



УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
UNIVERSITY OF BANJA LUKA

АРХИТЕКТОНСКО-ГРАЂЕВИНСКО-ГЕОДЕТСКИ ФАКУЛТЕТ
FACULTY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY



ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА СЛОБОДНИХ ВИБРАЦИЈА ГРЕДНИХ СИСТЕМА У РАВНИ

МАСТЕР РАД

Ментор:

Проф. др Александар Борковић

Коментор:

Проф. др Валентина Голубовић-Бугарски

Кандидат:

Сњежана Миловановић

02МГР/2017

Бања Лука, јануар 2020.



УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ
UNIVERSITY OF BANJA LUKA

АРХИТЕКТОНСКО-ГРАЂЕВИНСКО-ГЕОДЕТСКИ ФАКУЛТЕТ
FACULTY OF ARCHITECTURE, CIVIL ENGINEERING AND GEODESY



ISOGEOMETRIC FREE VIBRATION ANALYSIS OF PLANE BEAMS

MASTER'S THESIS

Supervisor:

Prof. dr Aleksandar Borković

Co-supervisor:

Prof. dr Valentina Golubović-Bugarski

Candidate:

Snježana Milovanović

02MGR/2017

Banja Luka, January 2020.

Информације о ментору и мастер раду:

Ментор: Проф. др Александар Борковић

Коментор: Проф. др Валентина Голубовић-Бугарски

Наслов мастер рада: Изогеометријска анализа слободних вибрација гредних система у равни

Резиме: У раду је изложена изогеометријска теорија на основу које је успостављен нумерички модел за анализу слободних вибрација произвољно закривљених Бернули-Ојлерових и Тимошенкових греда у равни. Изложена теорија је спроведена у систему конвективних координата и геометријски је егзактна, те је као таква погодна и за анализу греда великих нивоа закривљености. У случају Бернули-Ојлерове гредне теорије, усвојени степени слободе су само компонентална помјерања контролних тачака, док је код Тимошенкове гредне теорије било неопходно и увођење ротација. Направљен је и физички модел произвољно закривљене челичне греде са укљештењем на једном крају. Резултати који су добијени експерименталном анализом су употријебљени за верификацију нумеричког модела и добијена су одлична поклапања. Извршена је и детаљна анализа својстава конвергенције примјеном h -, p - и k -побољшања мреже коначних елемената. Генерално, уочена су добра својства конвергенције, као и могућност постизања боље тачности рјешења са мањим бројем степени слободе за више континуитете на границама елемената. Испитивање конвергенције је показало да њена својства у великој мјери зависе и од комплексности почетне геометрије греде, што је потврђено и кроз анализу нормализованих нумеричких дискретних спектра.

Кључне ријечи: Бернули-Ојлерова греда, Тимошенкова греда, произвољно закривљене греде, изогеометријска анализа, слободне вибрације, експериментална модална анализа, конвергенција

Научна област: Механика и теорија конструкција

Научно поље: Грађевинарство

Класификациона ознака (CERIF): T220

Тип одабране лиценце Креативне заједнице (Creative Commons): CC BY-NC-ND

Informations about mentor and master's thesis:

Supervisor: Prof. dr Aleksandar Borković

Co-supervisor: Prof. dr Valentina Golubović-Bugarski

Title of master's thesis: Isogeometric free vibration analysis of plane beams

Abstract: The master's thesis presents the isogeometric theory on which a numerical model for the in-plane free vibration analysis of an arbitrarily curved Bernoulli-Euler and Timoshenko beams is established. The presented theory is geometrically exact, it is formulated in a convective frame of reference, and as such, it is suitable for the analysis of strongly curved beams. In the case of Bernoulli-Euler beam theory, the degrees of freedom are only the component displacements of control points, while in Timoshenko beam theory, the introduction of rotations was necessary. A physical model of a clamped free-form steel beam was also made. The results obtained by the experimental analysis were used to verify the numerical model and excellent matches were obtained. A detailed analysis of the convergence properties was also performed using the h -, p -, and k - refinement techniques. In general, good convergence properties have been observed, as well as the ability to achieve better accuracy of solutions with fewer degrees of freedom for higher continuity at the element boundaries. Convergence testing has shown that its properties depend on the complexity of the initial beam geometry, which was also confirmed through the analysis of normalized numerical discrete spectra.

Key words: Bernoulli-Euler beam, Timoshenko beam, arbitrarily curved beam, isogeometric analysis, free vibrations, experimental modal analysis, convergence

Scientific area: Mechanics and theory of structures

Scientific field: Technical sciences

Classification code (CERIF): T220

Type of Creative Commons licence: CC BY-NC-ND

Садржај:

1. УВОД.....	1
2. Б- СПЛАЈН.....	3
2.1. Особине Б-сплајна.....	4
2.2. Безиерове криве.....	6
2.3. Инсертовање чворова.....	7
2.4. Елевација Б-сплајна.....	8
2.5. Побољшање мреже коначних елемената.....	9
3. НЕУНИФОРМНИ РАЦИОНАЛНИ Б- СПЛАЈН (НУРБС).....	11
3.1. Елевација НУРБС-а и инсертовање чворова.....	13
4. ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА ТЕОРИЈА НОСАЧА.....	14
4.1. Геометрија осе штапа.....	14
4.2. Метрика произвољне тачке попречног пресјека.....	17
4.3. Бернули-Ојлерова теорија.....	17
4.3.1. Матрица крутости Бернули-Ојлеровог гредног елемента.....	23
4.3.2. Матрица маса Бернули-Ојлеровог гредног елемента.....	25
4.4. Тимошенкова теорија.....	26
4.4.1. Матрица крутости Тимошенковог гредног елемента.....	29
4.4.2. Матрица маса Тимошенковог гредног елемента.....	32
4.5. Једначина слободних вибрација.....	33
5. РЕПАРАМЕТРИЗАЦИЈА КРИВЕ.....	34
6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА МОДАЛНА АНАЛИЗА.....	37
6.1. Модално тестирање.....	37
6.1.1. Основни мјерни ланац.....	38
6.1.2. Основне претпоставке модалног тестирања.....	39
6.1.3. Мјерење функција фреквенцијског одзива.....	40
6.2. Модално тестирање челичне греде.....	42
7. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕРИ.....	48
8. ЗАКЉУЧАК.....	92
ЛИТЕРАТУРА.....	94

1. УВОД

С обзиром на постојеће недостатке стандардног изопараметарског метода коначних елемената, у посљедњих петнаест година се изогеометријска анализа наметнула као изузетно прикладна за опис понашања широког спектра конструкција. Као елементи савремених инжењерских конструкција се све чешће користе и произвољно закривљене структуре због својих погодних конструктивних, функционалних и естетских карактеристика.

У стандардном изопараметарском концепту, кинематичко поље и оригинална геометрија се описују интерполационим полиномним функцијама и вриједностима у чворовима коначних елемената. У општем случају, интерполационим приступом је геометрија тијела описана апроксимативно и није тачна између чворних тачака. Ефекат интерполације се умањује прогушћавањем мреже коначних елемената, чиме се условљава конвјергенција ка тачном рјешењу. Изогеометријским приступом се прво врши егзактно описивање геометрије неуниформним рационалним Б-сплајном (НУРБС-ом) који садржи базне функције и контролне тачке. Сукцесивним повезивањем контролних тачака настаје контролни полигон који чини контролну геометрију тијела која нема физички карактер. Истим функцијама којима је геометрија линије тачно описана се врши и описивање деформисане геометрије, [1].

Примјеном изогеометријске анализе произвољно закривљених греда у равни се могу добити резултати еквивалентне тачности у односу на стандардни изопараметарски метод коначних елемената, али примјеном модела са значајно мање степени слободе. Ова погодност проистиче из могућности дефинисања произвољног континуитета на границама елемената, што је једна од основних карактеристика изогеометријске анализе. Дефинисање произвољног континуитета на границама елемената, који је једино условљен континуитетом почетне геометрије омогућава формулацију широке класе Бернули-Ојлерових и Тимошенкових гредних, као и Кирховљевих и Миндлин-Рајснерових коначних елемената љуски и плоча.

Статичка и динамичка анализа понашања произвољно закривљених греда се уобичајено спроводи према техничким теоријама. У овом раду су разматране Бернули-Ојлерова и Тимошенкова теорија штапа. С друге стране, када је ријеч о динамичком понашању, битно је размотрити и модел Рејлијеве гредне теорије која узима у обзир и

утицај ротационе инерције на динамички одговор система. Иако су гредне теорије углавном примјенљиве на витке елементе, појам виткости није једнозначно дефинисан за закривљене греде, те се често за анализу снажно закривљених греда користе неприкладне теорије. Наиме, за анализу снажно закривљених греда је важно узети у обзир комплетну метрику гредног континуума, за шта је потребно ригорозно дефинисати везу између деформације у еквидистантној тачки и референтних деформација осе греде. Овакав приступ доводи до екзактних веза између енергетски коњугованих парова пресјечних сила и референтних деформација што може омогућити добијање резултата повишене тачности.

Тачност виших модова је од изузетне важности у експлицитној динамичкој анализи. Један од значајних проблема стандардног метода коначних елемената је појава деградације тачности ових модова. Примјеном изогеометријске анализе је могуће побољшати тачност фреквенција које припадају оптичком спектру, а самим тим омогућити и прецизнију динамичку анализу.

Теорија представљена у овом раду је у потпуности заснована на монографијама проф. др Глигора Раденковића: „Изогеометријска теорија носача“ и „Коначне ротације и деформације у изогеометријској теорији носача“, на основу којих су детаљно изведени изрази потребни за анализу слободних вибрација раванских греда. За потребе анализе је кориштен рачунарски код, који је такође заснован на теорији изложеној у [1] и [2]. Истраживање је вршено изогеометријским приступом, који је развијен 2005., [3] и који се од тада користи у готово свим областима механике, [4]. Последњих година су урађени многобројни доприноси у области изогеометријске анализе закривљених греда и велики број се односи на Тимошенкове гредне моделе, [5]. Раванске Бернули-Ојлерове греде су анализиране у [6], гдје су откривене интересантне карактеристике оваквих модела и гдје је вршена и процјена реда конвергенције. Процедура репараметризације која може довести до побољшања нумеричких дискретних спектра је истражена у [7].

2. Б-СПЛАЈН

Б-сплајн криве су полиномне функције дефинисане као линеарна комбинација N базних функција:

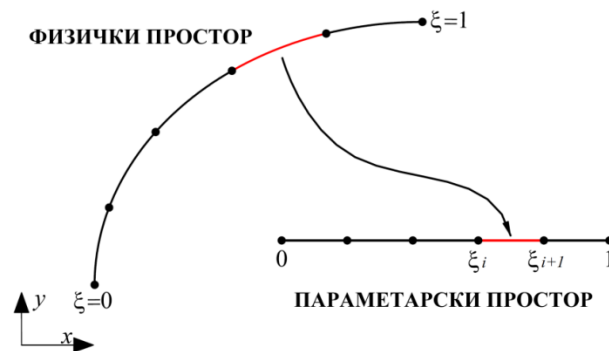
$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i, \quad (1)$$

при чему $B_{i,p}(\xi)$ представљају базне функције степена p , док су \mathbf{P}_i контролне тачке, [8].

Базне функције сплајна су дефинисане чворним вектором којег формира неоппадајући низ реалних бројних вриједности параметра ξ :

$$\xi^T = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \quad \dots \quad \xi_i \quad \dots \quad \xi_{N+p+1}], \quad (2)$$

гдје ξ_i представља i -ти чвор, $i=1, 2, \dots, N+p+1$. Компоненте чворног вектора дијеле параметарски простор на интервале и имају, такође, своју презентацију и у физичком простору, Слика 1. Зависно од тога да ли су интервали у параметарском простору равномерно распоређени или не, чворни вектор може бити униформан и неуниформан, [9]. Уколико се у чворном вектору налази поновљена вриједност параметра ξ , ријеч је о мултиплицираном чвору, при чему ће се мултиплицитет чвора у даљем тексту означавати са m . Ако је мултиплицитет првог и последњег чвора у чворном вектору $p+1$, онда се такав чворни вектор назива отвореним чворним вектором.



Слика 1. Физички и параметарски простор линије

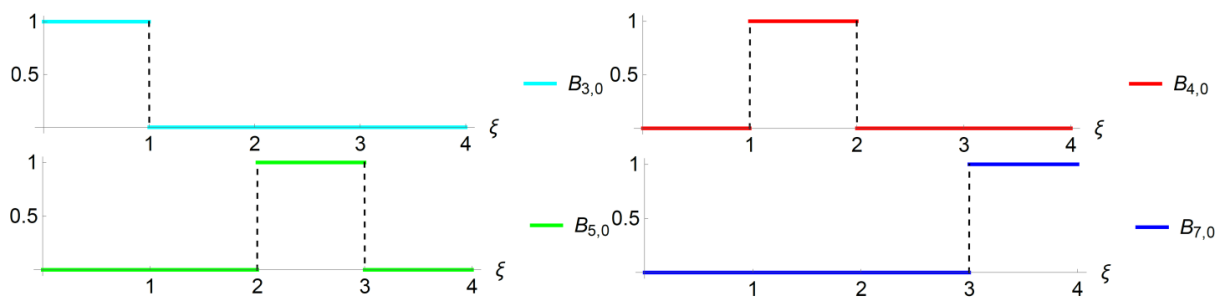
Базне функције се могу одредити рекурзивно почевши са степеном полинома $p=0$:

$$B_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{у супротном} \end{cases}, \quad (3)$$

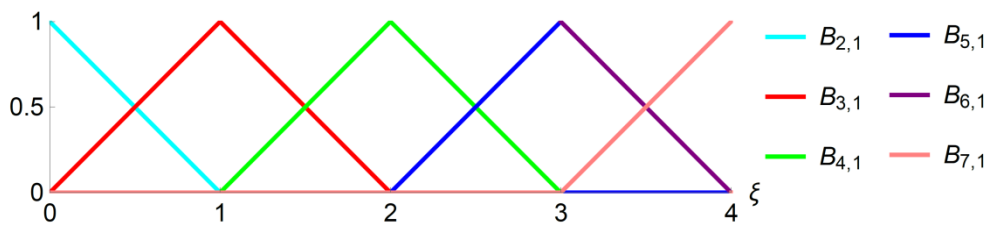
док су за степене полинома $p=1,2,3,\dots$, дефинисане Кокс де Боровом рекурзивном формулом:

$$B_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} B_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} B_{i+1,p-1}(\xi). \quad (4)$$

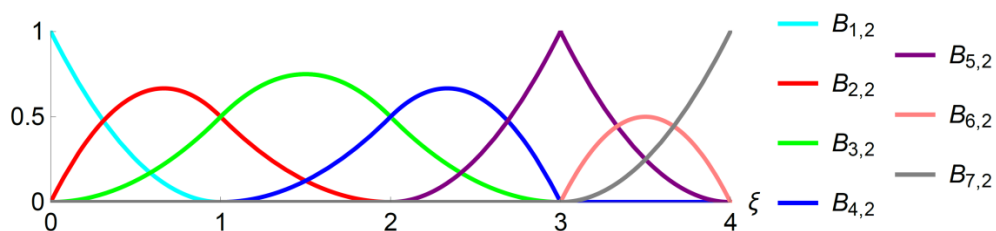
Добијање базних функција примјеном Кокс де Боровог алгоритма је показано кроз примјер гдје су дефинисани степен полинома $p=2$ и отворени униформни чворни вектор $\xi^T=[0\ 0\ 0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4]$, Слика 2 - Слика 4.



Слика 2. Базне функције степена $p=0$



Слика 3. Базне функције степена $p=1$



Слика 4. Базне функције степена $p=2$

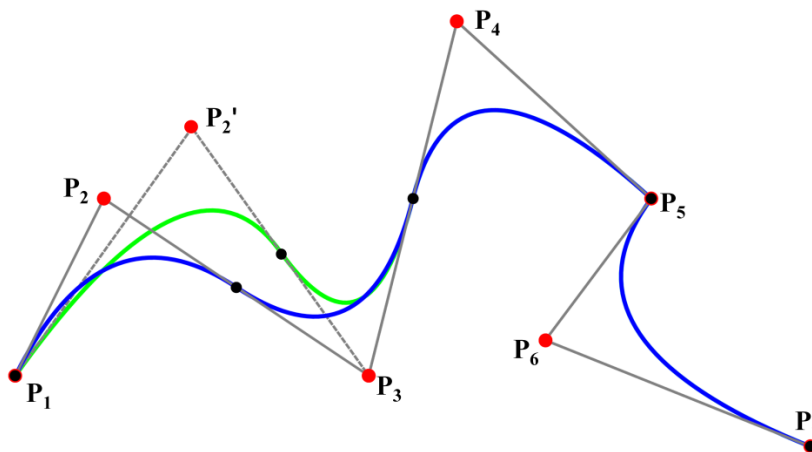
2.1. Особине Б-сплајна

На особине Б-сплајна утичу директно особине одговарајућих базних функција дефинисаних чворним вектором. Неке од битнијих особина базних функција су: њихова ненегативност на читавом интервалу $\xi_1-\xi_{N+p+1}$, на интервалу $\xi_i-\xi_{i+1}$ је максимално $p+1$ базна функција различита од нуле и $B_{i,p}(\xi)=0$ за сваку вриједност

параметра ζ која је изван интервала $\zeta_i - \zeta_{i+p+1}$. Такође, веома битно својство базних функција је да је њихова сума за било коју вриједност параметра ζ једнака јединици, што омогућава и описивање крутих транслација и ротација, [1]. Ове особине се могу лако уочити на приказаним базним функцијама са Сликe 4.

С обзиром да сваки од интервала линије представља и један изогеометријски коначни елемент, посебно је важан и континуитет базних функција на границама елемената. У чвору чији је мултиплицитет m , базне функције задовољавају континуитет C^{p-m} , [3].

На наредној слици приказана је Б-сплајн линија (плава линија) састављена од четири елемента којој одговарају базне функције са слике 4 и контролне тачке P_1, P_2, \dots, P_7 . Свакој контролној тачки је придружена по једна базна функција, па је дејство те контролне тачке ограничено на одређени интервал сплајна. Тако се, помјерањем контролне тачке P_2 у неки нови положај P_2' , крива мијења само на интервалу 0-2, односно интервалу у коме је одговарајућа базна функција различита од нуле (зелена линија).



Слика 5. Б-сплајн линија састављена од четири елемента

Континуитет криве потиче директно од континуитета базних функција и зависи од мултиплицитета чворова чворног вектора, те је у сваком чвору задовољен континуитет C^{p-m} , [9]. Сукцесивним спајањем контролних тачака настаје контролни полигон, приказан сивом линијом. Како су базне функције дефинисане отвореним чворним вектором, контролни полигон тангира криву на почетку и на крају, и у чворовима гдје је остварен континуитет C^1 (чворови 2 и 3) или континуитет C^0 (чвор 4) гдје и контролна тачка P_5 лежи на самој геометрији.

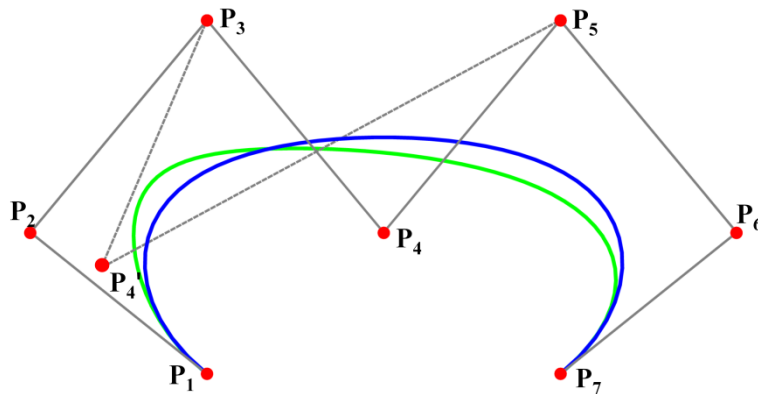
2.2. Безиерове криве

Безиерове криве представљају специјалан случај Б-сплајна, односно оне представљају Б-сплајн линију дефинисану отвореним чворним вектором који нема унутрашњих чворова и дефинисане су као:

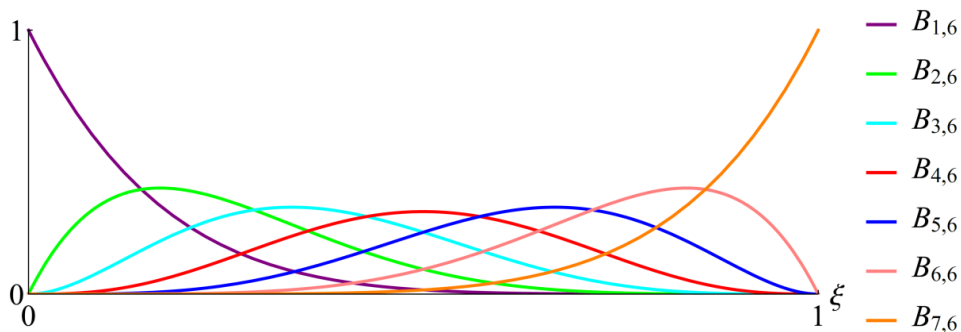
$$P(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} B_{i,p}(\xi) P_i, \quad (5)$$

при чему $B_{i,p}(\xi)$ представљају Бернштајнове базе степена p , док су P_i контролне тачке, [9].

Дејство базних функција Безиерове криве се простире дуж читавог интервала што је приказано кроз примјер криве дефинисане отвореним чворним вектором $\xi^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, Слика 6 и Слика 7.



