenovic M., M. Dostanic, and D. Jocic. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora.* (2012).

[bon1] Bondarenko N. and Yurko V. *An inverse problem for Sturm–Liouville differential operators with deviating argument*, Appl. Math. Lett. 83 (2018) 140-144.

[bon2] Bondarenko, Natalia P., and Vjacheslav A. Yurko. *Partial inverse problems for the Sturm–Liouville equation with deviating argument.* Mathematical Methods in the Applied Sciences 41.17 (2018): 8350-8354.

[bor1] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math. 78 (1946) 1-96.

[bro1] Browne, P. J., and B. D. Sleeman. *A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems.* Inverse Problems 13.6 (1997): 1453.

[but1] Buterin, S. A. *On the reconstruction of a convolution perturbation of the Sturm-Liouville operator from the spectrum.* Differential Equations 46.1 (2010): 150-154.

[but2] Buterin S. and Kuznetsova M. *On the inverse problem for Sturm–Liouville-type operators with frozen argument: rational case*, Comp. Appl. Math. (2020) 39:5, 15pp.

[but3] Buterin, S. A., and V. A. Yurko, *An inverse spectral problem for Sturm–Liouville operators with a large constant delay.* Analysis and Mathematical Physics 9.1 (2019): 17-27.

[but4] Buterin, S. A., M. A. Malyugina, and C-T. Shieh. *An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays.* Applied Mathematics and Computation 411 (2021): 126475.

[cod1] Coddington, E. A., and Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations.* Tata McGraw-Hill Education, 1955.

[con1] Conway,J.B. Functions of one complex variable II. Vol. 159. Springer Science and Business Media, 2012.

[dju1] Djurić,N. and S. Maksimović. *One class of special polynomials and special functions in* $L^2(\mathbb{R})$*space* Novi Sad Journal Of Mathematics (NSJOM) 49 (1), 81-90

[dju2] Djurić N. and Vladičić V. *Incomplete inverse problem for Sturm–Liouville type differential equation with constant delay*, Results Math. (2019) 74:161.

[dju3] Djurić N. *Inverse problems for Sturm-Liouville-type operators with delay: symmetric case*, Applied Mathematical Sciences 14 (2020) no.11, 505–510.

[dju4] Djurić N. and Buterin S. *On an open question in recovering Sturm-Liouville -type operators with delay*, Appl. Math. Lett. 113 (2021) 106862.

[dju5] Djurić N. and Buterin S. *On non-uniqueness of recovering Sturm–Liouville operators with delay.* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (2021): 105900.

[dju6] Djurić, Nebojša, and Sergey Buterin. *Iso-bispectral potentials for Sturm–Liouville-type operators with small delay.* Nonlinear Analysis: Real World Applications 63 (2022): 103390.

[fre1] Freiling G. and Yurko V.A. *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, 2001.

[fre2] Freiling G. and Yurko V.A., Inverse problems for differential equations with turning points, Inverse Problems, 13 (1997), 1247-1263.

[fre3] Freiling G. and Yurko V.A. *Inverse problems for Sturm–Liouville differential operators with a constant delay*, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 1999–2004.

[gel1] Gelfand,I.M. and Levitan, B.M. *On the determination of a differential equation from its spectral function.* Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser Mat 15.4 (1951): 309-360.

[har1] Haar, Alfred, et al.*On the theory of orthogonal function systems.* Princeton University Press, 2009.

[hel1] Helffer, Bernard. *Spectral theory and its applications.* No. 139. Cambridge University Press, 2013.

[lev1] Levitan, B. M.*Inverse Sturm-Liouville Problems*, Walter de Gruyter GmbH and Co KG, 2018.

[lev2] Levitan,B.M., Sargsian, I.S. *Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators: Selfadjoint Ordinary Differential Operators.* Vol. 39. American Mathematical Soc., 1975.

[mar1] Marchenko V.A. *Sturm–Liouville Operators and Their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 1977; English transl.: Birkhäuser, Basel, 1986.

[mcc1] McCarthy, C. Maeve, and William Rundell. *Eigenparameter dependent inverse Sturm-Liouville problems.* Numerical Functional Analysis and Optimization 24.1/2 (2003): 85-106.