Слика 6. Безиерова крива степена $p=6$



Слика 7. Бернштајнове базе дефинисане отвореним чворним вектором

$$\xi^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

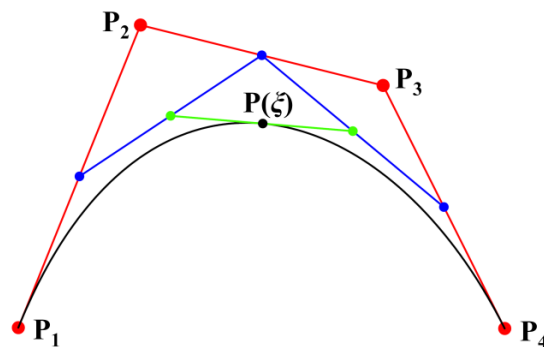
Сваку Безиерову криву произвољног степена p је могуће представити као линеарну комбинацију кривих нижег степена, односно:

$$P_p(\xi) = (1-\xi)P_{p-1}(\xi) + \xi P_{p-1}(\xi), \quad (6)$$

при чему је:

$$P_{p-1}(\xi) = \sum_{k=1}^p B_k(\xi) \mathbf{P}_k. \quad (7)$$

На Слици 8 је приказана кубна Безиерова крива која настаје као линеарна функција квадратне криве.



Слика 8. Кубна Безиерова крива као линеарна функција квадратне криве

2.3. Инсертовање чворова

У већ постојећи чворни вектор ξ је могуће уврстити произвољан број чворова, али тако да непадајући низ бројних вриједности остане очуван. Приликом процедуре инсертовања чворова не долази до промјене оригиналне геометрије, већ само до повећања броја контролних тачака и броја базних функција. Како би се очувала почетна геометрија, координате контролних тачака се одређују линеарном интерполацијом између постојећих, што слиједи из услова о непромијењеној поларној форми и линеарног својства Б-сплајна, [1].

Након што се у чворни вектор ξ инсертује произвољан број нових чворова k , новонастали чворни вектор се може записати као:

$$\bar{\xi}^T = [\bar{\xi}_1 \quad \bar{\xi}_2 \quad \dots \quad \bar{\xi}_{N+k+p+1}], \quad (8)$$

при чему су број базних функција и број контролних тачака $N+k$.

Базне функције се могу наћи помоћу Кокс де Боровог алгоритма, док се вектор контролних тачака добија као:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{M}\mathbf{P}, \quad (9)$$

гдје је матрица \mathbf{M} реда $(N+k) \times N$ и њени елементи су дати као:

$$M_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \xi_j < \bar{\xi}_i < \xi_{j+1}, \\ 0 & \bar{\xi}_i < \xi_j \wedge \bar{\xi}_i > \xi_{j+1}, \end{cases} \quad (10)$$

$$M_{ij}^{r+1} = \frac{\bar{\xi}_{i+r} - \xi_j}{\xi_{j+r} - \xi_j} M_{ij}^r + \frac{\bar{\xi}_{j+r+1} - \bar{\xi}_{i+r}}{\xi_{j+r+1} - \xi_{j+1}} M_{ij+1}^r \quad (r = 0, 1, 2, \dots, p-1).$$

Базне функције се могу одредити и из услова непромијењености оригиналне геометрије, што се векторски може написати као:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{P} = \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M}\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{V}^T = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{M}^T \bar{\mathbf{V}}, \quad (11)$$

2.4. Елевација Б-сплајна

С обзиром на својство линеарности базних функција, на свакој Б-сплајн кривој је могуће извршити елевацију, односно подизање степена полинома без промјене њене почетне геометрије, [1]. У случају Безиерове криве, базне функције се могу добити помоћу Кокс де Боровог алгоритма, док се контролне тачке $\bar{\mathbf{P}}_i$ добијају као:

$$\bar{\mathbf{P}}_i = \frac{i-1}{n+1} \mathbf{P}_{i-1} + \frac{n+2-i}{n+1} \mathbf{P}_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n+2), \quad (12)$$

при чему је $n+1$ степен до којег се врши елевација, односно n је степен полинома почетне криве.

У случају произвољног Б-сплајна степена n , дефинисаног неуниформним отвореним чворним вектором, процедура елевације садржи неколико корака. Прво је потребно повећати мултиплицитет свих чворова за један, како би се добио чворни вектор елевираниог сплајна. Затим се врши мултиплицирање само унутрашњих чворова почетног чворног вектора до степена полинома n , чиме се оригинални сплајн декомпонује на Безиерове криве. У наредном кораку врши се елевација свих Безиерових кривих на наредни полиномни степен $n+1$. Затим се врши уклањање сувишних чворова, односно свођење чворног вектора на облик добијен у првом кораку, те се успоставља зависност између контролних тачака елевираниог и почетног сплајна.

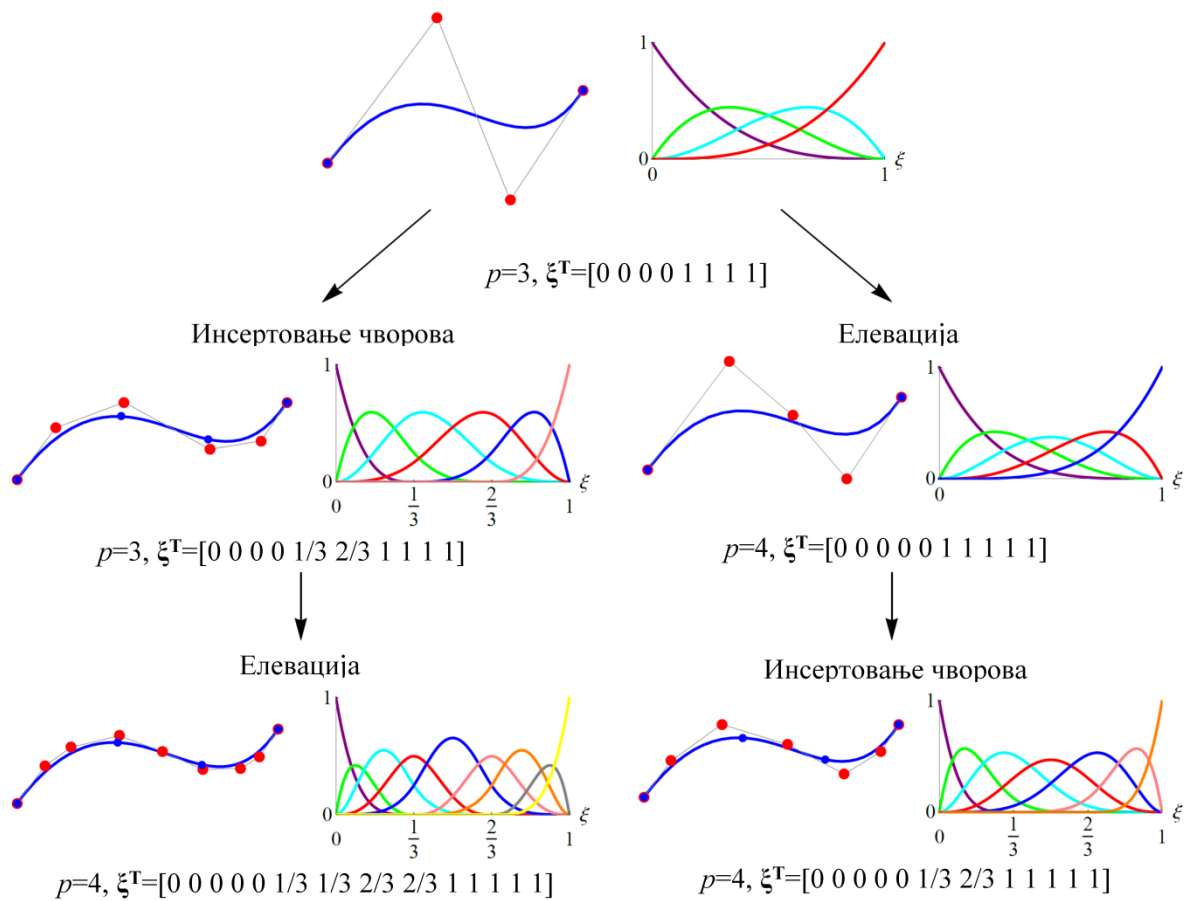
2.5. *Побољшање мреже коначних елемената*

Побољшање мреже коначних елемената у изогеометријској анализи (ИГА) је могуће извршити кроз h -, p - и k - технике, [4]. Ове технике су засноване на претходно изложеним процедурама инсертовања чворова и елевације сплајна.

Кроз h - технику побољшања мреже се врши повећавање броја коначних елемената, док континуитет на границама елемената и степен полинома остају непромијењени. Она се заснива на процедури инсертовања чворова. Свака нова вриједност параметра ζ која је инсертована дијели постојећи интервал, односно елемент на два мања.

Побољшање мреже је могуће вршити и кроз p - технику која се заснива на елевацији сплајна. Она резултује подизањем степена полинома, док континуитет и број елемената остају исти.

У ИГА-и се посебно истиче k -побољшање које омогућава дефинисање произвољног континуитета на границама елемената. Предности ове технике су приказане на слици 9 на примјеру кубног сплајна. Наиме, елевација криве са претходно инсертованим чворовима као резултат даје повећање степена полинома и очување континуитета, па је у случају ове криве степен подигнут на $p=4$ и остао је задовољен континуитет C^2 . Уколико се прво изврши елевација сплајна, а затим инсертовање чворова, добија се крива четвртог степена, са истим бројем елемената као у претходном случају, али произвољно дефинисаним континуитетом, у овом примјеру C^1 . Као резултат смањен је број базних функција, што нарочито долази до изражаја код већег броја елемената и вишег степена полинома.



Слика 9. Приказ h -, p - и k - техника побољшања мреже коначних елемената

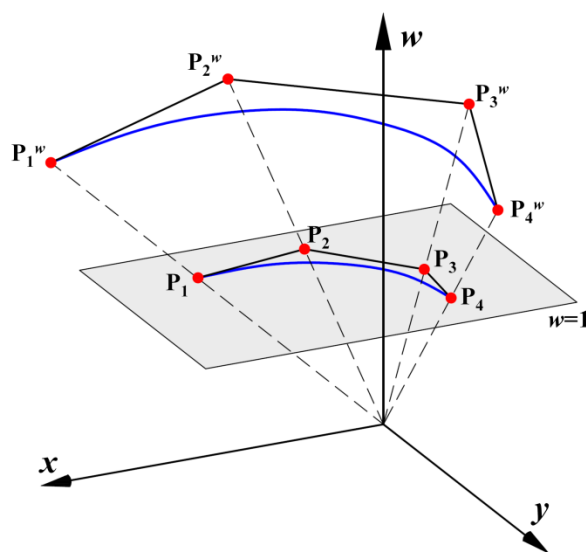
3. НЕУНИФОРМНИ РАЦИОНАЛНИ Б- СПЛАЈН (НУРБС)

Обичним Б-сплајном се може егзактно представити ма који алгебарски полином, док је у случају рационалних функција неопходно формулисање општијег Неуниформног рационалног Б-сплајна. НУРБС крива је дефинисана као:

$$\mathbf{r}(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=1}^N B_{j,p}(\xi) w_j} = \sum_{i=1}^N R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i, \quad (13)$$

гдје је w_i тежински фактор придружен i -тој контролној тачки, а $R_{i,p}$ је рационална базна функција степена p , [8].

НУРБС крива, дефинисана изразом (13) у \mathbb{R}^d простору се добија пројективном трансформацијом Б-сплајн криве из \mathbb{R}^{d+1} простора. Геометријска конструкција дводимензионалне НУРБС криве је приказана на Слици 10.



Слика 10. Конструисање дводимензионалне НУРБС криве

Вектор положаја произвољне тачке Б-сплајна у тродимензионалном простору је дефинисан са три координате $\mathbf{r}^w = [x, y, w]$, док је Б-сплајн крива дефинисана као:

$$\mathbf{r}^w = \sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i^w, \quad (14)$$

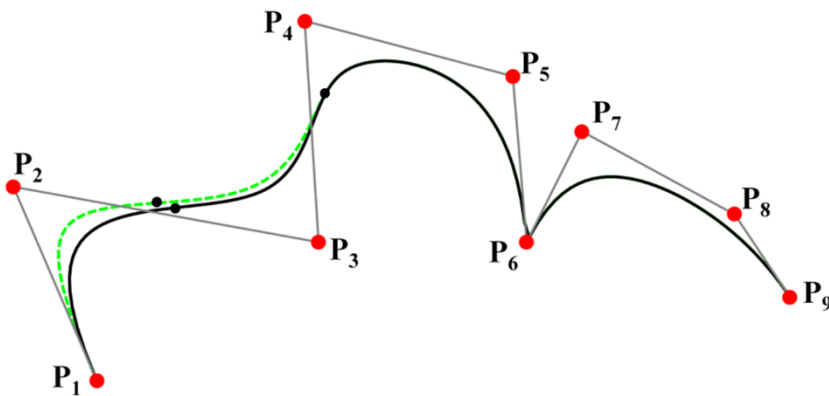
при чему су \mathbf{P}_i^w контролне тачке у тродимензионалном простору. У даљњој анализи ће бити кориштене тежинске координате, па је вектор положаја одређен као

$\mathbf{r}^w = [wx, wy, w]$ и $\mathbf{P}_i^w = w_i \mathbf{P}_i$. НУРБС крива се добија пројекцијом тачака Б-сплајна на раван $w=1$, односно свака тачка криве је пресјек линије која спаја тачке тродимензионалне криве и координатни почетак:

$$\mathbf{r}(\xi) = \frac{\mathbf{r}^w(\xi)}{w(\xi)} = \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,p}(\xi) w_i \mathbf{P}_i}{\sum_{j=1}^N B_{j,p}(\xi) w_j} = \sum_{i=1}^N R_{i,p}(\xi) \mathbf{P}_i. \quad (15)$$

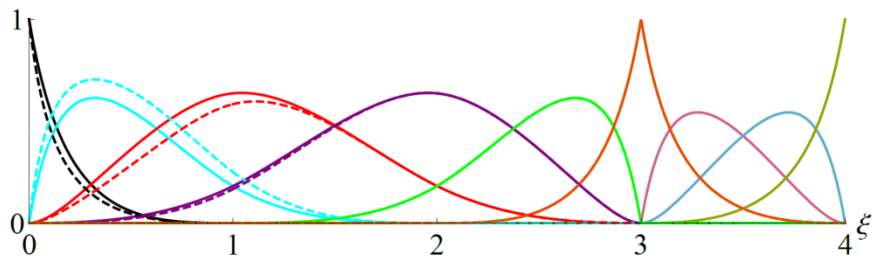
У случају када су сви тежински фактори придружени контролним тачкама једнаки, рационалне базне функције постају базне функције основног сплајна, те се може закључити да је Б-сплајн заправо специјалан случај НУРБС-а, [1]. Самим тим, све особине Б-сплајн криве и њених базних функција важе и за НУРБС и рационалне базе.

На наредној слици је приказана кубна НУРБС крива (црна линија) дефинисана отвореним неуниформним чворним вектором $\xi^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 4]$ и тежинским факторима $w^T = [1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1]$. Контролни полигон је тангентан на криву на почетку и крају, као и у чвору 3, гдје је задовољен континуитет C^0 . У чворовима 1 и 2 је задовољен континуитет C^2 , с обзиром на мултиплицитет чворова. Повећавањем тежинског фактора друге контролне тачке на $w_2=3$, крива се приближава датој контролној тачки и мијења само на интервалу (0-2) гдје су одговарајуће базне функције различите од нула.



Слика 11. НУРБС крива састављена од четири елемента

Одговарајуће рационалне базне функције су приказане на слици 12 за случај $w_2=2$ (пуна линија) и $w_2=3$ (испрекидана линија).



Слика 12. Рационалне базне функције степена $p=3$

3.1. Елевација НУРБС-а и инсертовање чворова

Приказане процедуре инсертовања чворова и елевације степена полинома важе за основни Б-сплајн. У случају Неуниформног рационалног Б-сплајна су неопходне додатне трансформације, односно превођење d - димензионалне рационалне криве у $d+1$ - димензионални Б-сплајн. Затим се врше тражене процедуре: инсертовање чворова елевација степена полинома, Безијева декомпозиција, уклањање сувишних чворова, те поновна трансформација Б-сплајна на d - димензионални НУРБС.

4. ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА ТЕОРИЈА НОСАЧА

За разлику од класичног изопараметарског приступа, изогеометрија егзактно описује почетну геометрију, а затим исте те функције користи и за описивање деформисане геометрије, [1]. Егзактан опис геометрије се заснива на функцијама Б-сплајна или, у општем случају, НУРБС-а. На Слици 13. је приказан примјер осе штапа егзактно описане базним сплајном:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N R_i(\xi) \mathbf{r}_i, \quad (16)$$

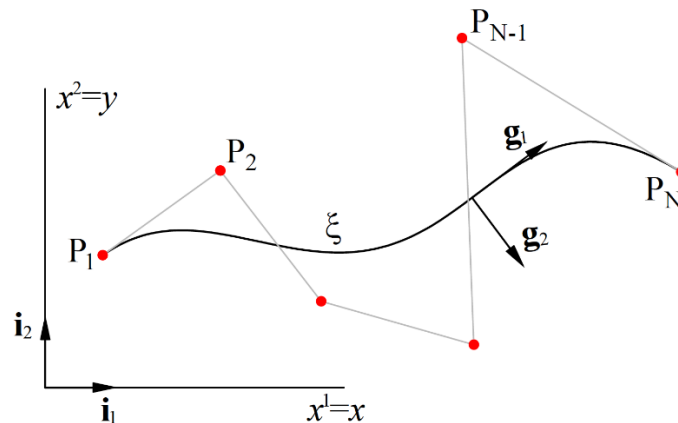
при чему $R_i(\xi)$ представљају рационалне базе степена, док је \mathbf{r}_i вектор положаја i -те контролне тачке сплајна. Вектор положаја контролне тачке је дефинисан са:

$$\mathbf{r}_i = x_i^m \mathbf{i}_m, \quad (17)$$

док је вектор положаја произвољне тачке осе штапа дат као:

$$\mathbf{r}(\xi) = x^m(\xi) \mathbf{i}_m, \quad (18)$$

при чему \mathbf{i}_m представљају јединичне базисе Декартових координата x^m . Обзиром да се у овом раду посматрају равански гредни системи, индекс m узима вриједности 1 и 2 ($x^1 = x$ и $x^2 = y$).



Слика 13. Геометрија осе штапа

4.1. Геометрија осе штапа

Разматрања гредног елемента су спроведена у систему конвективних координата, што је заправо координата која има материјални карактер у сваком тренутку времена.

Систем конвективних координата је дефинисан параметром ξ , главним осама инерције попречног пресека η и ζ , те одговарајућим базним векторима \mathbf{g}_1 , \mathbf{g}_2 и \mathbf{g}_3 .

За све даљње анализе, неопходно је познавање комплетне метрике греде, што подразумева егзактно срачунавање базних вектора и метричког тензора у свакој тачки штапа и њихово представљање преко одговарајућих величина осе штапа. Квадрат диференцијалног прираштаја лучне координате одређен је као:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^m dx_m. \quad (19)$$

Како је:

$$dx^m = x_{,1}^m d\xi, \quad x_{,1}^m = \sum_{i=1}^N \frac{dR_i(\xi)}{d\xi} x_i^m, \quad (20)$$

из израза (19) слиједи да је:

$$ds^2 = (x_{,1}^m)^2 d\xi^2 = g_{11} d\xi^2 \rightarrow ds = \sqrt{g_{11}} d\xi, \quad (21)$$

чиме је дефинисана веза између природног и конвективног координатног система.