[nor1] Norkin, S. B.*Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments.* Academic Press, 1973.

[ign1] Ignatiev M.Yu.*On an inverse Regge problem for the Sturm-Liouville operator with deviating argument.* Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки 22.2 (2018).

[pik1] Pikula M. *Determination of a Sturm–Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra*, Mat. Vestnik 43 (1991) no.3-4, 159–171.

[pik2] Pikula, Milenko, Vladimir Vladičić, and Olivera Marković. *A solution to the inverse problem for the Sturm-Liouville-type equation with a delay.* Filomat 27.7 (2013): 1237-1245.

[pik3] Pikula, M., V. Vladičić, and D. Nedić. *Inverse Sturm-Liouville problems with homogeneous delay.* Siberian Mathematical Journal 55.2 (2014).

[pik4] Pikula M., Vladičić V. and Vojvodić B. *Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions*, Results Math. (2019) 74:45.

[tik1] Tikhonov A.N., On uniqueness of the solution of an electro reconnaissance problem, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 69 (1949), 797-800.

[vla1] Vladičić V. and Pikula M. *An inverse problem for Sturm–Liouville-type differential equation with a constant delay*, Sarajevo J. Math. 12 (2016) no.1, 83–88.

[voj1] Vojvodic, Biljana M., and Vladimir M. Vladicic. "Recovering differential operators with two constant delays under Dirichlet/Neumann boundary conditions."Journal of Inverse and Ill-posed Problems 1.ahead-of-print (2019).

[voj2] Bljana Vojvodić, *Doktorska disertacija.* Filozofski fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, (2017).

[wan1] Wang Y.P., Shieh C.T. and Miao H.Y. *Reconstruction for Sturm–Liouville equations with a constant delay with twin-dense nodal subsets*, Inverse Probl. Sci. Eng. 27 (2019) no.5, 608–617.

[wan2] Wang Y.P., Zhang M., Zhao W. and Wei X. *Reconstruction for Sturm–Liouville operators with frozen argument for irrational cases*, Appl. Math. Lett. 111 (2021) 106590.

[yan1] Yang C.-F. *Inverse nodal problems for the Sturm–Liouville operator with a constant delay*, J. Differential Equations 257 (2014) no.4, 1288–1306.

[yur1] Yurko, Vyacheslav A. *Method of spectral mappings in the inverse problem theory.* De Gruyter, 2013.

[yur2] Yurko, V. A. *Inverse problem for integrodifferential operators.* Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 50.5 (1991): 1188-1197.

[yur3] Yurko, V. *An inverse spectral problem for second order differential operators with retarded argument.* Results in Mathematics 74.2 (2019): 1-10.

[yur4] Yurko, V. A., Buterin, S. A., Pikula, M. Sturm-Liouville differential operators with deviating argument. Tamkang Journal of Mathematics, 48(1), 49-59, (2017).

[zyg1] Zygmund, Antoni. Trigonometric series. Vol. 1. Cambridge university press, 2002.

Biografija

Nebojša Đurić je rođen 17.06.1989. godine u Tesliću. Gimnaziju je završio u Tesliću 2008. godine, poslije čega upisuje studije matematike i informatike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Banjoj Luci. Osnovne studije je završio 2012. godine sa prosjekom 9,36. Na istom fakultetu je završio master studije matematike 2016. godine sa prosjekom 9,50. Od 2013. godine je zaposlen kao asistent matematike na Arhitektonsko-građevinsko-geodetskom fakultetu u Banjoj Luci, oblast matematička analiza i primjene.

Bavi se inverznom spektralnom teorijom. Većina njegovih istraživanja je posvećena inverznim problemima za operatore Šturm-Liuvilovog tipa. Pored toga bavi se istraživanjima u oblastima harmonijske analize. Autor je više naučnih radova koji su objavljeni u prestižnim svjetskim matematičkim časopisima.

Govori engleski jezik. Profesionalno se bavio šahom do svoje dvadesete godine, trenutni rejting 2195. Iz hobija slaže Rubikovu kocku. Oficijelni rekord u slaganju Rubikove kocke iznosi 15.60 sekundi.