Базни вектор осе штапа у правцу тангенте је дефинисан као:

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{r}_{,1} = x_{,1}^m \mathbf{i}_m, \quad \mathbf{g}_1 = \frac{d\mathbf{r}(\xi)}{ds} \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{x_{,1}^m x_{m,1}} \mathbf{t}. \quad (22)$$

Метрички тензор који укључује криволинијску ξ и праволинијску η координату и њему реципрочан метрички тензор имају облик:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g^{11} = \frac{1}{g_{11}}, \quad (23)$$

с обзиром да је базни вектор \mathbf{g}_2 јединичног интензитета и поклапа се са вектором нормале \mathbf{n} , односно управан је на базни вектор \mathbf{g}_1 ($\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_2 = 1$ и $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_2 = 0$). Компонента метричког тензора g_{11} , која у овом случају представља и детерминанту метричког тензора, се добија као:

$$g_{11} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = x_{,1}^m x_{m,1}, \quad g_{11} = \sum_{i=1}^N R_{i,1}(\xi) x_i^m \sum_{j=1}^N R_{j,1}(\xi) x_j^m = \sum_{i,j=1}^{N,N} R_{i,1}(\xi) R_{j,1}(\xi) x_i^m x_j^m. \quad (24)$$

Кориштењем Френеових образаца који за просторну криву у природној координати имају облик:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}_{,s} \\ \mathbf{n}_{,s} \\ \mathbf{b}_{,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 \\ K & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

гдје су K и τ модули вектора прве кривине (флексије) и друге кривине (торзије), може се написати да је:

$$\mathbf{n} = \mathbf{g}_2 = \frac{1}{K} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{K} \frac{d\xi}{ds} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g}} \right) = \frac{1}{K\sqrt{g}} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\mathbf{g}_1}{\sqrt{g}} \right). \quad (26)$$

Из израза (26) слиједи:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2 &= \frac{1}{K\sqrt{g}} \frac{\mathbf{g}_{1,1}\sqrt{g} - \frac{g_{,1}}{2\sqrt{g}}\mathbf{g}_1}{g} = \frac{1}{gK} (\mathbf{g}_{1,1} - \frac{g_{,1}}{2g}\mathbf{g}_1) \\ \rightarrow \mathbf{g}_2 &= \frac{1}{\bar{K}} (\mathbf{g}_{1,1} - \Gamma_{11}^1 \mathbf{g}_1), \quad \bar{K} = gK. \end{aligned} \quad (27)$$

Кристофелов симбол повезаности друге врсте је једнак:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{d\sqrt{g_{11}}}{ds} = \frac{d\sqrt{g_{11}}}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{2} \frac{g_{,1}}{g_{11}} = x_{,1}^m x_{m,11} g^{11}. \quad (28)$$

Промјена тангенцијалног базиса дуж координате ξ је одређена као:

$$\mathbf{g}_{1,1} = \Gamma_{11}^1 \mathbf{g}_1 + \bar{K} \mathbf{g}_2, \quad \mathbf{g}_{1,1} = \Gamma_{11}^k \mathbf{g}_k. \quad (29)$$

Вектор нормале, односно базни вектор \mathbf{g}_2 се може записати као:

$$\mathbf{g}_2 = x_{,2}^m \mathbf{i}_m = x_{m,2} \mathbf{i}^m, \quad (30)$$

при чему је:

$$x_{,2}^m = \frac{1}{\bar{K}} (x_{,11}^m - \Gamma_{11}^1 x_{,1}^m) = x_{m,2} = \frac{1}{\bar{K}} (x_{m,11} - \Gamma_{11}^1 x_{m,1}). \quad (31)$$

Ове величине се могу изразити у свакој тачки осе штапа и преко базних функција НУРБС-а као:

$$\Gamma_{11}^1(\xi) = \frac{\sum_{i,j}^{N,N} R_{i,1}(\xi) R_{j,1}(\xi) x_i^m x_j^m}{N \sum_{i,j}^{N,n} R_{i,1}(\xi) R_{j,1}(\xi) x_i^m x_j^m}, \quad \bar{K}(\xi) = \left[\sum_{i,j}^{N,N} R_{i,1}(\xi) [R_{j,1}(\xi) - \Gamma_{11}^1(\xi) R_{j,1}(\xi)] x_i^m x_j^m \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

Диференцирањем базног вектора \mathbf{g}_2 по координати ξ се добија:

$$\mathbf{g}_{2,1} = \frac{d\mathbf{n}}{d\xi} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{g} (-K\mathbf{t}) = -K\mathbf{g}_1, \quad \Gamma_{21}^1 = -K, \quad \Gamma_{21}^2 = 0. \quad (33)$$

4.2. Метрика произвољне тачке попречног пресека

Вектор положаја произвољне тачке попречног пресека на η одстојању од тежишта пресека одређен је као:

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\xi, \eta) = \mathbf{r}(\xi) + \eta \mathbf{g}_2. \quad (34)$$

Диференцирањем по координати ξ се добија базис:

$$\bar{\mathbf{g}}_1 = \bar{\mathbf{r}}_{,1} = \mathbf{g}_1 + \eta \mathbf{g}_{2,1}, \quad (35)$$

Одакле се, користећи релацију (33), може добити:

$$\bar{\mathbf{g}}_1 = \mathbf{g}_1 - \eta K \mathbf{g}_1 = g_0 \mathbf{g}_1, \quad g_0 = 1 - \eta K. \quad (36)$$

4.3. Бернули-Ојлерова теорија

У овом дијелу рада, изложена је Бернули-Ојлерова теорија штапа у којој, према хипотези о равним пресецима, раван пресјек који је управан на недеформисану осу штапа и после деформације остаје раван, непромијењеног облика и управан на деформисану осу штапа. Попречни пресјек лежи у нормалној равни деформисане осе штапа, па је, сходно томе, могуће формулисање елемената без увођења ротације као генералисане координате.

Вектор положаја произвољне тачке осе штапа у деформисаној конфигурацији је одређен као:

$$\mathbf{r}^*(\xi) = \mathbf{r}(\xi) + \mathbf{u}(\xi), \quad (37)$$

гдје је $\mathbf{u}(\xi)$ вектор помјерања изражен у односу на Декартов координатни систем, чија је промјена унутар елемента описана истим базним функцијама као и геометрија осе штапа, односно:

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=1}^N R_i(\xi) \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u} = u^m \mathbf{i}_m = u_m \mathbf{i}^m, \quad \mathbf{u} = \hat{u}_n \mathbf{g}^n. \quad (38)$$

Уврштавањем у израз (37) слиједи:

$$\mathbf{r}^*(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}_i) = \sum_{i=1}^N R_i(\xi) \mathbf{r}_i^*, \quad (39)$$

одакле се диференцирањем по координати ξ добија:

$$\mathbf{g}_1^* = \mathbf{g}_1 + \mathbf{u}_{,1} = (x_{,1}^m + u_{,1}^m) \mathbf{i}_m = x_{,1}^{*m} \mathbf{i}_m, \quad x^{*m} = x^m + u^m, \quad g_{11}^* = x_{,1}^{*m} x_{m,1}^*. \quad (40)$$

Базни вектор \mathbf{g}_2 је јединичног интензитета и у деформисаној конфигурацији и одређен је као:

$$\mathbf{g}_2^* = \mathbf{g}_2 + \mathbf{u}_{,2}, \quad (41)$$

гдје је:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,2} &= -(\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,1}) \mathbf{g}_1^1 = -\frac{1}{g_{11}} (\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,1}) \mathbf{g}_1 \\ \rightarrow u_{,2} &= -\frac{1}{g_{11}} x_{,2}^n x_{m,1} u_{n,1} = -B_m^n u_{n,1}, \quad B_m^n = \frac{1}{g_{11}} x_{,2}^n x_{m,1}. \end{aligned} \quad (42)$$

Промјена тангенцијалног базиса по координати ξ и модул вектора кривине су дефинисани следећим изразима:

$$\mathbf{g}_{1,1}^* = \Gamma_{11}^{*1} \mathbf{g}_1^* + \bar{K}^* \mathbf{g}_2^*, \quad \bar{K}^* = \mathbf{g}_{1,1}^* \cdot \mathbf{g}_2^*. \quad (43)$$

Вектор положаја тачке на η одстојању од осе штапа у деформисаном положају је дат као:

$$\bar{\mathbf{r}}^* = \mathbf{r}^*(\xi, \eta) = \mathbf{r}^*(\xi) + \eta \mathbf{g}_2^*. \quad (44)$$

Према Бернули-Ојлеровој теорији постоји деформација у тангенцијалном правцу која је у оси штапа једнака полуразлици компонената метричког тензора у деформисаној и почетној конфигурацији:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2} (g_{11}^* - g_{11}), \quad \varepsilon_{11} = x_{,1}^m u_{m,1} + \frac{1}{2} u_{,1}^m u_{m,1}, \quad (45)$$

односно за случај линеарне анализе:

$$\varepsilon_{11} = x_{,1}^m u_{m,1}. \quad (46)$$

Деформација савијања је дата као разлика кривина деформисаног и почетног положаја:

$$\kappa = \bar{K}^* - \bar{K} = \mathbf{g}_{1,1}^* \cdot \mathbf{g}_2^* - \mathbf{g}_{1,1} \cdot \mathbf{g}_2, \quad (47)$$

односно:

$$\kappa = (\mathbf{g}_{1,1} + \mathbf{u}_{,11}) \cdot (\mathbf{g}_2 + \mathbf{u}_{,2}) - \mathbf{g}_{1,1} \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_{1,1} \cdot \mathbf{u}_{,2} + \mathbf{u}_{,11} \cdot \mathbf{g}_2 = (\Gamma_{11}^1 \mathbf{g}_1 + \bar{K} \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{u}_{,2} + \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,11}, \quad (48)$$

при чему су занемарени квадрати градијената помјерања. С обзиром да је деформација у правцу нормале према Бернули-Ојлеровој теорији $\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,2} = 0$, слиједи:

$$\kappa = \mathbf{u}_{,11} \cdot \mathbf{g}_2 + \Gamma_{11}^1 \mathbf{u}_{,2} \cdot \mathbf{g}_1. \quad (49)$$

Из услова о управности попречног пресека слиједи да је:

$$\gamma_{12} = \mathbf{u}_{,2} \cdot \mathbf{g}_1 + \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_{,2} \cdot \mathbf{g}_1 = -\mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2, \quad (50)$$

односно деформација савијања постаје:

$$\kappa = (\mathbf{u}_{,11} - \Gamma_{11}^1 \mathbf{u}_{,1}) \cdot \mathbf{g}_2 = (u_{m,11} - \Gamma_{11}^1 u_{m,1}) x_{,2}^m. \quad (51)$$

Аналогно изразу (36), тангентни базни вектор произвољне тачке попречног пресека у деформисаној конфигурацији је:

$$\bar{\mathbf{g}}_1^* = (1 - \eta K^*) \mathbf{g}_1^* \rightarrow \bar{\mathbf{g}}_1^* = g_0^* \mathbf{g}_1^*, \quad g_0^* = 1 - \eta K^*. \quad (52)$$

Узимајући да је промјена кривине $\chi = K^* - K$, може се написати:

$$g_0^* = 1 - \eta(K + \chi) = g_0 - \eta \chi. \quad (53)$$

Вектор помјерања еквиливантне тачке попречног пресека је дефинисан као:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \eta(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_2), \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{g}_3, \quad (54)$$

гдје је $\boldsymbol{\varphi}$ вектор инфинитезималних ротација, док је:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \hat{u}_2 \Big|_1, \quad (55)$$

при чему је коваријантни извод компоненте помјерања \hat{u}_2 по координати ζ :

$$\hat{u}_2 \Big|_1 = \hat{u}_{2,1} - \Gamma_{21}^k \hat{u}_k. \quad (56)$$

Узимајући у обзир израз (38), компонента \hat{u}_2 се може изразити као:

$$\hat{u}_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_2. \quad (57)$$

На основу претходног израза и израза (33), слиједи:

$$\begin{aligned} \hat{u}_2|_1 &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_2)_{,1} - \Gamma_{21}^1 \hat{u}_1 = \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_{2,1} - \Gamma_{21}^1 \hat{u}_1 = \\ &= \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2 + \mathbf{u} \cdot \Gamma_{21}^1 \mathbf{g}_1 - \Gamma_{21}^1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}_1 = \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2. \end{aligned} \quad (58)$$

Користећи претходно изведене релације, вектор помјерања произвољне тачке попречног пресека се може написати као:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \eta(\varphi \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2) = \mathbf{u} - \eta \varphi \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{g}_1 = \mathbf{u} - \eta \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} (\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,1}) \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{g}_1 = \mathbf{u} - \eta \frac{1}{g_{11}} (\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{u}_{,1}) \mathbf{g}_1. \quad (59)$$

Компонента метричког тензора у еквилибралној тачки попречног пресека у почетној и деформисаној конфигурацији је дата као:

$$\bar{g}_{11} = \bar{\mathbf{g}}_1 \cdot \bar{\mathbf{g}}_1 = (1 - \eta K)^2 \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = g_0^2 g_{11}, \quad \bar{g}_{11}^* = (1 - \eta K^*)^2 \mathbf{g}_1^* \cdot \mathbf{g}_1^* = g_0^{*2} g_{11}^*, \quad (60)$$

па је деформација произвољне тачке попречног пресека:

$$\varepsilon_{11}(\eta) = \bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{2} (\bar{g}_{11}^* - \bar{g}_{11}) = \frac{1}{2} (g_0^{*2} g_{11}^* - g_0^2 g_{11}). \quad (61)$$

Уврштавањем релације (53) у претходни израз слиједи:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{2} ((g_0 - \eta \chi)^2 g_{11}^* - g_0^2 g_{11}) = \frac{1}{2} (g_0^2 g_{11}^* - 2g_0 \eta \chi g_{11}^* - g_0^2 g_{11}) = \\ &= \frac{1}{2} g_0^2 (g_{11}^* - g_{11}) - \eta \chi g_0 g_{11}^* = g_0 (g_0 \varepsilon_{11} - \eta \chi g_{11}^*), \end{aligned} \quad (62)$$

при чему су занемарени квадрати промјене кривине.

Промјена кривине се, узимајући у обзир релацију (45), може записати као:

$$\begin{aligned} \kappa &= \bar{K}^* - \bar{K} = g_{11}^* K^* - g_{11} K = (g_{11} + 2\varepsilon_{11})(K + \chi) - g_{11} K = 2\varepsilon_{11} K + g_{11} \chi \\ &\rightarrow g_{11} \chi = \kappa - 2\varepsilon_{11} K, \end{aligned} \quad (63)$$

уз занемарење квадрата деформацијских величина.

Уврштавањем израза (63) и (45) у израз (62) може се добити:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}_{11} &= g_0 [g_0 \varepsilon_{11} - \eta \chi (g_{11} + 2\varepsilon_{11})] = g_0 (g_0 \varepsilon_{11} - \eta \chi g_{11}) = \\
 &= g_0 [g_0 \varepsilon_{11} - \eta (\kappa - 2\varepsilon_{11}K)] = g_0 [(1 - \eta K) \varepsilon_{11} - \eta (\kappa - 2\varepsilon_{11}K)] = \\
 &= g_0 (\varepsilon_{11} - \eta K \varepsilon_{11} - \eta \kappa + 2\eta K \varepsilon_{11}) = g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa],
 \end{aligned} \tag{64}$$

уз занемарење квадрата деформација.

Равнотежа линијског елемента је обезбијеђена нултом вриједности укупног виртуалног рада, што је у случају анализе слободних вибрација дато као:

$$\delta R = \delta R_u + \delta R_{in} = 0, \tag{65}$$

при чему се δR , δR_u и δR_{in} односе на укупан виртуални рад, те његов унутрашњи и инерцијални члан, респективно.

С обзиром да је елемент који се посматра линеарно еластичног карактера контраваријанте компоненте напона је могуће изразити као функцију коваријантних компоненти деформација, што слиједи из генералисаног Хуковог закона, [1]:

$$\sigma^{ij} = 2\mu(g^{ik}g^{jl}\varepsilon_{kl} + \nu g^{ij}\varepsilon_1^1). \tag{66}$$

За случај посматраног елемента слиједи компонента:

$$\bar{\sigma}^{11} = E(\bar{g}^{11})^2 \bar{\varepsilon}_{11}, \tag{67}$$

па се унутрашњи виртуални рад може записати као:

$$\delta R_u = \int_V \bar{\sigma}^{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11} dV = \int_V E(\bar{g}^{11})^2 \bar{\varepsilon}_{11} \delta \bar{\varepsilon}_{11} dV, \tag{68}$$

одакле, пратећи релације:

$$dV = \sqrt{\bar{g}} d\xi d\eta d\zeta, \quad \sqrt{\bar{g}} = g_0 \sqrt{g_{11}}, \quad \bar{g}^{11} = \frac{1}{g_0^2} g^{11}, \tag{69}$$

слиједи израз за аксијалну силу:

$$R_N = \int_A g_0^2 \bar{\sigma}^{11} d\eta d\zeta = \int_A g_0^2 E(\bar{g}^{11})^2 \bar{\varepsilon}_{11} d\eta d\zeta. \tag{70}$$

Користећи познате релације (64) и (69), претходни израз се може написати као:

$$\begin{aligned}
 R_N &= \int_A g_0^2 E \frac{1}{g_0^4} (g^{11})^2 g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] d\eta d\zeta = \\
 &= E (g^{11})^2 \int_A \frac{1}{g_0} [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] d\eta d\zeta = \\
 &= E (g^{11})^2 (A_1 \varepsilon_{11} - \bar{I} \kappa),
 \end{aligned} \tag{71}$$

гдје су геометријске карактеристике пресека дате као:

$$A_1 = \int_A \frac{1 + \eta K}{g_0} d\eta d\zeta, \quad \bar{I} = \int_A \frac{\eta}{g_0} d\eta d\zeta. \tag{72}$$

Из наведеног се може уочити да су код криволинијских носача аксијално напрезање и савијање спрегнути.

Из главног вектора момената за случај посматраног елемента слиједи компонента:

$$\begin{aligned}
 R_M &= -\frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \int_A \eta g_0^2 \bar{\sigma}^{11} d\eta d\zeta = -\frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \int_A \eta g_0^2 E (\bar{g}^{11})^2 \bar{\varepsilon}_{11} d\eta d\zeta = \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \int_A \eta g_0^2 E \frac{1}{g_0^4} (g^{11})^2 g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] d\eta d\zeta = \\
 &= -E (g^{11})^{3/2} \int_A \eta \frac{1}{g_0} [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] d\eta d\zeta = \\
 &= -E (g^{11})^{3/2} (\bar{I} \varepsilon_{11} - I \kappa),
 \end{aligned} \tag{73}$$

гдје су:

$$\bar{I} = \int_A \frac{\eta(1 + \eta K)}{g_0} d\eta d\zeta, \quad I = \int_A \frac{\eta^2}{g_0} d\eta d\zeta. \tag{74}$$

Овако дефинисане пресјечне силе су тензорског карактера, па се њима одговарајуће физичке добијају на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{R_N}{g^{11}} = E (g^{11}) (A_1 \varepsilon_{11} - \bar{I} \kappa), \\
 M &= \frac{R_M}{\sqrt{g^{11}}} = E (g^{11}) (-\bar{I} \varepsilon_{11} + I \kappa).
 \end{aligned} \tag{75}$$

Увођењем вектора генерализаних сила и вектора деформацијских величина:

$$\mathbf{R}^T = [N, M] \quad \boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{11}, \kappa], \tag{76}$$

претходни изрази се могу записати и у матричној форми:

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (77)$$

при чему је конститутивна матрица \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} E(g^{11})A_1 & -E(g^{11})\bar{I} \\ -E(g^{11})\bar{I} & E(g^{11})I \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Конститутивна матрица није симетрична што је последица тога што наведене пресјечне силе не врше рад на деформацијама осе штапа већ њихови одговарајући дијелови који су енергетски коњуговани са датим деформацијама.

4.3.1. Матрица крутости Бернули-Ојлеровог гредног елемента

Матрица крутости изводи примјеном принципа виртуалног рада, (68), односно:

$$\begin{aligned} \delta R_u &= \int_V (\bar{\sigma}^{11} g_0 (1 + \eta K) \delta \varepsilon_{11} - \bar{\sigma}^{11} g_0 \eta \delta \kappa) dV = \\ &= \int \int_A (\bar{\sigma}^{11} g_0 (1 + \eta K) \delta \varepsilon_{11} - \bar{\sigma}^{11} g_0 \eta \delta \kappa) g_0 \sqrt{g_{11}} d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \int_\xi (\bar{N} \delta \varepsilon_{11} - \bar{M} \delta \kappa) \sqrt{g_{11}} d\xi, \end{aligned} \quad (79)$$

при чему су силе енергетски коњуговане са одговарајућим деформацијама:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int_A \bar{\sigma}^{11} g_0^2 (1 + \eta K) d\eta d\zeta, \\ \bar{M} &= - \int_A \bar{\sigma}^{11} g_0^2 \eta d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (80)$$

Даљим сређивањем претходног израза се добија:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \int_A E \frac{1}{g_0^4} (g^{11})^2 g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] g_0^2 (1 + \eta K) d\eta d\zeta = E (g^{11})^2 (A \varepsilon_{11} - \bar{I} \kappa), \\ \bar{M} &= - \int_A E \frac{1}{g_0^4} (g^{11})^2 g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] g_0^2 \eta d\eta d\zeta = E (g^{11})^2 (-\bar{I} \varepsilon_{11} + I \kappa), \end{aligned} \quad (81)$$

гдје је:

$$A = \int_A \frac{(1 + \eta K)^2}{g_0} d\eta d\zeta, \quad \bar{I} = \int_A \frac{(1 + \eta K) \eta}{g_0} d\eta d\zeta, \quad I = \int_A \frac{\eta^2}{g_0} d\eta d\zeta. \quad (82)$$

Увођењем вектора енергетски коњугованих сила, релацију (81) је могуће изразити и у матричној форми као:

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(g^{11})^2 A & -E(g^{11})^2 \bar{I} \\ -E(g^{11})^2 \bar{I} & E(g^{11})^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \kappa \end{bmatrix} \leftrightarrow \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (83)$$

одакле се може уочити да је добијена конститутивна матрица симетрична.

На основу израза (46) и (51) се може успоставити зависност између деформација осе штапа и градијената помјерања:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}_m \mathbf{u}_{,1}^m, \quad (84)$$

при чему је:

$$\mathbf{L}_m = \begin{bmatrix} x_{,1}^m & 0 \\ -\Gamma_{11}^1 x_{,2}^m & x_{,2}^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{,1}^m = \begin{bmatrix} u_{m,1} \\ u_{m,11} \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Уколико се уведе вектор генерализаних координата \mathbf{q} у коме су садржани контролни степени слободе коначног елемента, односно компонентална помјерања контролних тачака, Слика 14.:

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_N^T], \quad \mathbf{q}_i^T = [u_i^1 \quad u_i^2], \quad (86)$$

може се успоставити зависност између градијената помјерања и степени слободе:

$$\mathbf{u}_{,1} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad (87)$$

при чему је:

$$\mathbf{u}_{,1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{,1}^1 \\ \mathbf{u}_{,1}^2 \\ \mathbf{u}_{,1}^1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_i \quad \dots \quad \mathbf{B}_N], \quad (88)$$

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^1 \\ \mathbf{B}_i^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^1 = \begin{bmatrix} R_{i,1} & 0 \\ R_{i,11} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & R_{i,1} \\ 0 & R_{i,11} \end{bmatrix}.$$

Узимајући у обзир претходне изразе слиједи:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}_{,1} = \mathbf{L}\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{B}_L\mathbf{q}, \quad \mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2], \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{L}\mathbf{B}. \quad (89)$$

Унутрашња компонента виртуалног рада се тада може изразити као:

$$\delta R_u = \int_{\xi} \bar{\mathbf{R}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{g_{11}} d\xi = \int_{\xi} \boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{D}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{g_{11}} d\xi = \mathbf{q}^T \int_{\xi} \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_L \sqrt{g_{11}} d\xi \delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}, \quad (90)$$

гдје је \mathbf{K} линеарна матрица крутости посматраног елемента.