Образац -3

УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
ФАКУЛТЕТ: ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ

ИЗВЈЕШТАЈ

о оцјени урађене докторске дисертације

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

Научно-наставно вијеће Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци на сједници одржаној 18.11.2021. године донијело је Рјешење број 19/3.2718/21, о именовању Комисије за писање извјештаја, преглед и оцјену урађене докторске тезе под насловом "Инверзни спектрални проблеми Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем", кандидата Небојше Ђурића, у саставу:

1) Проф. др Владимир Јовановић, ванредни професор, ужа научна област Математичка анализа и примјене, Природно-математички факултет Универзитета у Бањој Луци, предсједник,

2) Проф. др Владимир Владичић, ванредни професор, ужа научна област Математичка анализа и примјене, Филозофски факултет Универзитета у Источном Сарајеву, члан,

3) Др Биљана Војводић, доцент, ужа научна област Математичка анализа и примјене, Машински факултет Универзитета у Бањој Луци, члан,

4) Др Сњежана Максимовић, доцент, ужа научна област Математичка анализа и примјене, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет Универзитета у Бањој Луци, члан,

5) Проф. др Милош Арсеновић, редовни професор, ужу научна област Математичка анализа и примјене, Математички факултет Универзитета у Београду, ментор.

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

Небојша (Радомир) Ђурић рођен је 17.06.1989. године у Теслићу. Други циклус студија математике, смјер Математичка анализа и примјене, завршио је 2016. године на Природно-математичком факултету Универзитета у Бањој Луци. Наслов мастер тезе је био "Хардијев простор H^2 и оператор помака".

Трећи циклус студија математике, смјер Математичка анализа и примјене, уписује 2017. године на Природно-математичком факултету у Бањој Луци.

III УВОДНИ ДИО ОЦЈЕНЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Тема докторске дисертације под насловом "Инверзни спектрални проблеми Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем" кандидата Небојше Ђурића, након давања сагласности на Извјештај о оцјени подобности теме и кандидата за израду докторске дисертације на Природно-математичком факултету, прихваћена је одлуком Сената Универзитета у Бањој Луци број 02/04-3.675-30/21 од 25.03.2021. године.

Садржај докторске дисертације изложен је у сљедећим главама:

1) Увод (странице: 1-30)
2) Штурм-Лиувилов оператор са константним кашњењем (странице: 31-44)
3) Инверзни проблеми оператора са кашњењем (странице: 45-70)
4) Изо-биспектрални потенцијали за операторе са кашњењем (странице: 71-94)
5) Закључак (странице: 95-96)
6) Литература (странице: 97-100)

Дисертација је написана на српском језику, латиничним писаним фонтом Times New Roman на 100 страница А4 формата и садржи шест глава: Увод, Штурм-Лиувилов оператор са константним кашњењем, Инверзни проблеми оператора са кашњењем, Изо-биспектрални потенцијали за операторе са кашњењем, Закључак, Литература (46 референци). Осим тога, на почетку су наведени резиме и списак ознака.

У уводној глави (Увод, стр. 1-30) су описане спектралне особине класичног Штурм-Лиувиловог проблема, као и инверзни проблем на основу два спектра. Доказано је да су два спектра довољна да се јединствено одреди потенцијал из простора квадратно-интеграбилних функција. На тај начин је доказана теорема јединствености за овај тип оператора. Овај резултат је доказан на два различита начина, први кориштењем Боргов приступа, те други употребом Вајлове функције.

У другој глави (Штурм-Лиувилов оператор са константним кашњењем, стр. 31-44) су ријешени директни проблеми Штурм-Лиувиловог проблема са константим кашњењем. Описане су спектралне особине и асимптотска понашања карактеристичних функција. У истом поглављу је посматран директан проблем за оператор Штурм-Ливуловог типа са кашњењем и почетном функцијом.