4.3.2. Матрица маса Бернули-Ојлеровог гредног елемента

Инерцијални члан виртуалног рада се може изразити као:

$$\delta R_{in} = \int_V \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \bar{\mathbf{u}} dV. \quad (91)$$

гдје је ρ густина, а убрзање произвољне тачке попречног пресека је:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}} &= \ddot{\mathbf{u}} + \eta(\ddot{\phi} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2) = \ddot{\mathbf{u}} - \eta \ddot{\phi} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \mathbf{g}_1 = \ddot{\mathbf{u}} - \eta \frac{1}{g_{11}} (\mathbf{g}_2 \cdot \ddot{\mathbf{u}}) \mathbf{g}_1, \\ \ddot{u}_m &= \ddot{u}_m - \eta B_m^n \ddot{u}_{n,1}, \quad \ddot{u}^m = \ddot{u}^m - \eta \bar{B}_n^m \ddot{u}_n, \quad \bar{B}_n^m = \frac{1}{g_{11}} x_{,2}^m x_{n,2}. \end{aligned} \quad (92)$$

Инерцијални члан виртуалног рада се онда може написати као:

$$\delta R_{in} = \int_V \rho (\ddot{u}^m - \eta \bar{B}_\mu^m \ddot{u}_\mu) \delta (u_m - \eta B_m^\nu u_{\nu,1}) dV. \quad (93)$$

Увођењем вектора убрзања и помјерања:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_i \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N], \quad \mathbf{u}_i^T = [u_1 \quad u_{1,1} \quad u_2 \quad u_{2,1}], \\ \ddot{\mathbf{u}}^T &= [\ddot{\mathbf{u}}_1 \quad \ddot{\mathbf{u}}_2 \quad \cdots \quad \ddot{\mathbf{u}}_i \quad \cdots \quad \ddot{\mathbf{u}}_N], \quad \ddot{\mathbf{u}}_i^T = [\ddot{u}_1 \quad \ddot{u}_{1,1} \quad \ddot{u}_2 \quad \ddot{u}_{2,1}]. \end{aligned} \quad (94)$$

инерцијални дио виртуалног рада је могуће записати и у матричној форми:

$$\delta R_{in} = \int_\xi \ddot{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}^M \delta \mathbf{u} \sqrt{g_{11}} d\xi, \quad (95)$$

Овдје је матрица \mathbf{D}^M једнака:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^M &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_m = \rho \begin{bmatrix} A^M & -B_m^m \bar{I}^M \\ -B_m^m \bar{I}^M & [(B_1^m)^2 + (B_2^m)^2] I^M \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} &= \rho \begin{bmatrix} 0 & -B_1^2 \bar{I}^M \\ -B_2^1 \bar{I}^M & [B_1^2 B_1^1 + B_2^1 B_2^2] I^M \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (96)$$

док су геометријске карактеристике попречног пресека дате као:

$$\begin{aligned} A^M &= \int_A g_0 d\eta d\zeta = \int_A d\eta d\zeta, \quad \bar{I}^M = \int_A g_0 \eta d\eta d\zeta = -K \int_A \eta^2 d\eta d\zeta, \\ I^M &= \int_A g_0 \eta^2 d\eta d\zeta = \int_A \eta^2 d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (97)$$

Увођењем матрице трансформације \mathbf{L}_M , могуће је успоставити зависност између помјерања и убрзања и контролних степени слобде (помјерања и убрзања контролних тачака):

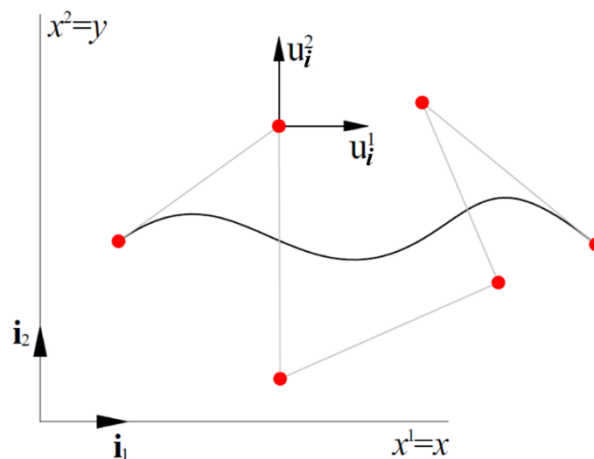
$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{L}_{Mi} \mathbf{q}_i, & \ddot{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{L}_{Mi} \ddot{\mathbf{q}}_i, \\ \mathbf{L}_M &= [\mathbf{L}_{M1} \quad \mathbf{L}_{M2} \quad \cdots \quad \mathbf{L}_{Mi} \quad \cdots \quad \mathbf{L}_{MN}], & \mathbf{L}_{Mi}^T &= \begin{bmatrix} R_i & R_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & R_{i,1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (98)$$

Конечно, инерцијални члан виртуалног рада се може изразити као:

$$\delta R_m = \ddot{\mathbf{q}}^T \int_{\xi} \mathbf{L}_M^T \mathbf{D}^M \mathbf{L}_M \sqrt{g_{11}} d\xi \delta \mathbf{q} = \ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{q}, \quad (99)$$

гдје је конзистентна матрица маса:

$$\mathbf{M} = \int_{\xi} \mathbf{L}_M^T \mathbf{D}^M \mathbf{L}_M \sqrt{g_{11}} d\xi. \quad (100)$$



Слика 14. Контролни степени слобде

4.4. Тимошенкова теорија

Према Тимошенковој теорији штапа, попречни пресјек је такође недеформабилан, али након деформације не остаје управан на осу штапа. С обзиром на то, није могуће одредити положај попречног пресјека након деформације из кинематике осе штапа, те је неопходно увести ротацију попречног пресјека као додатну генерализану координату.

Вектор ротације попречног пресјека дат је као:

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi^3 \mathbf{i}_3 = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\varphi} = \varphi^3 \mathbf{g}_3 = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{g}_3. \quad (101)$$

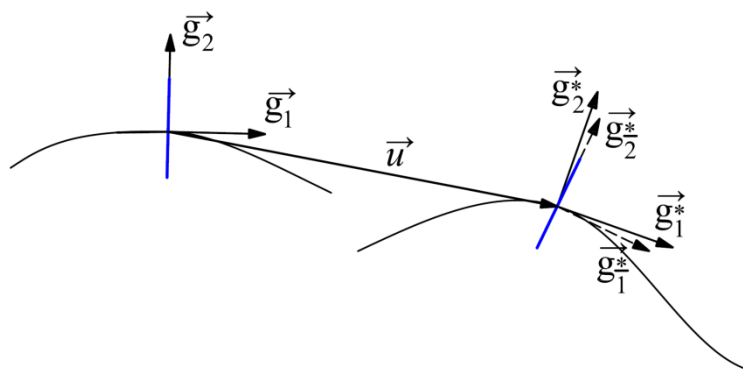
Релација (25) се, у односу на конвективне координате, може записати као:

$$\mathbf{K} \times \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i \\ g_{(i)} \end{pmatrix} = \frac{d\xi}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i \\ g_{(i)} \end{pmatrix}_{,1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i \\ g_{(i)} \end{pmatrix}_{,1}, \quad (102)$$

при чему $g_{(i)}$ преставаља модул одговарајућег базног вектора. Аналогно претходном изразу, вектор кривине осе штапа у деформисаном положају је дат са:

$$\mathbf{K}^* \times \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^* \\ g_{(i)} \end{pmatrix} = \frac{d\xi}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^* \\ g_{(i)} \end{pmatrix}_{,1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_i^* \\ g_{(i)} \end{pmatrix}_{,1}, \quad (103)$$

при чему су \mathbf{g}_i^* базни вектори у оси штапа након извршене ротације попречног пресека, Слика 15.



Слика 15. Кинематика базних вектора

Трансформацијом претходног израза, како је дато у [2], коваријантну компоненту кривине деформисане осе штапа тада је могуће наћи као:

$$K_3^* = K^{3*} = \frac{1}{2g_{11}} (\mathbf{g}_{1,1}^* \cdot \mathbf{g}_2^* - \mathbf{g}_{2,1}^* \cdot \mathbf{g}_1^*) = K^*. \quad (104)$$

Диференцирањем базних вектора у деформисаном положају:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{1,1}^* &= (\mathbf{g}_1 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_1)_{,1} = \mathbf{g}_{1,1} + \boldsymbol{\varphi}_{,1} \times \mathbf{g}_1 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_{1,1} = \mathbf{g}_{1,1} + \varphi_{,1} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 + \varphi \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_{1,1}, \\ \mathbf{g}_{2,1}^* &= (\mathbf{g}_2 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_2)_{,1} = \mathbf{g}_{2,1} + \boldsymbol{\varphi}_{,1} \times \mathbf{g}_2 + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{g}_{2,1}, \end{aligned} \quad (105)$$

могу се дефинисати потребни скаларни производи:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{1,1}^* \cdot \mathbf{g}_2^* &= [\Gamma_{11}^1 \mathbf{g}_1 + \bar{K} \mathbf{g}_2 + \sqrt{g_{11}} \varphi_{,1} \mathbf{g}_2 + \varphi \mathbf{g}_3 \times (\Gamma_{11}^1 \mathbf{g}_1 + \bar{K} \mathbf{g}_2)] \cdot (\mathbf{g}_2 + \varphi \times \mathbf{g}_2) = \\
&= (\Gamma_{11}^1 \mathbf{g}_1 + \bar{K} \mathbf{g}_2 + \sqrt{g_{11}} \varphi_{,1} \mathbf{g}_2 + \varphi \Gamma_{11}^1 \sqrt{g_{11}} \mathbf{g}_2 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi \bar{K} \mathbf{g}_1) \cdot (\mathbf{g}_2 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi \mathbf{g}_1) = \\
&= \bar{K} + \sqrt{g_{11}} \varphi_{,1} + \varphi \Gamma_{11}^1 \sqrt{g_{11}} - \Gamma_{11}^1 \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}}} \varphi = K g_{11} + \sqrt{g_{11}} \varphi_{,1}, \\
\mathbf{g}_{2,1}^* \cdot \mathbf{g}_1^* &= (\mathbf{g}_{2,1} + \varphi_{,1} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2 + \varphi \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_{2,1}) \cdot (\mathbf{g}_1 + \varphi \times \mathbf{g}_1) = \\
&= [-K \mathbf{g}_1 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi_{,1} \mathbf{g}_1 + \varphi \mathbf{g}_3 \times (-K \mathbf{g}_1)] \cdot (\mathbf{g}_1 + \varphi \sqrt{g_{11}} \mathbf{g}_2) = \\
&= -K g_{11} - \sqrt{g_{11}} \varphi_{,1}.
\end{aligned} \tag{106}$$

Уврштавањем претходно добијених израза у (104), слиједи да је флексија у деформисаном положају:

$$\begin{aligned}
2g_{11} K^* &= 2K g_{11} + 2\sqrt{g_{11}} \varphi_{,1} \\
\rightarrow K^* &= K + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi_{,1}.
\end{aligned} \tag{107}$$

Компонента метричког тензора послје деформације се добија на следећи начин:

$$g_{1\bar{1}}^* = \mathbf{g}_1^* \cdot \mathbf{g}_1^* = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{u}_{,1}) \cdot (\mathbf{g}_1 + \varphi \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1) = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{u}_{,1}) \cdot (\mathbf{g}_1 + \varphi \sqrt{g_{11}} \mathbf{g}_2) = x_{,1}^m x_{m,1} + x_{,1}^m u_{m,1}, \tag{108}$$

Вектор положаја тачке на растојању η од осе штапа је дефинисан следећом релацијом:

$$\bar{\mathbf{r}}^* = \mathbf{r}^*(\xi, \eta) = \mathbf{r}^*(\xi) + \eta \mathbf{g}_2^*. \tag{109}$$

Како попречни пресјек није управан на деформисану осу штапа, јавља се и смичућа компонента тензора деформације. Смичање је дефинисано као:

$$\begin{aligned}
\gamma_{12} &= \mathbf{g}_1^* \cdot \mathbf{g}_2^* = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{u}_{,1}) \cdot (\mathbf{g}_2 + \varphi \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2) = (\mathbf{g}_1 + \mathbf{u}_{,1}) \cdot (\mathbf{g}_2 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi \mathbf{g}_1) = \\
&= -\varphi \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} g_{11} + \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2 = \mathbf{u}_{,1} \cdot \mathbf{g}_2 - \sqrt{g_{11}} \varphi.
\end{aligned} \tag{110}$$

Диференцирањем вектора положаја тачке који је дат изразом (109) по координати ζ се добија вриједност тангенцијалног базног вектора на произвољном одстојању од осе штапа:

$$\bar{\mathbf{g}}_1^* = \mathbf{g}_1^* + \eta \mathbf{g}_{2,1}^* = \mathbf{g}_1^* - \eta K^* \mathbf{g}_1^*, \tag{111}$$

па је компонента метричког тензора:

$$\bar{g}_{11}^* = (\mathbf{g}_1^* - \eta K^* \mathbf{g}_1^*) \cdot (\mathbf{g}_1^* - \eta K^* \mathbf{g}_1^*) = g_{11}^* - 2\eta K^* g_{1\bar{1}}^* + \eta^2 K^{*2} g_{11}^*. \tag{112}$$

Деформација произвољне тачке попречног пресека је дата као:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11}(\eta) &= \bar{\varepsilon}_{11} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{11}^* - \bar{g}_{11}) = \frac{1}{2}[g_{11}^* - 2\eta K^* g_{11}^* + \eta^2 K^{*2} g_{11} - (1 - \eta K)^2 g_{11}] = \\
&= \frac{1}{2}(g_{11}^* - 2\eta K^* g_{11}^* + \eta^2 K^{*2} g_{11} - g_{11} + 2\eta K g_{11} - \eta^2 K^2 g_{11}) = \\
&= \varepsilon_{11} - \eta(K^* g_{11}^* - K g_{11}) + \frac{1}{2}\eta^2(K^{*2} - K^2)g_{11},
\end{aligned} \tag{113}$$

Деформација савијања се може дефинисати као:

$$\kappa = \bar{K}^* - \bar{K} = K^* g_{11}^* - K g_{11}. \tag{114}$$

Уколико се релације (107) и (108) уврсте у израз (114), добија се да је:

$$\kappa = (K + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \varphi_{,1})(g_{11} + x_{,1}^m u_{m,1}) - K g_{11} = \sqrt{g_{11}} \varphi_{,1} + K x_{,1}^m u_{m,1}. \tag{115}$$

Узимајући у обзир да је:

$$\begin{aligned}
\kappa &= K^* g_{11}^* - K g_{11} = (K + \chi)(g_{11} + \varepsilon_{11}) - K g_{11} = \chi g_{11} + \varepsilon_{11} K \\
&\rightarrow \chi g_{11} = \kappa - \varepsilon_{11} K,
\end{aligned} \tag{116}$$

слиједи:

$$\begin{aligned}
\bar{\varepsilon}_{11} &= \varepsilon_{11} - \eta\kappa + \frac{1}{2}\eta^2(\chi^2 + 2\chi K + K^2 - K^2)g_{11} = \varepsilon_{11} - \eta\kappa + \eta^2 K(\kappa - \varepsilon_{11} K) = \\
&= -g_0 \eta\kappa + g_0(1 + \eta K)\varepsilon_{11} = g_0[(1 + \eta K)\varepsilon_{11} - \eta\kappa].
\end{aligned} \tag{117}$$

4.4.1. Матрица крутости Тимошенковог гредног елемента

Контраваријантне компоненте напона се добијају из израза (66), па за случај посматраног елемента слиједи компоненте:

$$\bar{\sigma}^{11} = E(\bar{g}^{11})^2 \bar{\varepsilon}_{11}, \quad \bar{\sigma}^{12} = 2\mu \bar{g}^{11} \bar{\varepsilon}_{12}, \tag{118}$$

при чему је Ламеов параметар μ дефинисан као:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{119}$$

гдје је ν Поасонов коефицијент.

Матрица крутости се изводи примјеном принципа виртуалног рада, односно узимајући у обзир релације (68) и (110):

$$\begin{aligned}
\delta R_u &= \int_V [\bar{\sigma}^{11} g_0 (1 + \eta K) \delta \varepsilon_{11} - \bar{\sigma}^{11} g_0 \eta \delta \kappa + \bar{\sigma}^{12} \delta \gamma_{12}] dV = \\
&= \int_A \int_{\xi} [\bar{\sigma}^{11} g_0 (1 + \eta K) \delta \varepsilon_{11} - \bar{\sigma}^{11} g_0 \eta \delta \kappa + \bar{\sigma}^{12} \delta \gamma_{12}] g_0 \sqrt{g_{11}} d\xi d\eta d\zeta = \\
&= \int_{\xi} (\bar{N} \delta \varepsilon_{11} - \bar{M} \delta \kappa + \bar{T} \delta \gamma_{12}) \sqrt{g_{11}} d\xi,
\end{aligned} \tag{120}$$

гдје су силе енергетски коњуговане са одговарајућим деформацијским величинама:

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \int_A \bar{\sigma}^{11} g_0^2 (1 + \eta K) d\eta d\zeta, \\
\bar{M} &= - \int_A \bar{\sigma}^{11} g_0^2 \eta d\eta d\zeta, \\
\bar{T} &= \int_A \bar{\sigma}^{12} g_0 d\eta d\zeta,
\end{aligned} \tag{121}$$

Уврштавањем релације (118) у претходни израз се добија:

$$\begin{aligned}
\bar{N} &= \int_A E \frac{1}{g_0^4} (g^{11})^2 g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] g_0^2 (1 + \eta K) d\eta d\zeta = E (g^{11})^2 (A \varepsilon_{11} - \bar{T} \kappa), \\
\bar{M} &= - \int_A E \frac{1}{g_0^4} (g^{11})^2 g_0 [(1 + \eta K) \varepsilon_{11} - \eta \kappa] g_0^2 \eta d\eta d\zeta = E (g^{11})^2 (-\bar{T} \varepsilon_{11} + I \kappa), \\
\bar{T} &= \int_A 2\mu \frac{1}{g_0^2} g^{11} \gamma_{12} g_0 d\eta d\zeta = \mu g^{11} \bar{A} \gamma_{12},
\end{aligned} \tag{122}$$

при чему су:

$$A = \int_A \frac{(1 + \eta K)^2}{g_0} d\eta d\zeta, \quad \bar{T} = \int_A \frac{(1 + \eta K) \eta}{g_0} d\eta d\zeta, \quad I = \int_A \frac{\eta^2}{g_0} d\eta d\zeta, \quad \bar{A} = k \int_A \frac{1}{g_0} d\eta d\zeta, \tag{123}$$

гдје је k фактор корекције смицања. Релацију (122) је могуће написати и у матричној форми као:

$$\begin{bmatrix} \bar{N} \\ \bar{T} \\ \bar{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(g^{11})^2 A & 0 & -E(g^{11})^2 \bar{T} \\ 0 & \mu g^{11} \bar{A} & 0 \\ -E(g^{11})^2 \bar{T} & 0 & E(g^{11})^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \gamma_{12} \\ \kappa \end{bmatrix} \leftrightarrow \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{124}$$

Зависност између деформација осе штапа и градијената помјерања, ротације и градијента ротације дата изразима (46), (110) и (115) се може записати матрично као:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}_{,1}, \quad (125)$$

при чему је:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} x_{,1}^1 & x_{,1}^2 & 0 & 0 \\ x_{,2}^1 & x_{,2}^2 & -\sqrt{g_{11}} & 0 \\ K x_{,1}^1 & K x_{,1}^2 & 0 & \sqrt{g_{11}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{,1} = \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \varphi \\ \varphi_{,1} \end{bmatrix}. \quad (126)$$

Увођењем вектора генерализаних координата \mathbf{q} у коме су садржани контролни степени слободе посматраног елементас:

$$\mathbf{q}^T = [\mathbf{q}_1^T \ \mathbf{q}_2^T \ \dots \ \mathbf{q}_i^T \ \dots \ \mathbf{q}_N^T], \quad \mathbf{q}_i^T = [u_i^1 \ u_i^2 \ \varphi_i], \quad (127)$$

може се успоставити зависност између градијената помјерања, ротације, градијента ротације и степени слободе:

$$\mathbf{u}_{,1} = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (128)$$

при чему је:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \dots \ \mathbf{B}_i \ \dots \ \mathbf{B}_N], \quad \mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} R_{i,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{i,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_i & R_{i,1} \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Уколико се претходни изрази уврсте у (125) слиједи да је:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{B} \mathbf{q} = \mathbf{B}_L \mathbf{q}, \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{L} \mathbf{B}, \quad (130)$$

па се нутрашња компонента виртуалног рада може изразити као:

$$\delta R_u = \int_{\xi} \bar{\mathbf{R}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{g_{11}} d\xi = \int_{\xi} \boldsymbol{\varepsilon}^T \bar{\mathbf{D}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{g_{11}} d\xi = \mathbf{q}^T \int_{\xi} \mathbf{B}_L^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_L \sqrt{g_{11}} d\xi \delta \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q}, \quad (131)$$

гдје је \mathbf{K} линеарна матрица крутости Тимошенковог гредног елемента.