У трећој глави (Инверзни порблеми оператора са кашњењем, стр. 45-70) је доказано да два спектра јединствено одређују потенцијал уколико је кашњење веће од двије петине интервала. У истом поглављу су посматрани и некомплетни инверзни проблеми за Дирихле/Нојманове, односно Робинове граничне услове када је кашњење мање од двије петине интервала, а веће од трећине интервала. Доказано је да су два спектра довољна да одреде потенцијал, уколико је потенцијал познат на дијелу интервала или је симетричан на подинтервалу. Такође, доказано је да два спектра оператора Штурм-Лиувила са почетном функцијом јединствено одређују потенцијал, када је кашњење веће од половине интервала.

У четвртој глави (Изо-биспектрални потенцијали за операторе са кашњењем, стр. 71-94) су посматрани инверзни проблеми за операторе Штурм-Лиувиловог типа за кашњења мања од двије петине интервала. За свако кашњење из поменутог интервала су конструисани изо-биспектрални потенцијали за Штурм-Лиувилов оператор са Дирихле/Нојмановим, односно Робиновим граничним условима. На тај начин је доказано да не врijеди теорема јединствености инверзног проблема за операторе Штурм-Лиувиловог типа са кашњењем мање од двије петине интервала. У истом глави се посматра партикуларни самоадјуговани интегрални оператор који је од изузетне важности за конструкцију изо-биспектралних потенцијала. Takoђе, доказано је да два спектра оператора Штурм-Лиувила са Дирихле/Нојмановим граничним условима нису довољна да се јединствено одреди потенцијал из простора апсолутно непрекидних функција.

У закључку дисертације (Закључак, стр. 95-96) су описани нови отворени проблеми за инверзне проблеме Штурм-Лиувилових оператора са кашњењем. Образложене су неке идеје и начин на који би се требало приступити рјешавању ових пробелема. Дијелови трећег поглавља дисертације, као и четвро поглавље садржи оригиналне резултате.

IV УВОД И ПРЕГЛЕД ЛИТЕРАТУРЕ

У истраживању се посматра оператор Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем. Описани су директни и инверзни проблеми за различите типове овог оператора.

Диференцијалне операторе са кашњењем је први изучавао Сим Борисович Норкин 60-их година прошлог вијека, [nor1]. Двадесет година касније појавио се интерес за инверзне проблеме оператора Штурм-Лиувилог типа са константним кашњењем. У [pik1] ријешен је инверзни проблем за свако кашњење у случају када је потенциал из простора аналитичких функција. У току протеклих десет година ова област је постала изузетно популарана у инверзној спектралној теорији. Важни резултати из ове области се могу наћи у радовима познатих математичара попут Вјачеслава Јурка, Герхарда Фрајлинга, Ј.-Ф. Јанга, Наталије Бондаренко и Сергеја Бутерина ([bon2], [but3], [fre3], [yur3] и [yur4]). У раду [vla1] аутори су конструисали Штурм-Лиувилов оператор из два спектра када је кашњење веће од половине интервала. У радовима [pik4], [bon1] ријешени су инверзни проблеми за операторе Штурм-Лиувиловог типа, када је кашњење веће од двије петине интерва. Случај када је кашњење мање од двије петине интервала је представљао велики изазов дужи низ година математичарима који се баве инверзном спектралном теоријом.

У дисертацији је доказано да два спектра оператора Штурм-Лиувиловог типа нису довољна да се јединствено одреди потенцијал из простора квадратно итеграбилних функција за кашњења мања од двије петине интервала. Овај резултат је проширен у специјалним случајевима и за потенцијале из простора апсолутно непрекидних функција.

Литература:

[amb1] Ambarzumian, V. *Uber eine frage der eigenwerttheorie*. Zeitschrift fur Physik 53.9 (1929): 690-695.