4.4.2. Матрица маса Тимошенковог гредног елемента

Инерцијални дио виртуалног рада се може записати и у матричном облику на следећи начин:

$$\delta R_{in} = \int_{\xi} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{D}^M \delta \mathbf{u} \sqrt{g_{11}} d\xi, \quad (132)$$

при чему су вектори:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T &= [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_i \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N], & \mathbf{u}_i^T &= [u_1 \quad u_2 \quad \varphi], \\ \dot{\mathbf{u}}^T &= [\dot{\mathbf{u}}_1 \quad \dot{\mathbf{u}}_2 \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{u}}_i \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{u}}_N], & \dot{\mathbf{u}}_i^T &= [\dot{u}_1 \quad \dot{u}_2 \quad \dot{\varphi}]. \end{aligned} \quad (133)$$

Матрица \mathbf{D}^M је једнака:

$$\mathbf{D}^M = \begin{bmatrix} A^M & 0 & 0 \\ 0 & A^M & 0 \\ 0 & 0 & I^M \end{bmatrix}, \quad (134)$$

при чему су геометријске карактеристике попречног пресека:

$$A^M = \int_A g_0 d\eta d\zeta = \int_A d\eta d\zeta, \quad I^M = \int_A g_0 \eta^2 d\eta d\zeta = \int_A \eta^2 d\eta d\zeta. \quad (135)$$

Зависност између вектора датих релацијом (136) и вектора који у себи садржи контролне степене слободе је успостављена на следећи начин:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{L}_{Mi} \mathbf{q}_i, \quad \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{L}_{Mi} \dot{\mathbf{q}}_i, \quad \mathbf{L}_{Mi} = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 \\ 0 & 0 & R_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_M = [\mathbf{L}_{M1} \quad \mathbf{L}_{M2} \quad \cdots \quad \mathbf{L}_{Mi} \quad \cdots \quad \mathbf{L}_{MN}]. \quad (136)$$

Инерцијални члан виртуалног рада се тада може записати као:

$$\delta R_{in} = \dot{\mathbf{q}}^T \int_{\xi} \mathbf{L}_M^T \mathbf{D}^M \mathbf{L}_M \sqrt{g_{11}} d\xi \delta \mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \delta \mathbf{q}, \quad (137)$$

при чему је конзистентна матрица маса:

$$\mathbf{M} = \int_{\xi} \mathbf{L}_M^T \mathbf{D}^M \mathbf{L}_M \sqrt{g_{11}} d\xi. \quad (138)$$

4.5. Једначина слободних вибрација

На основу претходно изведеног, односно са познатим компонентама укупног виртуалног рада, из израза (65) слиједи:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (139)$$

Уз претпоставку синхроног и хармонијског кретања, односно:

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}e^{i\omega t}, \quad (140)$$

проблем се своди на стандардни проблем својствених вриједности:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (141)$$

чија су рјешења уређени парови својствених фреквенција ω и одговарајући својствени вектори $\bar{\mathbf{q}}_i$.

5. РЕПАРАМЕТРИЗАЦИЈА КРИВЕ

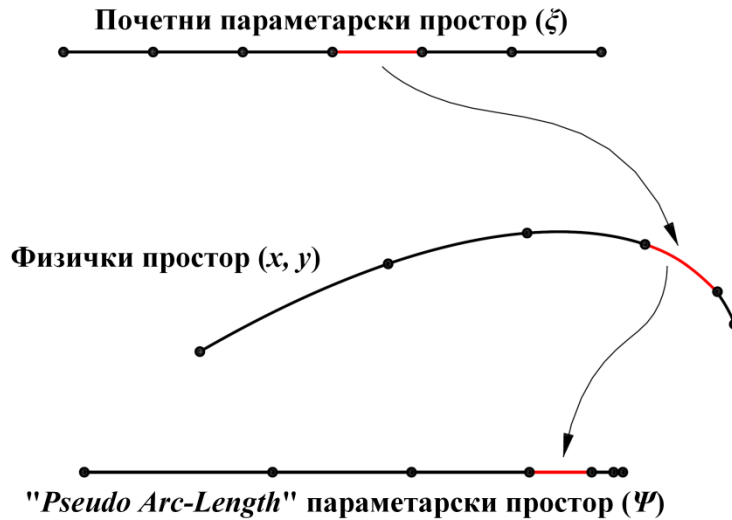
Параметризација је веома важна тема у изогеометријској анализи у разним инжењерским областима. Док облик криве, кривине и сличне геометријске карактеристике не зависе од параметризације, Јакобијан или тзв. параметарска брзина је у потпуности повезан са параметризацијом. Параметризација такође утиче на дискретизацију криве и може довести до неуједначене мреже коначних елемената. У случају изразито нелинеарне параметризације може доћи до лоше формираних матрица маса и крутости, што значајно утиче на резултате изогеометријске анализе. Тада се предлаже репараметризација криве, при којој геометрија криве остаје егзактна, [7].

У овом раду обрађен је „*Pseudo Arc-Length*“ метод репараметризације, којим се модификује евентуално неодговарајућа почетна параметризација посматране геометрије. Метод је базиран на трансформацији почетног параметарског простора у нови, репараметризовани, уз помоћ параметарске трансферне функције *PTF* (*Parametric Transfer Function*). Анализа рађена у [7] је показала да је овај метод прикладан за изогеометријску анализу, уз одређена побољшања у односу на класични изогеометријски приступ.

„*Arc-Length*“ параметризација подразумијева да се параметар ζ креће од 0 до 1 истом брзином којом се $\mathbf{r}(\zeta)$ креће од $\mathbf{r}(0)$ до $\mathbf{r}(1)$. Јакобијан је дефинисан као:

$$J = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\zeta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\zeta} \right)^2}. \quad (142)$$

Уколико Јакобијан остаје константан за све вриједности параметра ζ , може се рећи да је крива параметризована по дужини лука. Међутим, једино равна линија и кружница имају егзактну „*Arc-Length*“ параметризацију, док се за произвољно закривљену криву предлаже „*Pseudo Arc-Length*“ параметризација, Слика 16.



Слика 16. „Pseudo Arc-Length“ параметризација закривљене криве

Репараметризација подразумева успостављање везе између параметра ξ и параметра Ψ преко функције *PTF*-а $\xi=f(\Psi)$, односно:

$$\mathbf{r}(\xi) = \mathbf{r}(f(\Psi)) = [x(f(\Psi)), y(f(\Psi))]. \quad (143)$$

Функција *PTF*-а се налази тако да $dr/d\Psi$ буде приближно константа за све вриједности параметра Ψ . Параметрима ξ_k се придружују одговарајући параметри Ψ_k , који се називају нормализовани „Arc-Length“ параметри, при чему је $k=1,2,\dots, h+1$ и $\xi \in [0,1]$. Параметри Ψ_k се добијају као:

$$\Psi_k = \frac{\int_0^{\xi_k} ds}{\int_0^1 ds} = \frac{\int_0^{\xi_k} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi}{\int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi}. \quad (144)$$

Трансферна функција је заправо једнодимензионални Б-сплајн и представља линеарну комбинацију $m+1$ базних функција одређених чворним вектором *PTF*-а:

$$\xi = f(\Psi) = \sum_{j=1}^{m+1} N_{j,p}(\Psi) Q_j, \quad (0 \leq \Psi \leq 1), \quad (145)$$

гдје су $N_{j,p}(\Psi)$ базне функције *PTF*-а, а Q_j контролне тачке.

За степен трансферне функције се обично узима степен функције почетне геометрије.

Чворни вектор PTF -а је отворени чворни вектор код кога се унутрашњи чворови добијају као:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{p+j} &= (1-\alpha)\Psi_{i-1} + \alpha\Psi_i, & j &= 1, 2, \dots, m-p, \\ \alpha &= jd - i, & i &= \text{int}(jd), & d &= \frac{h+1}{m-p+1}.\end{aligned}\tag{146}$$

На овај начин се обезбјеђује да сваки елемент садржи барем један параметар Ψ_k , што је битно због добијања трансферне функције која је увијек неоппадајућа и позитивна. Основна идеја техника интерполације важи и у овој процедури, с тим да се чворни вектор добија на претходно приказан начин како би се испунио наведени услов. Тако су контролне тачке PTF -а добијене интерполацијом кроз сет тачака:

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{m+1} N_{j,p}(\Psi_k) Q_j.\tag{147}$$

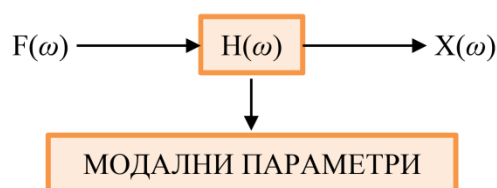
6. ЕКСПЕРИМЕНТАЛНА МОДАЛНА АНАЛИЗА

Модална анализа представља процес одређивања својствених карактеристика неког механичког система - сопствених фреквенција, коефицијената пригушења и модалних облика, којима се описује његово динамичко понашање. Ове карактеристике се називају модални параметри и помоћу њих је могуће формулисање математичког модела који се назива модални модел система, [10]. Анализа реалних структура, које су у општем случају континуални системи са бесконачно много степени слободе, заснива се на дискретизацији система, чије се понашање описује коначним бројем степени слободе, довољним да се обезбиди тачност модела. Укупан одзив линеарног, временски независног система је могуће представити као линеарну комбинацију простих хармонијских одзива, који се називају сопствени модови вибрација.

Сопствени модови вибрација представљају инхерентне особине структуре, и у потпуности су одређени материјалним карактеристикама (масом, пригушењем и крутошћу система), као и граничним условима структуре, [11].

6.1. Модално тестирање

Модално тестирање је техника којом се експерименталним путем долази до модалних параметара испитиваног система на основу којих се изводи модални модел. Модално тестирање се заснива на успостављању везе између одзива структуре и побуде, исказане у функцији фреквенције, Слика 17.



Слика 17. Блок дијаграм *FRF*- функције

Идентификација модалних параметара се врши на основу успостављене везе између измјерених одзива и побуде, дефинисане преко функција фреквенцијског одзива или краће *FRF*- функција (*Frequency Response Functions*).

За систем са више степени слободе функција фреквенцијског одзива за одређени мод је дефинисана као:

$$h_{ij}(\omega) = \frac{x_i(\omega)}{f_j(\omega)}, \quad (148)$$

при чему индекс i означава степен слободе у којем се мјери одзив структуре, а индекс j степен слободе у којем се мјери побуда. Дефинисањем матрице функција фреквенцијског одзива дефинисан је и модел одзива.

6.1.1. Основни мјерни ланац

У оквиру основног мјерног ланца модалног тестирања се налазе: механизам побуде, механизам одзива и механизам аквизиције и обраде података.

Улога механизма побуде је побуђивање испитиване структуре путем побудне силе $f(t)$ примјене на одређеном степену слободе. Побуђивање структуре је могуће извршити побуђивачем са генерисаним сигналом побуде или импулсним чекићем, који се још назива и модални чекић. Побуђивачи код којих је побудни сигнал генерисан помоћу генератора сигнала су најчешће електромагнетни или електрохидраулички вибратор. Електромагнетни побуђивач има могућност вршења побуде у широком фреквенцијском и динамичком опсегу амплитуда, док је електрохидраулички побуђивач погоднији за ниске фреквенције и велике амплитуде. Предност овог начина побуђивања је могућност контролисања фреквенција и амплитуда унесене побуде, што даје добру тачност, али повезивање побуђивача са испитиваном структуром доводи до оптерећења посматране структуре додатном масом, што често доводи до умањења тачности. Импулсни чекић, у чију главу је интегрисан сензор силе, задаје импулсну побуду ударцем у структуру и у овом случају испитивана структура није оптерећена додатном масом. На фреквенцијски опсег који је могуће побудити утичу, поред карактеристика конструкције, и маса и тврдоћа главе модалног чекића. Амплитуда побудне силе је одређена величином чекића и брзином ударца.

Механизмом одзива се генерише одзив структуре помоћу сензора одзива (за помак, брзину или убрзање). Најчешће кориштени сензори одзива су пиезоелектрични давачи за мјерење убрзања одзива који се називају акцелерометри. Сигнал који је генерисан сензором је често слаб, па је неопходно кориштење појачала. У неким савременијим сензорима су појачала интегрисана и представљају саставни дио сензора.

Механизмом аквизиције и обраде података се мјери сигнал у механизму побуде и одзива и потом врши обрада измјерених података. За ово се користе тзв. динамички анализатори сигнала који морају бити вишеканални, односно најмање двоканални, због могућности истовременог мјерења сигнала побуде и одзива. Најједноставнији је *FFT* анализатор или спектрални анализатор за мјерење функција фреквенцијског одзива који је базиран на брзој Фуријеовој трансформацији (*Fast Fourier Transformation*). Овим анализатором се врши конвертовање аналогног временског сигнала генерисаног сензором у дигитални сигнал фреквенцијског домена, [10].

6.1.2. Основне претпоставке модалног тестирања

Постоје четири основне претпоставке које се односе на испитивану структуру приликом модалног тестирања, а то су:

- Линеарност испитиване структуре, што значи да се одзив структуре изложене симултаном дејству било које комбинације сила може добити сумирањем појединачних одзива те структуре изложене дејству сваке од тих сила појединачно. Ова претпоставка је у доброј мјери задовољена за широк спектар типова конструкција;
- Структура је временска инваријанта, односно параметри који се одређују нису промјенљиви током времена. Уопштено, системи за које не важи ова претпоставка садрже компоненте чија маса, крутост и пригушење зависе од фактора који се не могу измјерити и који нису укључени у модел. Уколико структура која се испитује није временска инваријанта, мјерења извршена на почетку и она извршена на крају периода испитивања ће дати различите сетове модалних параметара;
- Структура подлијеже Максвеловом закону реципроцитета, што значи да сила примијењена на позицији i узрокује одзив на позицији j који је исти као одзив на позицији i усљед побудне силе примијењене на позицији j . Уважавајући ово, слиједи да је и функција фреквенцијског одзива дефинисана побудом у i и одзивом у j иста као функција фреквенцијског одзива дефинисана побудом у j и одзивом у i , односно $h_{ij}=h_{ji}$;
- Структура је сагледива, односно мјерења одзива и побуде садрже довољно информација за генерисање адекватног модела понашања структуре. Неке

структуре имају степене слободе које није могуће измјерити, те се за њих каже да нису попутно сагледиве. Такође, у неким случајевима изабрана форма динамичког модела није одговарајућа, па се сагледивост структуре може обезбиједити промјеном модела, [12].

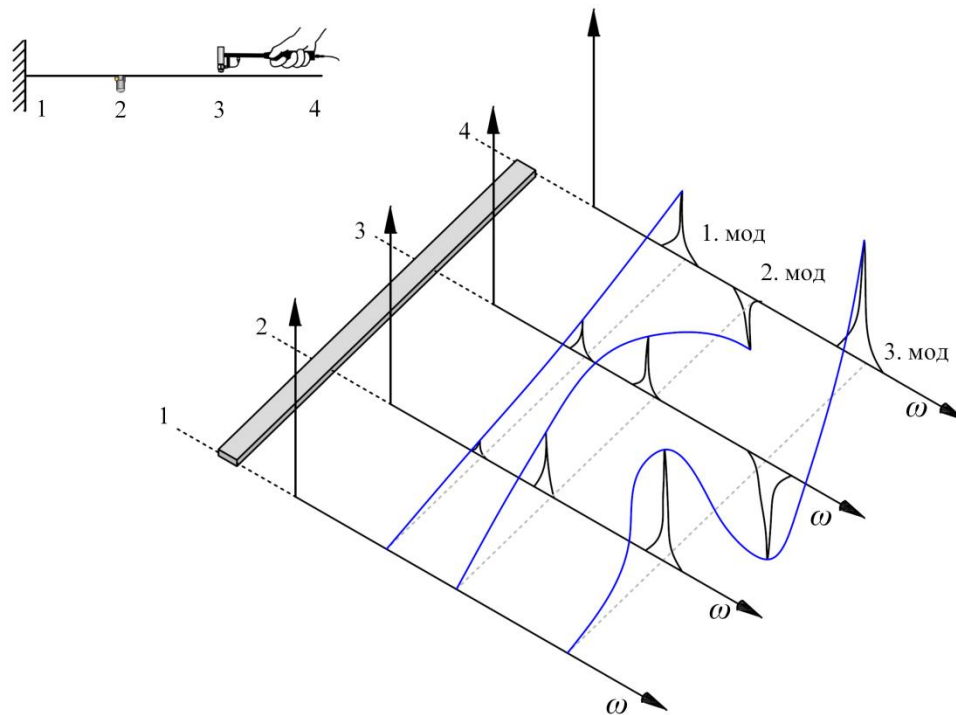
6.1.3. Мјерење функција фреквенцијског одзива

Након извршене дискретизације реалне структуре, укупан број степени слободе чини број мјерних тачака помножен са бројем праваца у којима се врши мјерење. Колоне матрице функција фреквенцијског одзива одговарају степенима слободе у којима је вршена побуда, а редови оним степенима слободе у којима је мјерен одзив структуре.

Функција фреквенцијског одзива може бити дефинисана преко помака, брзине и убрзања, па се тако разликују и различити облици ових функција: *Receptance*, *Mobility* и *Accelerance*. Функције фреквенцијског одзива имају и различите облике зависно од тачке и правца у коме се врши мјерење, па се тако разликују:

- „Директна *FRF* у тачки“: мјерење побуде и одзива се врши у истој тачки и једнаким правцима;
- „Унакрсна *FRF* у тачки“: мјерење побуде и одзива се врши у истој тачки, док су правци у којима се врши мјерење различити;
- „Директна преносна *FRF*“: мјерење побуде и одзива се врши у различитим тачкама и истом правцу;
- „Унакрсна преносна *FRF*“: мјерење побуде и одзива се врши у различитим тачкама и различитим правцима, [10].

Приликом модалног тестирања неопходно је измјерити најмање један ред или једну колону *FRF* матрице. Сопствена фреквенција и пригушење су глобалне карактеристике структуре и могу се очитати већ из једне измјерене функције фреквенцијског одзива. Пригушење се одређује из ширине резонантног врха на 3 *dB* ниже од самог врха. Модални облици се добијају спајањем врхова имагинарног дијела функција фреквенцијског одзива на свакој од резонантних фреквенција (Слика 18), те је за њихово дефинисање довољно измјерити један ред или једну колону матрице *FRF*, с обзиром да вриједи закон реципроцитета.



Слика 18. Мјерења функција фреквенцијског одзива

Зависно од броја тачака у којим се врши побуда, тестирање се може подијелити на тестирање у једној тачки и тестирање у више тачака истовремено. У овом раду је обрађено тестирање у једној тачки, које се односи на мјерење побуде и одзива у по једној тачки на структури, при чему је могуће помјерање позиције побуде или одзива.

Приликом тестирања модалним чекићем, могу се јавити два проблема везана за процесирање сигнала - шум и тзв. цурење. Уколико је трајање временског записа дуго, шум се може јавити и у сигналу побуде и у сигналу одзива. Цурење се јавља у сигналу одзива ако је временско трајање записа исувише кратко. За оба проблема се користе тзв. функције прозора: транзијентна и временска, односно експоненцијална функција. Примјеном транзијентног прозора се врши одстрањивање непотребног дијела сигнала, док се експоненцијални прозор користи у случајевима када структура која се испитује има мало пригушење, па сигнал одзива неће експоненцијално опасти унутар временског записа сигнала. Како је фреквенцијска резолуција дефинисана као инверзна вриједност дужине временског записа, односно $\Delta f = 1/T$, за њено побољшање је потребно повећати вријеме трајања записа, што за последицу има смањење грешке цурења.

Због могућности постојања шума у резултатима мјерења, дефинисани су различити естиматори за одређивање најтачније *FRF*. За отклањање случајног шума током

процеса осредњавања унакрсног спектра користи се естиматор H_1 који је дефинисан као количник унакрсног спектра побуде и одзива и аутоспектра побуде:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{FX}(\omega)}{S_{FF}(\omega)}. \quad (149)$$

Како се функција фреквенцијског одзива може дефинисати и као количник аутоспектра одзива и унакрсног спектра побуде и одзива, могуће је дефинисати и естиматор H_2 као:

$$H_2(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XF}(\omega)}. \quad (150)$$

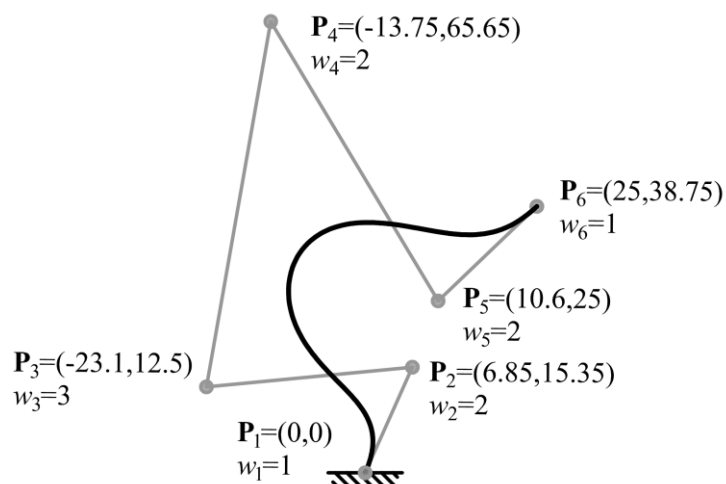
Уколико су задовољене све претпоставке модалног тестирања, ова два естиматора требају бити једнака тачној функцији фреквенцијског одзива. Однос ова два естиматора дефинише функцију кохеренције која је дата као:

$$\gamma_{FX}^2(\omega) = \frac{|S_{FX}(\omega)|^2}{S_{FF}(\omega)S_{XX}(\omega)} \quad (151)$$

и која представља мјеру линеарне зависности између сигнала излаза и сигнала улаза. Функција кохеренције узима вриједности од 0 до 1 и има једничну вриједност када је овај однос у потпуности линеаран, [10].