[ars1] Arsenovic M., M. Dostanic, and D. Jocic. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*. (2012).
[bon1] Bondarenko N. and Yurko V. *An inverse problem for Sturm-Liouville differential operators with deviating argument*, Appl. Math. Lett. 83 (2018) 140-144.
[bon2] Bondarenko, Natalia P., and Vjacheslav A. Yurko. *Partial inverse problems for the Sturm-Liouville equation with deviating argument*. Mathematical Methods in the Applied Sciences 41.17 (2018): 8350-8354.
[bor1] Borg G. *Eine Umkehrung der Sturm_Liouvilleschen Eigenwertaufgabe*, Acta Math. 78 (1946) 1-96.
[bro1] Browne, P. J., and B. D. Sleeman. *A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems*. Inverse Problems 13.6 (1997): 1453.
[but1] Buterin, S. A. *On the reconstruction of a convolution perturbation of the Sturm-Liouville operator from the spectrum*. Differential Equations 46.1 (2010): 150-154.
[but2] Buterin S. and Kuznetsova M. *On the inverse problem for Sturm-Liouville-type operators with frozen argument: rational case*, Comp. Appl. Math. (2020) 39:5, 15pp.
[but3] Buterin, S. A., and V. A. Yurko, *An inverse spectral problem for Sturm-Liouville operators with a large constant delay*. Analysis and Mathematical Physics 9.1 (2019): 17-27.
[but4] Buterin, S. A., M. A. Malyugina, and C-T. Shieh. *An inverse spectral problem for second-order functional-differential pencils with two delays*. Applied Mathematics and Computation 411 (2021): 126475.
[cod1] Coddington, E. A., and Levinson, N. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
[con1] Conway,J.B. *Functions of one complex variable II*. Vol. 159. Springer Science and Business Media, 2012.
[dju1] Djuric,N. and S. Maksimovic. *One class of special polynomials and special functions in L2(R)space Novi Sad Journal Of Mathematics* (NSJOM) 49 (1), 81-90
[dju2] Djuric N. and Vladicic V. *Incomplete inverse problem for Sturm-Liouville type differential equation with constant delay*, Results Math. (2019) 74:161.
[dju3] Djuric N. *Inverse problems for Sturm-Liouville-type operators with delay: symmetric case*, Applied Mathematical Sciences 14 (2020) no.11, 505-510.
[dju4] Djuric N. and Buterin S. *On an open question in recovering Sturm-Liouville -type operators with delay*, Appl. Math. Lett. 113 (2021) 106862.
[dju5] Djuric N. and Buterin S. *On non-uniqueness of recovering Sturm-Liouville operators with delay*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (2021): 105900.
[dju6] Djuric, Nebojsa, and Sergey Buterin. *Iso-bispectral potentials for Sturm-Liouville-type operators with small delay*. Nonlinear Analysis: Real World Applications 63 (2022): 103390.
[fre1] Freiling G. and Yurko V.A. *Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, 2001.
[fre2] Freiling G. and Yurko V.A., *Inverse problems for differential equations with turning points*, Inverse Problems, 13 (1997), 1247-1263.
[fre3] Freiling G. and Yurko V.A. *Inverse problems for Sturm-Liouville differential operators with a constant delay*, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 1999-2004.
[gel1] Gelfand,I.M. and Levitan, B.M. *On the determination of a differential equation from its spectral function*. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser Mat 15.4 (1951): 309-360.
[har1] Haar, Alfred, et al.c*On the theory of orthogonal function systems*. Princeton University Press, 2009.
[hel1] Heler, Bernard. *Spectral theory and its applications*. No. 139. Cambridge University Press, 2013.