6.2. Модално тестирање челичне греде

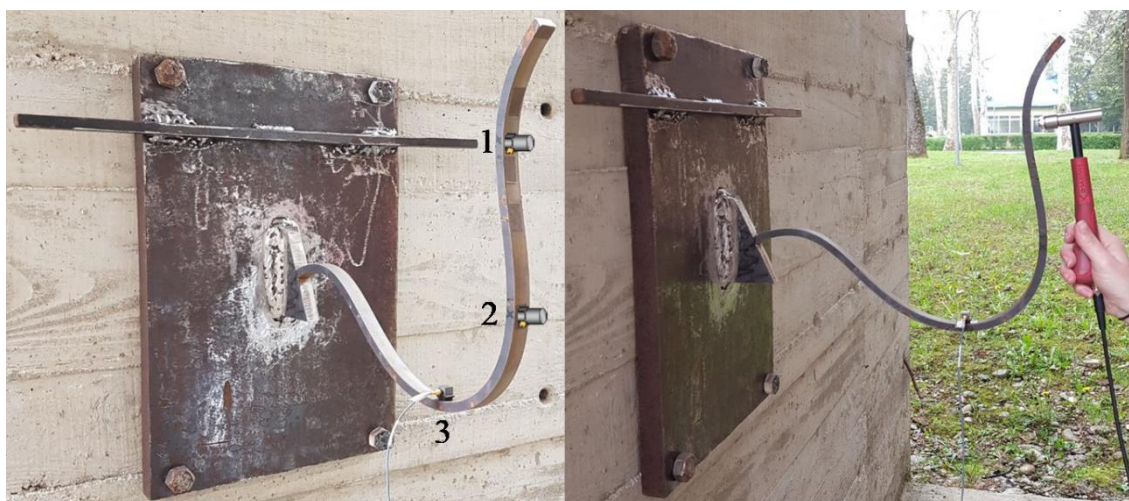
Експериментално испитивање физичког модела закривљене греде је рађено уз помоћ софтвера за експерименталну модалну анализу *Me'Scope Ves*. Испитивана је укљештена греда чија је геометрија осе описана рационалном Безиеровом кривом петог степена. Облик греде са координатама контролних тачака и тежинским факторима је приказан на Слици 19.



Слика 19. Геометрија греде, [13]

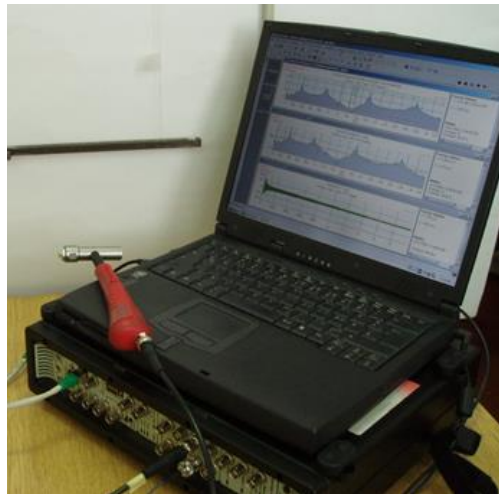
Физички модел је добијен сјечењем челичног лима дебљине 18 mm на CNC машини која ради на бази воденог млаза. Извршено је детаљно мјерење димензија попречног пресека и као просјечне вриједности су усвојене ширина од 18 mm и висина од 9.75 mm. За потребе прорачуна усвојене су уобичајене вриједности материјалних карактеристика за челик. За модул еластичности челика је усвојена вриједност од 205 GPa, за густину $7.86 t/m^3$, а за Поасонов коефицијент 0.3.

На укљештеном крају греде у продужетку је остављен држач за омогућавање лакшег остваривања задатог граничног услова. Држач је заварен за челичну плочу димензија 550x350x30 mm, која је везана за масивни бетонски зид са четири вијка M20. Поставка експеримента са означеним мјерним позицијама је приказана на Слици 20.



Слика 20. Поставка експеримента, [13]

Циљ модалног тестирања је било одређивање првих 5 сопствених фреквенција и поређење резултата са оним добијеним нумерички. Као метод тестирања одабрано је тестирање у једној тачки, при чему је побуда вршена модалним чекићем. Модално тестирање је вршено употребом четвороканалног аквизицијског система *Portable Pulse 3560 C* и једноаксијалног акцелерометра типа *4507* које производи *Bruel&Kjaer*. Побуда на дефинисаној физичкој локацији у одређеном правцу је вршена помоћу модалног чекића типа *2302-10, Endevco*, са пластичним врхом, Слика 21.



Слика 21. Мјерна опрема

Тест је извршен постављањем фреквенцијског опсега *FFT* анализатора $0-800 \text{ Hz}$ са фреквенцијском резолуцијом од 0.25 Hz и са 3 линеарна осредњавања. За пондерисање сигнала улаза и излаза су кориштене функције прозора: примјена транзијетног прозора за сигнал побуде и примјена експоненцијалног прозора за сигнал одзива. Акцелерометар је постављан на сваку од назначених мјерних позиција, док је побуда задавана у преостале двије. Мјерења су извршена више пута за сваку комбинацију мјерних тачака и у Табели 1 и Табели 2 су дате упросјечене вриједности фреквенција добијених експериментом поређене са нумеричким резултатима добијеним изогеометријском анализом примјеном двије гредне теорије. Највећа релативна грешка се јавила у четвртом моду, и у случају примјене Бернули-Ојлеровог гредног елемента износи 2.38% , док је у случају Тимошенковог елемента 2.01% .

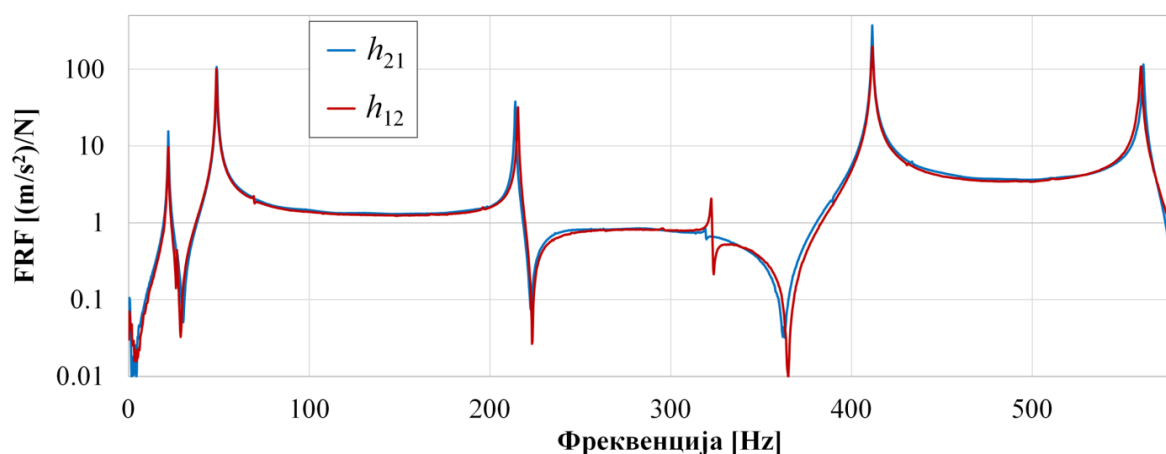
Табела 1. Поређење сопствених фреквенција, Бернули-Ојлерова гредна теорија

Експеримент [Hz]	22.00	48.75	215.5	411.5	568.2
ИГА [Hz]	21.89	49.335	215.21	421.35	580.02
Рел. грешка [%]	0.50	1.19	0.14	2.38	2.08

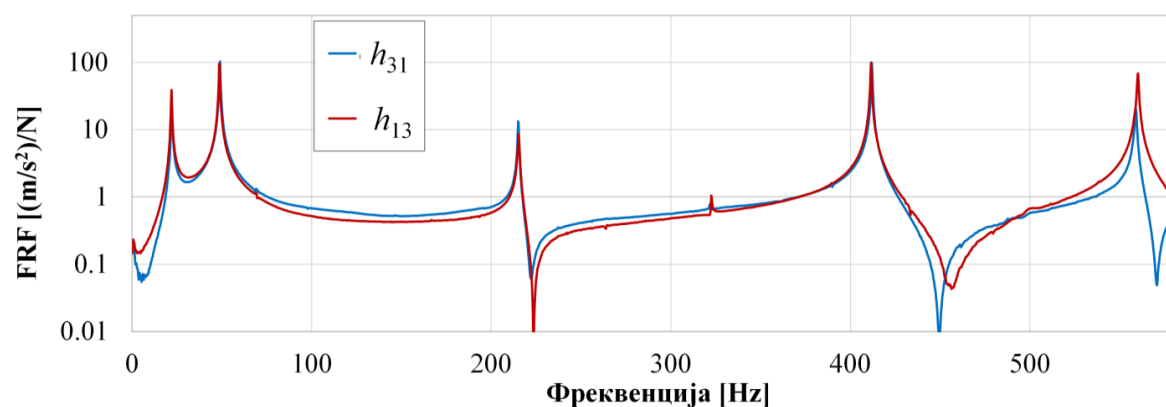
Табела 2. Поређење сопствених фреквенција, Тимошенкова гредна теорија

Експеримент [Hz]	22.00	48.75	215.5	411.5	568.2
ИГА [Hz]	21.88	49.3	214.89	419.8	576.05
Рел. грешка [%]	0.52	1.13	0.28	2.01	1.38

Линеарност структуре је испитана путем Максвеловог закона реципроцитета који је тестиран за двије комбинације мјерних локација (1-2 и 1-3), Сlike 22 и 23. У оба случаја, може се примијетити добро преклапање функција фреквенцијског одзива.

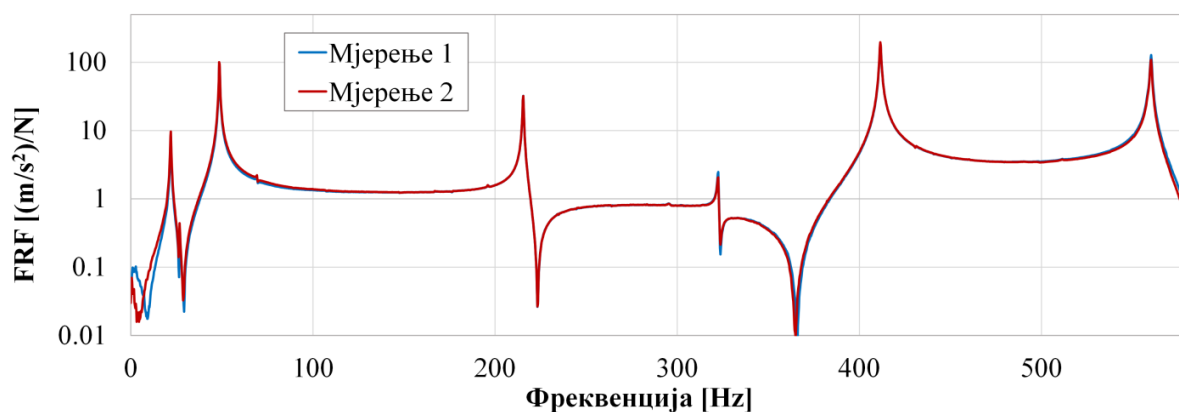


Слика 22. Поређење функција фреквенцијског одзива у мјерним тачкама 1 и 2



Слика 23. Поређење функција фреквенцијског одзива у мјерним тачкама 1 и 3

На наредној слици се може примијетити да су функције фреквенцијског одзива измјерене у два мјерења са одзивом мјереним на позицији 1, уз задавање импулсне побуде на позицији 3 готово идентичне. Мјерење је извршено са циљем утврђивања поновљивости мјерења, односно да би се установило да су динамичко понашање структуре и поставка мјерног система временска инваријанта.

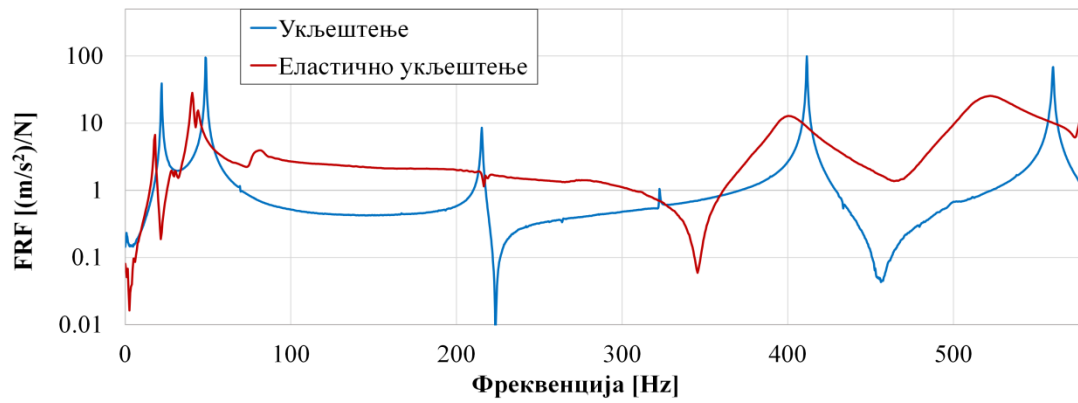


Слика 24. Провјера поновљивости теста

Интересантно је напоменути да су прва мјерења вршена остваривањем укљештења помоћу стеге, причвршћивањем за радни сто, Слика 25. Одзив конструкције у овом случају није давао резултате који се поклапају са нумеричким. Добијене су ниже фреквенције, док су ширине резонантних врхова указивале на веће вриједности пригушења. Функције фреквенцијског одзива „еластично укљештеног“ физичког модела су упоређене са оним добијеним постизањем стварног укљештења, Слика 26. Битно је нагласити да мјерења за ова два модела нису вршена у истим тачкама. У случају „еластичног укљештења“, мјерење је вршено у чворној тачки трећег мода, што се може примјетити и из облика функције, с обзиром да нема резонантног врха који одговара трећој фреквенцији.

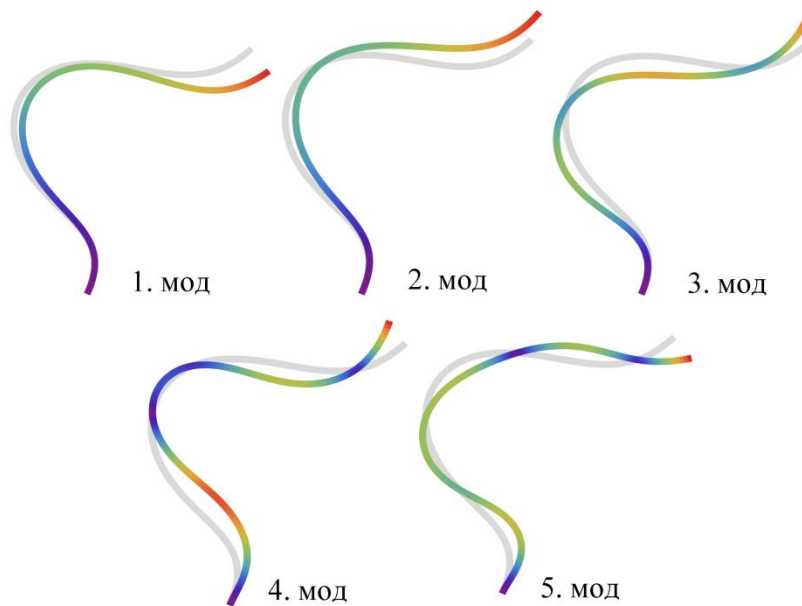


Слика 25. Првобитна поставка експеримента



Слика 26. Поређење функција фреквенцијског одзива за различите граничне услове

На наредној слици су приказани облици осциловања посматране греде за првих пет модова.



Слика 27. Облици осциловања греде

7. НУМЕРИЧКИ ПРИМЈЕРИ

У овом дијелу рада, извршена је детаљна анализа слободних вибрација произвољно закривљених греда у равни. Кроз одабране нумеричке примјере, испитан је утицај техника побољшања мреже коначних елемената на својства конвергенције. Такође, анализа је вршена за различите вриједности мјере закривљености греда, при чему је као мјера закривљености усвојен је производ максималне вриједности кривине и висине попречног пресека $K_{\max}h$. Приликом рачунања потребних матрица изогеометријског коначног елемента, интергација је вршена нумерички, примјеном Гаусових квадратурних формула, при чему су за број Гаусових тачака усвојене вриједности $p+1$. Истраживања у вези са оптималним начином интеграције у изогеометријској анализи су дата у [14], гдје су приказана одређена побољшања која имају значајнији ефекат када је у питању нелинеарна анализа.

Конвергенција резултата је испитана за случајеве h -, p - и k - побољшања мреже коначних елемената. Тестиран је и ред конвергенције, за који је као оптималан дата вриједност $2(p-1)$, [15]. За мрежу са бројем елемената n_{el} , ред конвергенције је дефинисан као:

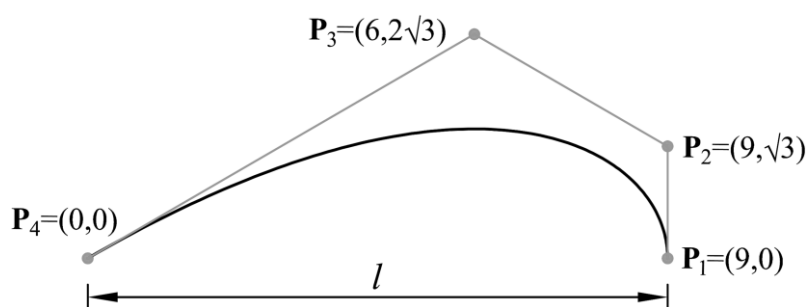
$$\left| \log_{10} \frac{|\omega_{n_{el}}^h - \omega|}{|\omega_{n_{el}-1}^h - \omega|} \right| / \log_{10} \left(\frac{n_{el}}{n_{el}-1} \right), \quad (152)$$

при чему је ω референтна вриједност, а ω_m^h вриједност добијена са мрежом од m елемената. Као референтне вриједности су узета рјешења добијена са густом мрежом коначних елемената, већим бројем елемената и вишим степеном сплајна.

У примјерима су анализирани и нормализовани нумерички дискретни спектри, како би се детаљније испитала тачност виших модова у зависности од броја степени слободе. У резултатима анализе су добијене вриједности фреквенција са моделом са N активних степени слободе ω_n^h нормализоване са референтном вриједности ω_n . Као референтне вриједности су узети резултати модела са значајно већим бројем степени слободе.

Примјер 1:

У првом примјеру разматрана је *Tschirnhausen*-ова кубна крива правоугаоног попречног пресека чија је почетна геометрија егзактно описана Безиеровом кривом трећег степена, Слика 28.



Слика 28. Tschirnhausen-ова кубна крива, [6]

Исти примјер је анализиран у [5] примјеном Тимошенкове гредне теорије за различите нивое закривљености и различите граничне услове. Битно је напоменути да у том раду почетна геометрија није описана егзактно, него је добијена интерполацијом кроз сет тачака.

Резултати добијени изогеометријском анализом су поређени са оним датим у [5], као и са резултатима добијеним у *Abaqus*-у, анализирањем *1D* и изотропног *2D* модела. У случају *1D* модела су кориштене густе, исконвергиране мреже *B23* и *B21* елемената, који одговарају Бернули-Ојлеровом моделу без утицаја ротационе инерције и Тимошенковом моделу, респективно. Вриједности фреквенција су нормализоване и дате су као:

$$\bar{\omega}_i = \omega_i l^2 / (r \sqrt{E/\rho}), \quad (153)$$

гдје су ω_i сопствена фреквенција *i*-тог мода, ρ густина, E модул еластичности, r полупречник инерције и l распон греде. У поређењу са *2D* моделом, резултати добијени изогеометријском анализом примјеном Бернули-Ојлерове гредне теорије показују добро поклапање за ниво закривљености $K_{max}h \approx 0.1$. Максималне релативне грешке које се јављају су 2.9% у шестом моду за греду слободно ослоњену на оба краја и 2.5% за греду слободно ослоњену на почетку и укљештену на крају, такође у шестом моду. За ниво закривљености $K_{max}h \approx 0.2$, максимална релативна грешка се јавила у четвртом моду греде слободно ослоњене на оба краја и износи 5.4%. У случају Тимошенкове гредне теорије, добијене релативне грешке се добро поклапају, нарочито у вишим тоновима, гдје су се примјеном Бернули-Ојлерове теорије јављала већа одступања. Највећа одступања за ниво закривљености $K_{max}h \approx 0.1$ се, такође, јављају у шестом моду за греду слободно ослоњену на оба краја и греду слободно ослоњену на почетку и укљештену на крају, гдје релативне грешке износе 2.1% и 3.6%, респективно.

Максимална релативна грешка за ниво закривљености $K_{max}h \approx 0.2$ је у четвртом моду греде слободно ослоњене на оба краја и износи 4.6%. У већини преосталих случајева, релативне грешке су мање од 1%.

Резултати добијени у [5] за ниво закривљености $K_{max}h \approx 0.2$ су упоређени са оним добијеним кориштењем елемента *B21* и показано је да се грешке повећавају како се повећава број мода. Највеће одступање је у 6. моду обострано укљештене греде са релативном грешком од 1.6%. У поређењу са резултатима добијеним у [5], за случај Бернули-Ојлеровог изогеометријског елемента, највећа грешка се јавила у 6. моду за обострано укљештену греду и износи 6.1%. Резултати добијени изогеометријском анализом Тимошенкове греде показују добра поклапања, при чему су одступања у свим случајевима мања од 0.3%. Разлици у резултатима свакако доприноси и различита почетна параметризација криве.

У поређењу са резултатима добијеним кориштењем елемента *B23*, најбоља поклапања имају модели Бернули-Ојлерове греде без утицаја ротационе инерције. Највећа релативна грешка је у првом моду греде слободно ослоњене на почетку и укљештене на крају и износи 0.28% за ниво закривљености $K_{max}h \approx 0.1$. Узимајући у обзир утицај ротационе инерције, грешке се крећу 0.9-0.95% за све граничне услове, док су за случај Тимошенкове гредне теорије значајније, нарочито у шестом моду за већи ниво закривљености. Највећа релативна грешка се јавила за обострано укљештену греду и износи 6.4%.

Табела 3. Поређење сопствених фреквенција *Tschirnhausen*-ове криве, слободно ослоњене на оба краја

		<i>Abaqus 2D</i> модел	<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа		[5]	
$K_{max}h$	Мод	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова гред <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова гред са утицајем ротационе инерције	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда	
$3\sqrt{3}/50$	1	21.15	21.11	21.12	21.14	21.14	21.11	
	2	54.17	54.07	54.22	54.22	54.25	54.06	
	3	104.8	104.6	105.1	105.0	105.1	104.49	
	4	168.0	167.8	169.0	168.8	169.1	167.5	
	5	247.8	247.3	250.2	249.7	250.3	246.96	
	6	296.7	304.7	305.4	305.3	305.4	304.53	
$3\sqrt{3}/25$	1	21.02	20.99	21.07	21.11	21.12	20.99	20.96
	2	53.37	53.31	53.87	53.87	53.97	53.26	53.14
	3	102.5	102.4	104.3	104.1	104.5	102.1	101.9
	4	141.1	147.8	148.9	148.7	149.0	147.53	147.4

5	169.8	172.0	175.8	175.1	176.1	171.12	171.0
6	238.8	239.5	249.2	247.5	249.8	237.4	236.8

Табела 4. Поређење сопствених фреквенција *Tschirnhausen*-ове криве, слободно ослоњене на почетку и укљештене на крају

		<i>Abaqus 2D</i> модел	<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа			[5]
$K_{max}h$	Мод	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда	
$3\sqrt{3}/50$	1	26.98	26.94	26.93	27.00	27.01	26.92	
	2	61.91	61.82	62.05	62.06	62.09	61.75	
	3	116.2	116.0	116.8	116.7	116.8	115.79	
	4	180.3	180.1	181.8	181.6	181.9	179.67	-
	5	260.6	261.0	264.0	263.5	264.1	260.12	
	6	299.4	305.9	307.0	306.8	307.1	305.58	
$3\sqrt{3}/25$	1	26.55	26.54	26.77	26.78	26.80	26.47	26.45
	2	59.87	59.91	60.83	60.78	60.89	59.67	59.60
	3	110.4	110.7	113.2	112.9	113.3	109.98	109.9
	4	142.6	148.0	149.4	149.2	149.5	147.69	147.6
	5	185.2	187.5	193.2	192.2	193.3	185.98	185.9
	6	252.8	253.5	265.4	263.3	265.7	250.40	250.1

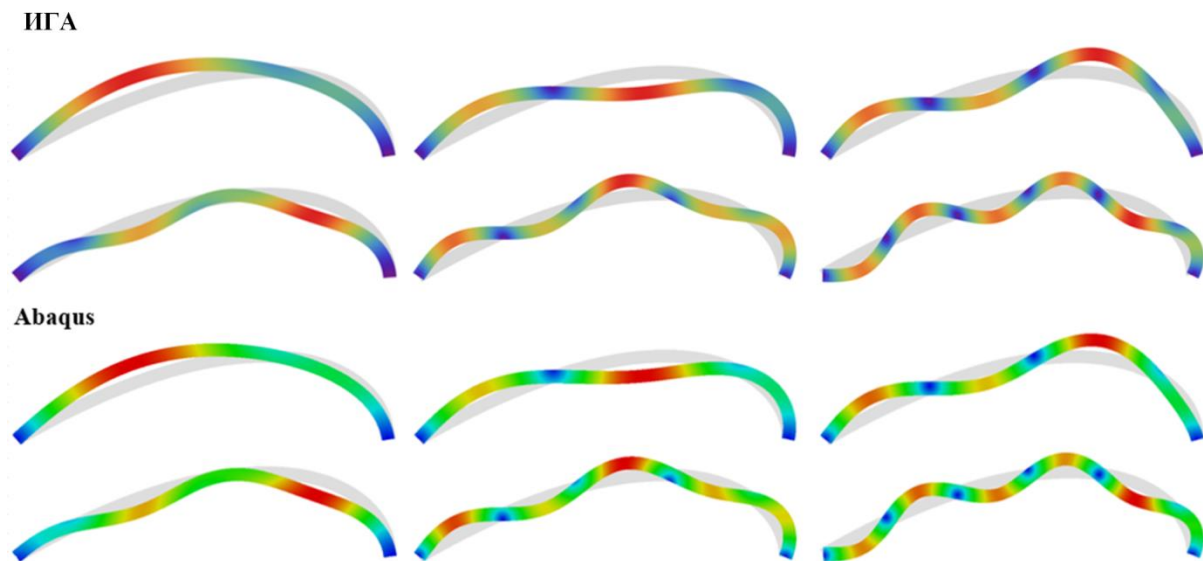
Табела 5. Поређење сопствених фреквенција *Tschirnhausen*-ове криве, слободно ослоњене на крају и укљештене на почетку

		<i>Abaqus 2D</i> модел	<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа			[5]
$K_{max}h$	Мод	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда	
$3\sqrt{3}/50$	1	28.57	28.52	28.53	28.58	28.58	28.51	
	2	64.59	64.47	64.68	64.71	64.74	64.43	
	3	119.6	119.4	120.1	120.1	120.2	119.22	
	4	185.5	185.2	186.8	186.6	186.9	184.77	-
	5	269.7	269.3	272.6	272.2	272.8	268.48	
	6	306.3	306.6	307.1	306.9	307.1	306.34	
$3\sqrt{3}/25$	1	28.35	28.30	28.50	28.54	28.55	28.28	28.23
	2	63.29	63.20	64.11	64.11	64.23	63.04	62.91
	3	116.6	116.5	119.2	119.0	119.5	115.91	115.6
	4	149.6	150.2	151.0	150.7	150.9	149.92	150.0
	5	187.0	186.8	192.7	191.8	193.0	185.38	185.1
	6	257.7	258.3	270.6	268.8	271.3	255.40	254.8

Табела 6. Поређење сопствених фреквенција *Tschirnhausen*-ове криве, укљештене на оба краја

		<i>Abaqus 2D</i> модел	<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа			[5]
$K_{max}h$	Мод	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције			Тимошенкова греда
					Бернули- Ојлерова греда	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда	
$3\sqrt{3}/50$	1	35.57	35.51	35.58	35.62	35.63	35.48	
	2	72.70	72.57	72.93	72.93	72.97	72.46	
	3	131.9	131.7	132.7	132.65	132.8	131.39	
	4	197.7	197.3	199.5	199.2	199.5	196.72	
	5	281.8	281.4	284.6	284.2	284.7	280.46	
	6	311.5	311.3	313.1	312.7	313.1	310.8	
$3\sqrt{3}/25$	1	34.94	34.91	35.32	35.34	35.36	34.79	34.75
	2	69.75	69.68	71.04	70.95	71.09	69.29	69.21
	3	124.6	124.5	127.7	127.4	127.8	123.59	123.5
	4	152.3	152.2	153.9	153.7	154.0	151.83	151.7
	5	202.9	202.7	210.5	209.4	210.7	200.56	200.4
	6	271.7	271.5	285.8	283.6	286.1	267.47	267.2

Испитивањем *2D* изотропног модела, примијећена је концентрација напона која се јавила приликом моделовања зглобно ослоњене греде, што је довело до значајније разлике у резултатима у поређењу са *1D* моделом. Ове разлике су мање наглашене код случајева када је зглобно ослањање са десне стране греде, гдје је тангента на осу греде вертикална. Облици осциловања греде слободно ослоњене на оба краја су приказане на Слици 29. одакле се може уочити добро поклапање са облицима добијеним примјеном изогеометријске анализе.

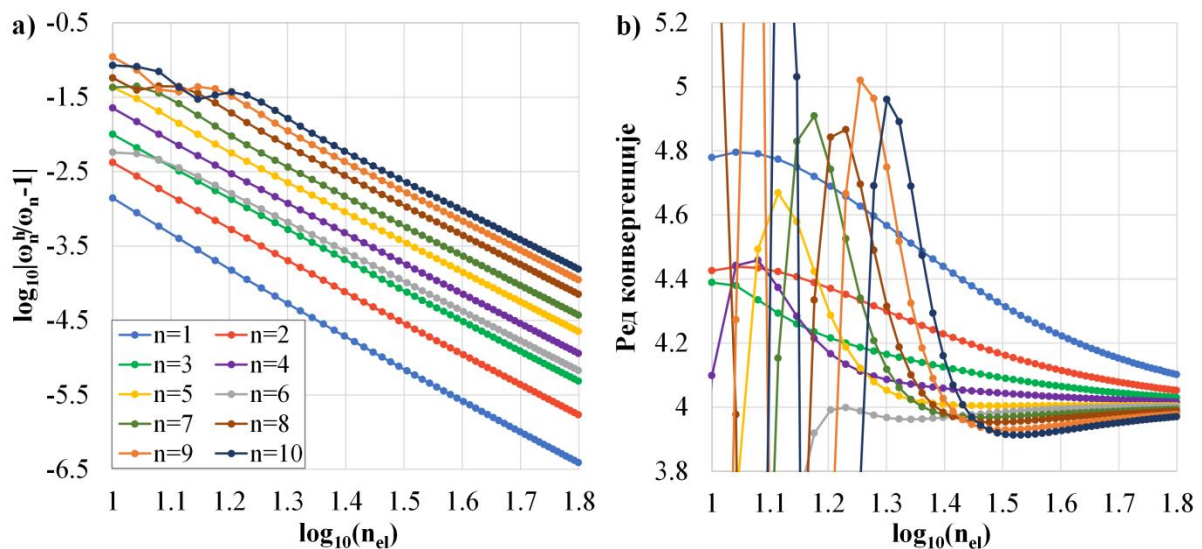


Слика 29. Облици осциловања греде слободно ослоњене на оба краја, $K_{max}h \approx 0.2$, [6]

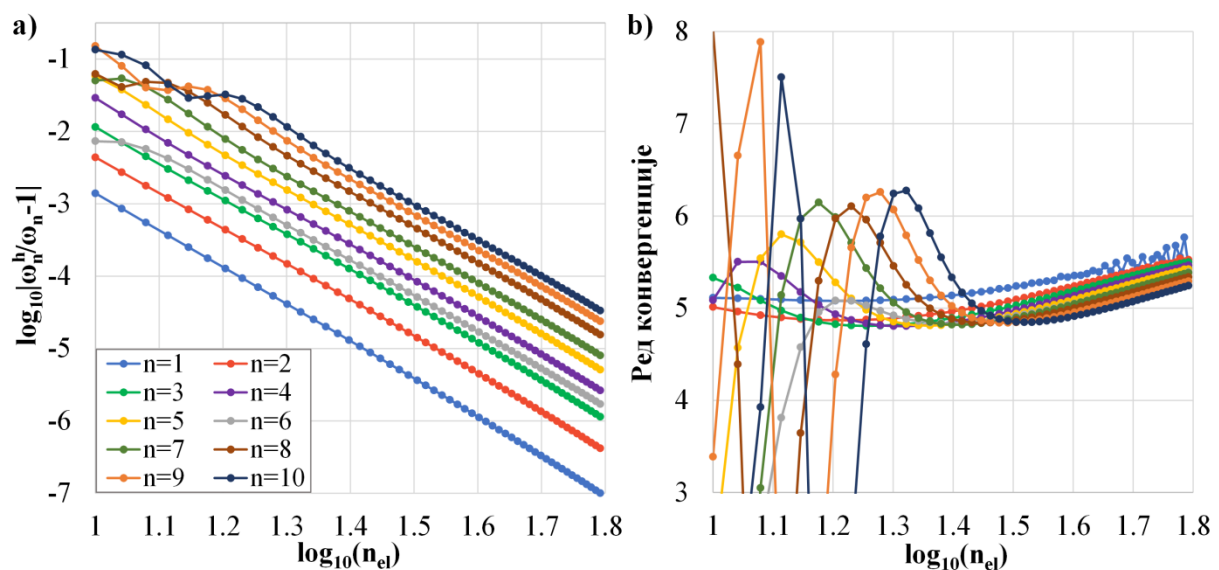
Конвергенција је испитана за случај греде слободно ослоњене на оба краја, нивоа закривљености $K_{max}h \approx 0.1$. На наредним сликама (Слика 30.- Слика 39.) су приказане релативне грешке са редом конвергенције, при чему је вршено h - побољшање мреже коначних елемената. Референтно рјешење је добијено из нумеричког модела са 120 елемената четвртог степена и континуитета C^3 за случај Бернули-Ојлерове и C^1 за случај Тимошенкове гредне теорије.

Кориштењем Бернули-Ојлеровог гредног елемента, добијена је добра конвергенција резултата. За кубни полином и C^1 континуитет, ред конвергенције тежи оптималном, док у случају континуитета C^2 тежи нешто већој вриједности. Максимум реда конвергенције је уочен за оба континуитета, с тим да у случају вишег континуитета има веће вриједности. За степен полинома $p=4$ се, такође, може уочити добра тачност. Посматрајући ред конвергенције, може се примјетити и осциловање реда конвергенције у случајевима гушћих мрежа, са већим бројем елемената, што може бити резултат операција са веома малим бројевима приликом анализе. У случају вишег континуитета, ред конвергенције је опет нешто виши од теоретске вриједности и може се уочити униформно понашање свих модова који су анализирани. С обзиром на сличност добијених резултата за различите континуитете, имајући у виду да повећање континуитета смањује број контролних тачака, а самим тим и број степени слободе, може се закључити да се повећањем континуитета добијају боља својства конвергенције и повећана тачност с обзиром на број степени слободе.

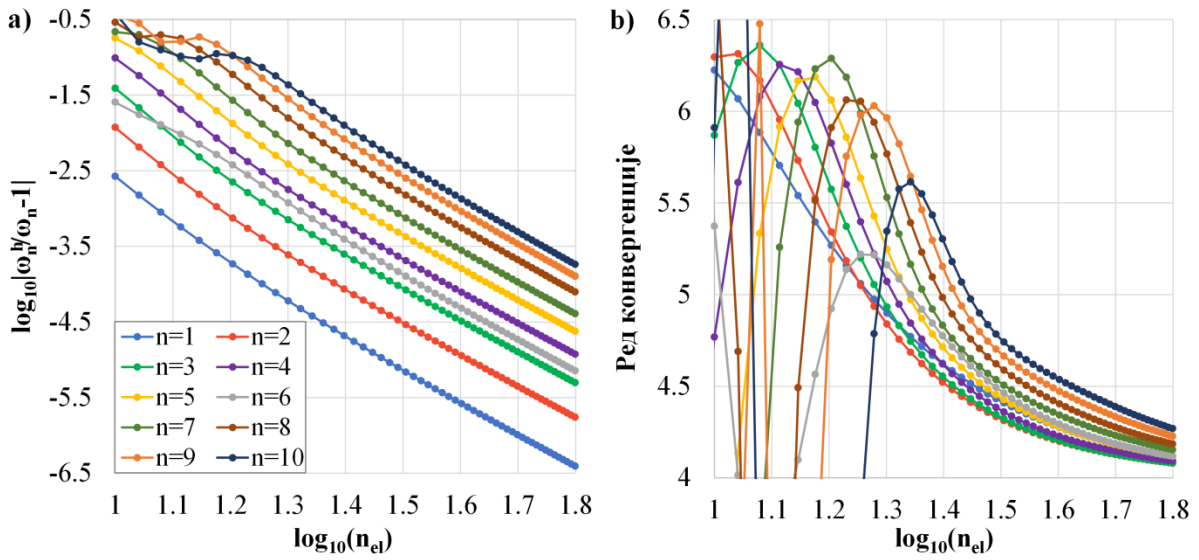
У случају Тимошенкове гредне теорије, ред конвергенције у свим случајевима тежи вриједностима већим од оптималне. За кубни Б-сплајн се, повећањем континуитета на границама елемената, повећава и вриједност којој ред конвергенције тежи, као и у случају Бернули-Ојлерове теорије. За степен полинома $p=4$, у случају континуитета C^1 и C^2 , ред конвергенције тежи одређеној вриједности са дна, при чему је вриједност за виши континуитет у овом случају смањена. За континуитет C^3 се може примијетити униформно понашање за све модове који са врха теже нешто већој вриједности у односу на мање континуитете.



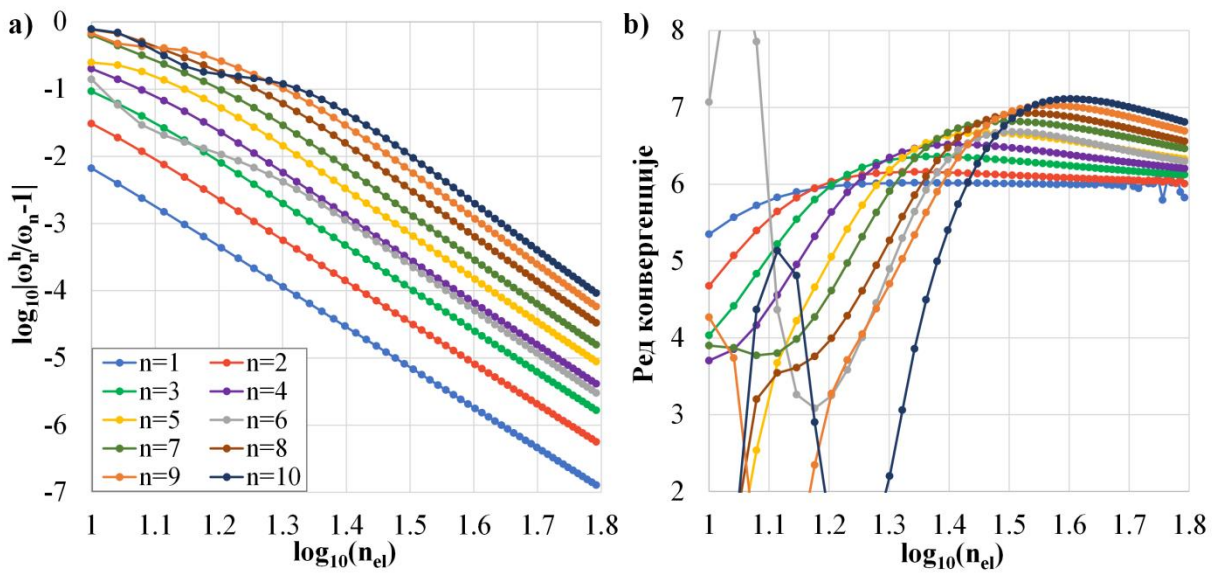
Слика 30. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=3$ и C^1 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



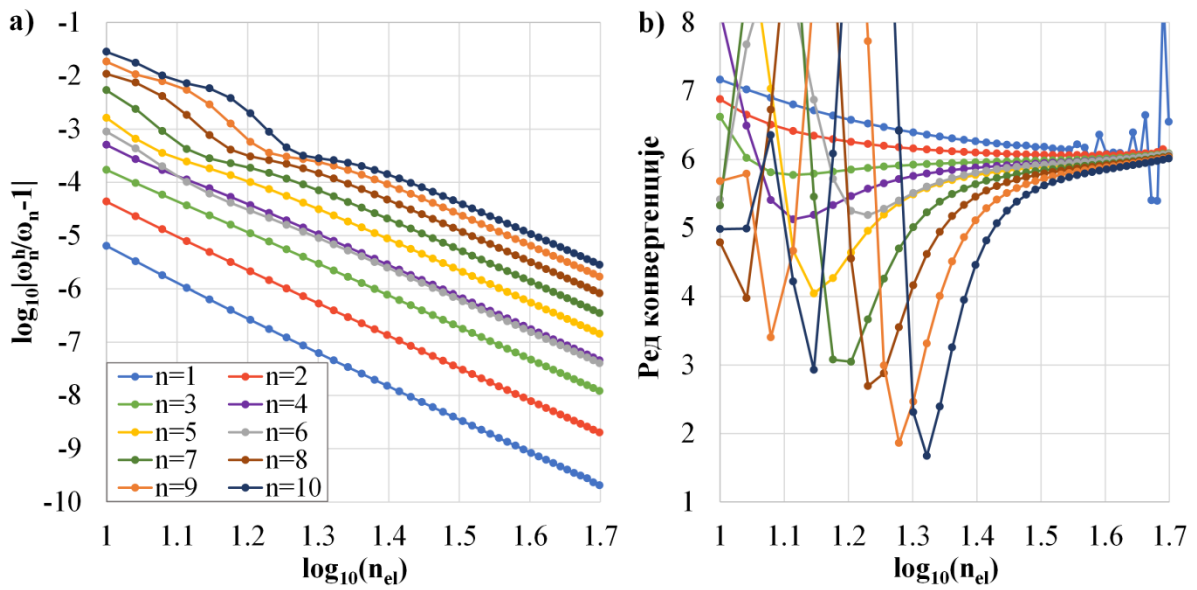
Слика 31. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=3$ и C^1 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