[ign1] Ignatiev, Mikhail Yurievich. "*On an inverse Regge problem for the Sturm–Liouville operator with deviating argument.*" Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико-математические науки» 22.2 (2018): 203-213.
[lev1] Levitan, B. M. *Inverse Sturm-Liouville Problems*, Walter de Gruyter GmbH and Co KG, 2018.
[lev2] Levitan, B.M., Sargsian, I.S. *Introduction to spectral theory: Self-adjoint Ordinary Differential Operators*. Vol. 39. American Mathematical Soc., 1975.
[mar1] Marchenko V.A. *Sturm-Liouville Operators and Their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, 1977; English transl.: Birkhauser, Basel, 1986.
[mcc1] McCarthy, C. Maeve, and William Rundell. *Eigenparameter dependent inverse Sturm-Liouville problems*. Numerical Functional Analysis and Optimization 24.1/2 (2003): 85-106.
[nor1] Norkin, S. B. *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*. Academic Press, 1973.
[pik1] Pikula M. *Determination of a Sturm-Liouville-type differential operator with delay argument from two spectra*, Mat. Vestnik 43 (1991) no.3-4, 159_171.
[pik2] Pikula, Milenko, Vladimir Vladicic, and Olivera Markovic. *A solution to the inverse problem for the Sturm-Liouville-type equation with a delay*. Filomat 27.7 (2013): 1237-1245.
[pik3] Pikula, M., V. Vladicic, and D. Nedic. *Inverse Sturm-Liouville problems with homogeneous delay*. Siberian Mathematical Journal 55.2 (2014).
[pik4] Pikula M., Vladicic V. and Vojvodic B. *Inverse spectral problems for Sturm_Liouville operators with a constant delay less than half the length of the interval and Robin boundary conditions*, Results Math. (2019) 74:45.
[tik1] Tikhonov A.N., *On uniqueness of the solution of an electro reconnaissance problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 69 (1949), 797-800.
[vla1] Vladicic V. and Pikula M. *An inverse problem for Sturm-Liouville-type differential equation with a constant delay*, Sarajevo J. Math. 12 (2016) no.1, 83_88.
[voj1] Vojvodic, Biljana M., and Vladimir M. Vladicic. *Recovering differential operators with two constant delays under Dirichlet/Neumann boundary conditions*. Journal of Inverse and Ill-posed Problems 1.ahead-of-print (2019).
[voj2] Bljana Vojvodic, *Doktorska disertacija*. Filozofski fakultet, Univerzitet u Istočnom Sarajevu, (2017).
[wan1] Wang Y.P., Shieh C.T. and Miao H.Y. *Reconstruction for Sturm-Liouville equations with a constant delay with twin-dense nodal subsets*, Inverse Probl. Sci. Eng. 27 (2019) no.5, 608-617.
[wan2] Wang Y.P., Zhang M., Zhao W. and Wei X. *Reconstruction for Sturm-Liouville operators with frozen argument for irrational cases*, Appl. Math. Lett. 111 (2021) 106590.
[yan1] Yang C.-F. *Inverse nodal problems for the Sturm_Liouville operator with a constant delay*, J. Differential Equations 257 (2014) no.4, 1288_1306.
[yur1] Yurko, Vyacheslav A. *Method of spectral mappings in the inverse problem theory*. De Gruyter, 2013.
[yur2] Yurko, V. A. *Inverse problem for integro-differential operators*. Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR 50.5 (1991): 1188-1197.
[yur3] Yurko, V. *An inverse spectral problem for second order differential operators with retarded argument*. Results in Mathematics 74.2 (2019): 1-10.
[yur4] Yurko, V. A., Buterin, S. A., Pikula, M. *Sturm-Liouville differential operators with deviating argument*. Tamkang Journal of Mathematics, 48(1), 49-59, (2017).
[zyg1] Zygmund, Antoni. *Trigonometric series*. Vol. 1. Cambridge university press, 2002.

V МАТЕРИЈАЛ И МЕТОД РАДА

У истраживању је на првом мјесту кориштена спектрална теорија интегралних оператора, а за саму конструкцију интегралних оператора и методе Фуријеове анализе. Осим тога, значајну улогу у анализи проблема заузимају и напредне методе нумеричке математике.
Кандидат је показао да адекватно користи поменути теоријски апарат за рјешавање посматраних проблема. Није дошло до промјене плана истраживања који је дат приликом пријаве докторске тезе.

VI РЕЗУЛТАТИ И НАУЧНИ ДОПРИНОС ИСТРАЖИВАЊА

VI 1. Резултати истраживања

Оригинални и најзначајни научни резултати овог истраживања се огледају у:

1) Доказано је да два спектра оператора Штурм - Лиувиловог типа са Дирихле/Нојмановим граничним условима нису довољна да се јединствено одреди потенцијал из простора квадратно интеграбилних функција, када је кашњење мање од двије петине интервала.

2) Доказано је да два спектра оператора Штурм - Лиувиловог типа са Робиновим граничним условима нису довољна да се јединствено одреди потенцијал из простора квадратно интеграбилних функција, када је кашњење мање од двије петине интервала.

3) Доказано је да два спектра оператора Штурм - Лиувиловог типа са Дирихле/Нојмановим граничним условима нису довољна да се јединствено одреди потенцијал из простора апсолутно непрекидних функција, када је кашњење мање од двије петине интервала, а веће од трећине интервала.

4) Доказано је да два спектра оператора Штурм – Лиувиловог типа са почетном функцијом генерисана Робиновим граничним условима јединствено одређују потенцијал из простора квадратно интеграбилних функција, када је кашњење веће од половине интервала.

5) Ријешени су некомплетни инверзни проблеми за операторе Штурм - Лиувиловог типа када је кашњење мање од двије петине интервала, а веће од трећине интервала. У овим проблемима потенцијал је био познат на подинтервалу, односно био је симетричан.

6) Описани су нови отворени проблеми који су од изузетне важности у области инверзне спектралне теорије за операторе са кашњењем.

VI 2. Критичност и коректност тумачења резултата

Резултати истраживања су приказан на јасан и прегледан начин.

VI 3. Теоријски допринос и нови истраживачки резултати.

У дисертацији је комплетно ријешен вишедеценијски проблем у области инверзне спектралне теорије са кашњењем. Презентовани резултати су отворили нова питања везана за некомплетне инверзне проблеме за операторе Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем. Презентовани резултати имају значајну примјену у астрофизици, биофизици и другим природним наукама.

VII ЗАКЉУЧАК И ПРИЈЕДЛОГ

На основу свега што је наведено у Извјештају, Комисија закључује да је докторска дисертација магистра Небојше Ђурића под насловом "Инверзни спектрални проблеми Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем" израђена у складу са образложењем које је кандидат приложио приликом пријаве ове теме. Докторска дисертација је урађена према правилима и принципима научно-истраживачког рада и резултат је оригиналног научног рада кандидата. У њој је доказано да два спектра оператора Штурм-Лиувиловог типа генерисана Дирихле/Нојмановим или Робиновим граничним условима нису довољна да јединствено одреди потенцијал из простора квадратно интеграбилних функција за свако кашњење мање од двије петине интервала.

Будући да је кандидат показао темељно познавање предмета истраживања, те у потпуности одговорио на проблематику која се разматра у дисертацији, Комисија предлаже Научно-наставном вијећу Природно-математичког факултета Универзитета у Бањој Луци и Сенату Универзитета у Бањој Луци да прихвате овај извјештај и одобре јавну одбрану докторске дисертације.

ПОТПИС ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

1. Проф. др Владимир Јовановић В. Јовановић
2. Проф. др Владимир Владичић Владичић
3. Др Биљана Војводић
4. Др Сњежана Максимовић С. Максимовић
5. Проф. др Милош Арсеновић Милош Арсеновић

Бања Лука, 22. 12. 2021.

ИЗДВОЈЕНО МИШЉЕЊЕ: Члан комисије који не жели да потпише извјештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извјештај образложење, односно разлог због којих не жели да потпише извјештај.

Изјава 1

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација

Наслов рада: Инверзни спектрални проблеми Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем.

Наслов рада на енглеском језику: Inverse spectral problems for Sturm-Liuoville-type with a constant delay.

☒ резултат сопственог истраживачког рада,

☒ да докторска дисертација, у цјелини или у дијеловима, није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,

☒ да су резултати коректно наведени и

☒ да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Бањој Луци 07.02.2022.

Потпис докторанта

Небојша Ђурић

Изјава 2

Изјава којом се овлашћује Универзитет у Бањој Луци да докторску дисертацију учини јавно доступном

Овлашћујем Универзитет у Бањој Луци да моју докторску дисертацију под насловом

Инверзни спектрални проблеми Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем.

која је моје ауторско дјело, учини јавно доступном.

Докторску дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – дијелити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – дијелити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

У Бањој Луци 07.02.2022.

Потпис докторанта

Неђељко Ђурић

Изјава 3

Изјава о идентичности штампане и електронске верзије докторске дисертације

Име и презиме аутора: Небојша Ђурић

Наслов рада: Инверзни спектрални проблеми Штурм-Лиувиловог типа са константним кашњењем.

Ментор: Проф. др Милош Арсеновић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације идентична електронској верзији коју сам предао за дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци.

У Бањој Луци 07.02.2022.

Потпис докторанта

Небојша Ђурић