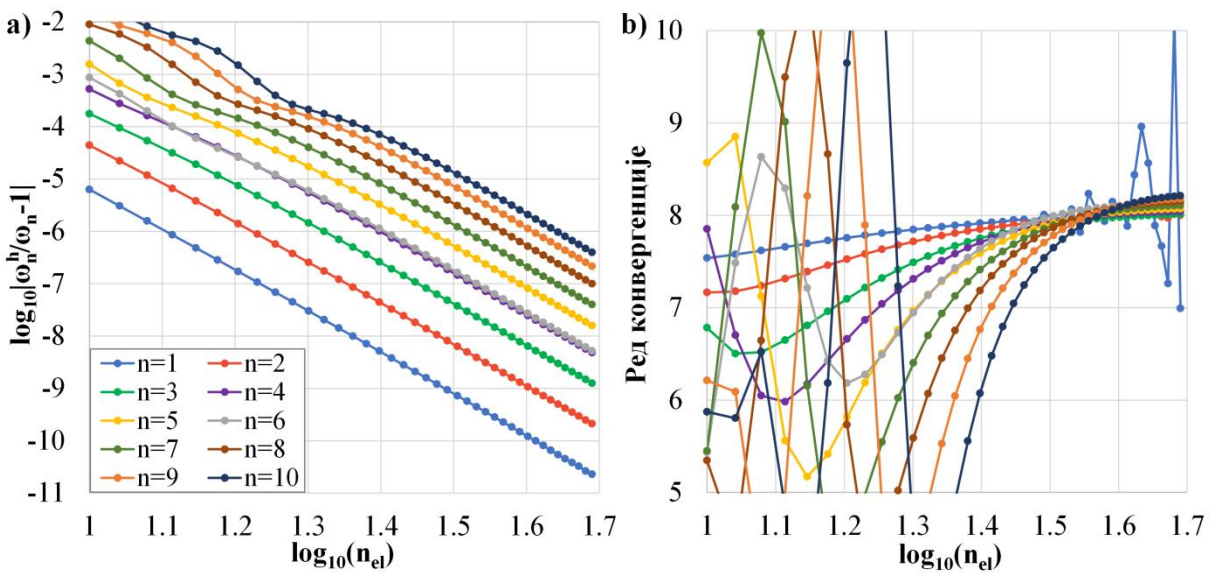
Слика 32. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=3$ и C^2 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



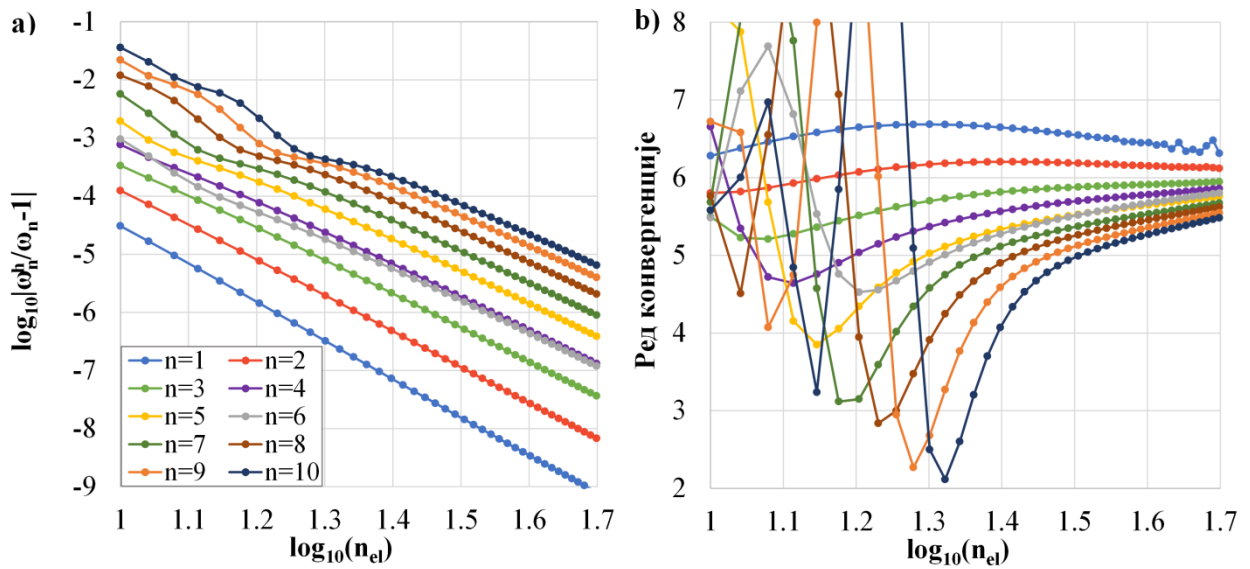
Слика 33. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=3$ и C^2 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



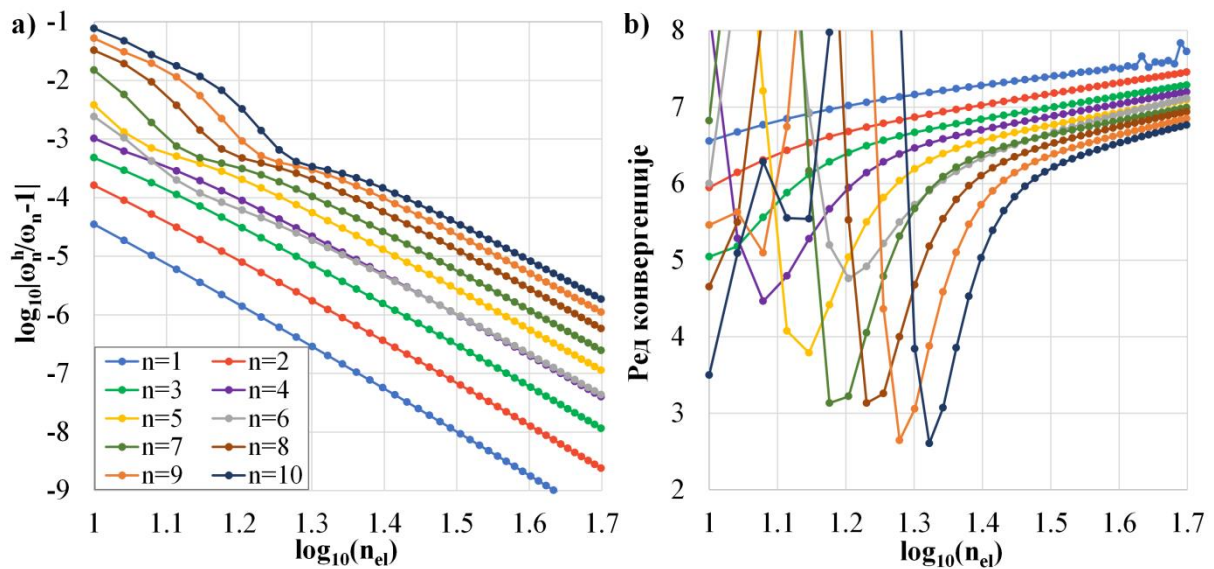
Слика 34. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=4$ и C^1 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



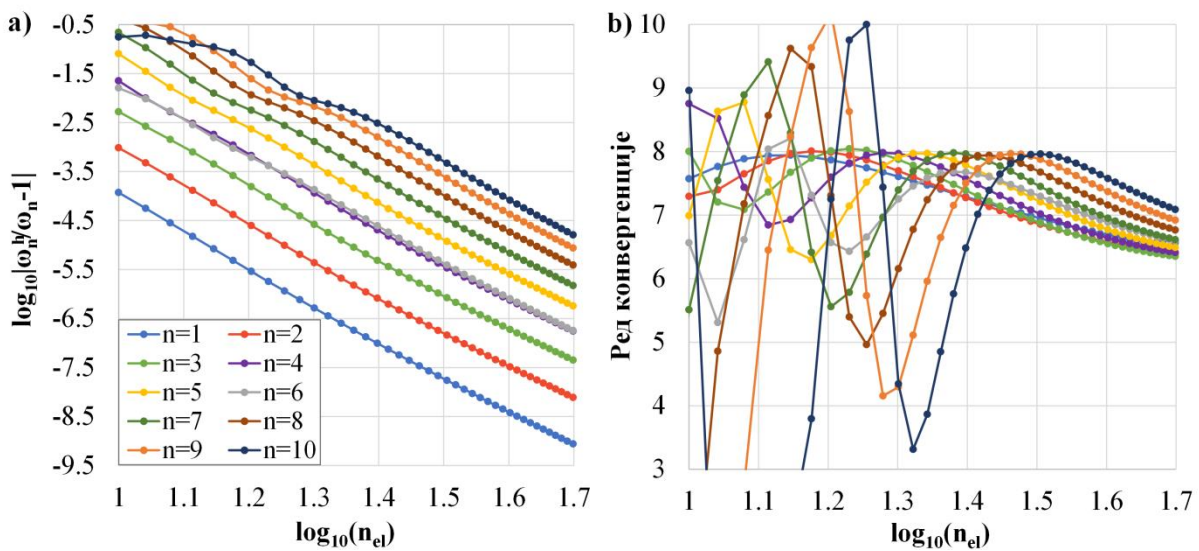
Слика 35. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=4$ и C^1 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



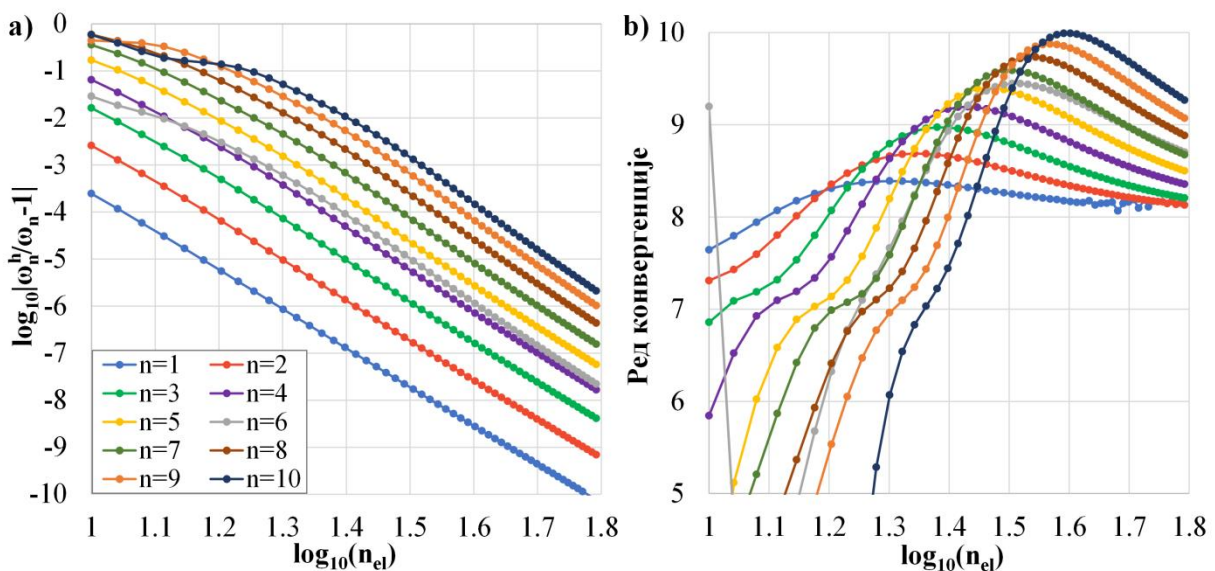
Слика 36. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=4$ и C^2 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



Слика 37. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=4$ и C^2 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



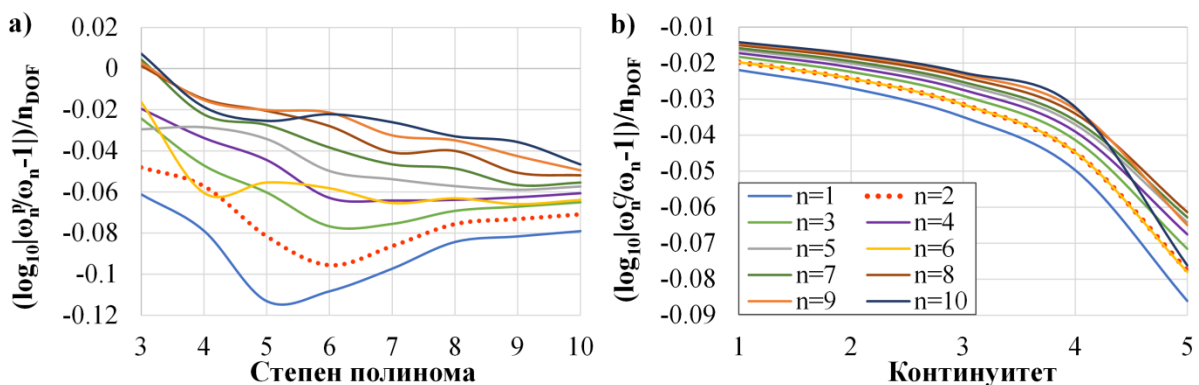
Слика 38. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=4$ и C^3 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



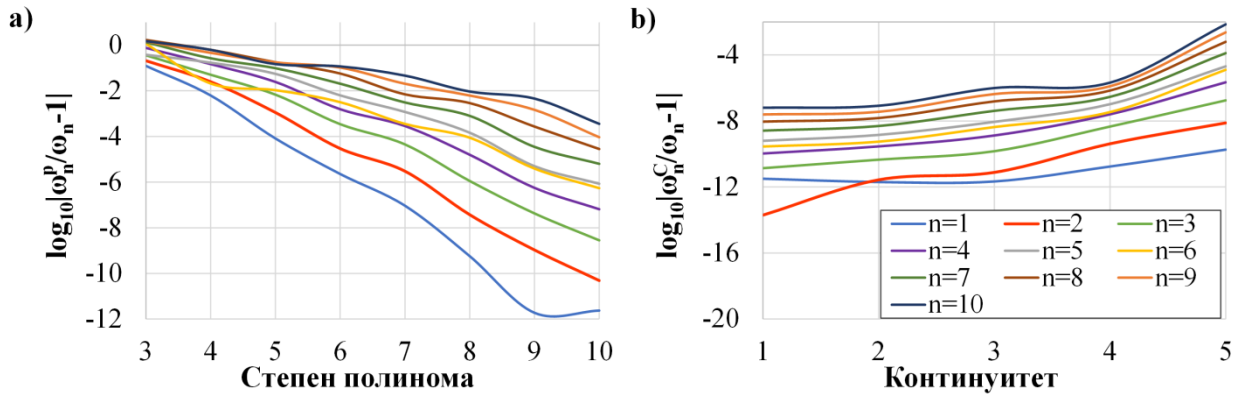
Слика 39. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $p=4$ и C^3 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције

Надаље су анализирана k - и p - побољшања мреже коначних елемената. У случају Бернули-Ојлерове теорије, може се примијетити да се повећањем континуитета повећава и тачност у односу на број степени слободе, Слика 40б. У случају подизања степена полинома се могу уочити локални минимуми, који су нарочито наглашено код нижих модова, Слика 40а. Иста дискретизација је кориштена и за анализу Тимошенкове гредне теорије, Слика 41. и Слика 42. Повећањем степена полинома се уочава слично понашање, с тим да су за прву сопствену фреквенцију уочени минимуми на већем степену. Ови локални минимуми указују на то да се за дефинисану

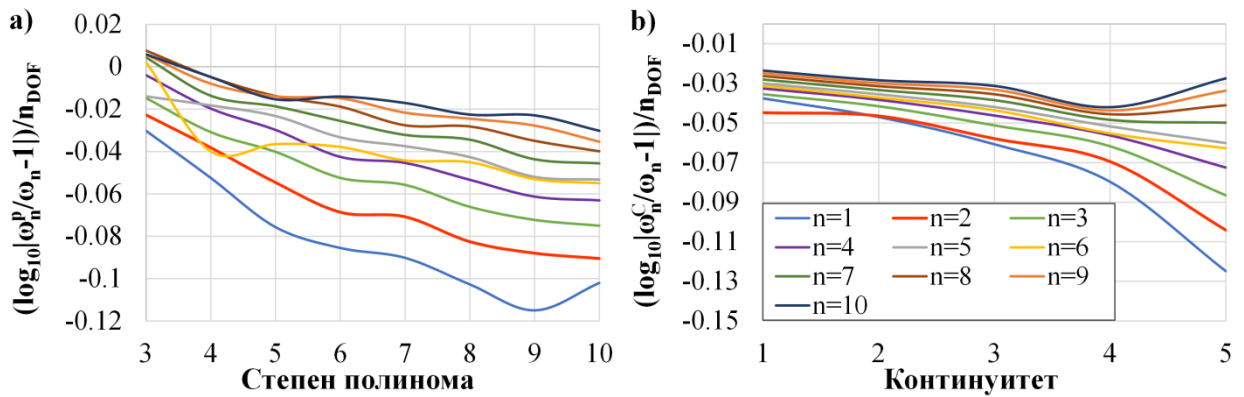
дискретизацију, односно фиксиран континуитет и број елемената, може изабрати оптималан степен полинома за добијање одређене сопствене фреквенције. Подизање континуитета у овом случају није дало побољшану тачност с обзиром на број степени слободе за све модове, односно изузетак чине виши модови са континуитетом на границама елемената C^5 . Анализа је урађена и за мрежу са повећаним бројем коначних елемената, што је дало другачије резултате. За случај p - побољшања мреже коначних елемената се опет уочавају локални минимуми. Тако се, на примјер, за другу сопствену фреквенцију може уочити да је шести степен функције оптималан, док је за већи број преосталих фреквенција то степен $p=7$, Слика 44а. Такође, може се примијетити да је релативна грешка готово константа при повећању степена од $p=8$, па навише, Слика 43а. Са Сlike 43б се може уочити да релативна грешка расте повећањем степена континуитета. Уколико се та грешка подијели са бројем степени слободе, може се доћи до другог закључка. Такође, и у овом случају се може уочити локални минимум за девету сопствену фреквенцију и континуитет C^3 . За случај k - побољшања мреже, са подјелом од 20 елемената, за степене функције $p=5$ и $p=7$ се добијају сличне особине конвергенције као и у случају шестог степена са истим бројем елемената, Слика 45.



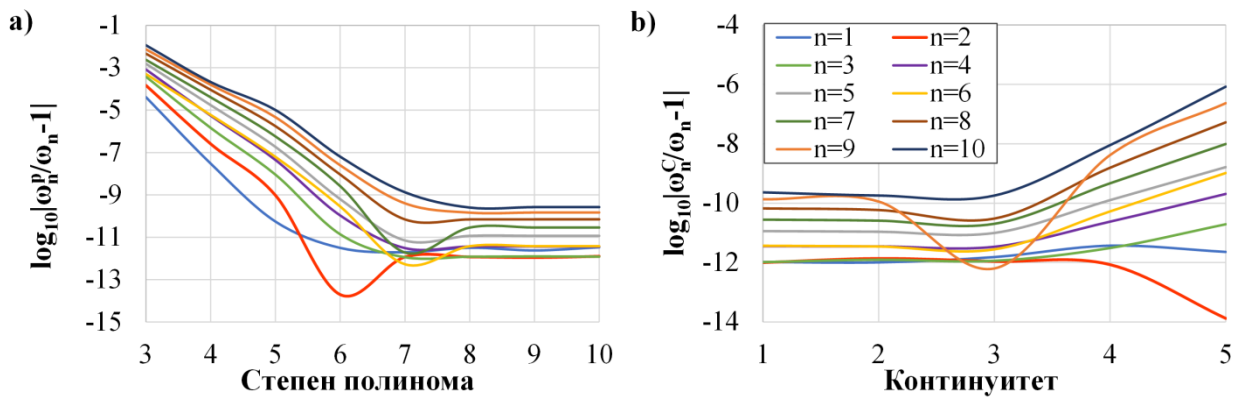
Слика 40. Испитивање конвергенције у зависности од броја степени слободе, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=6$, [6]



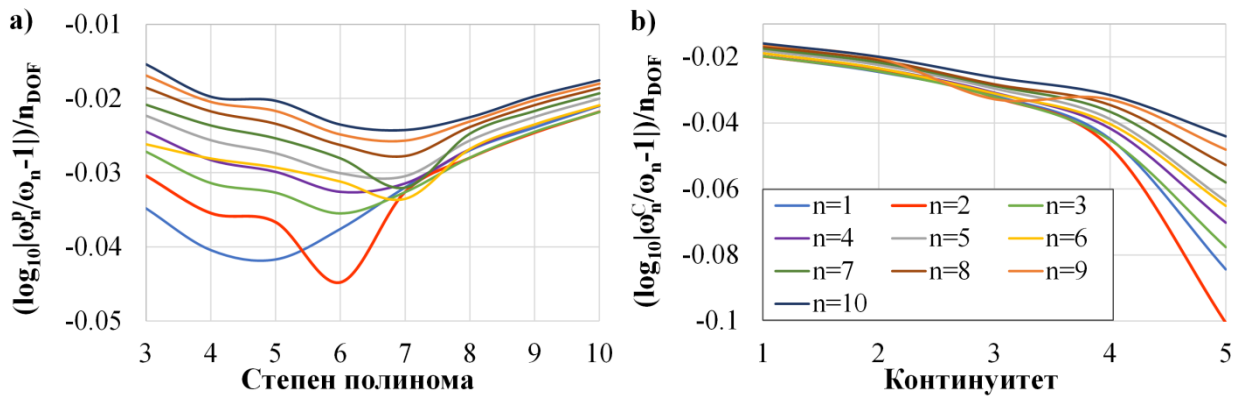
Слика 41. Испитивање конвергенције, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=6$



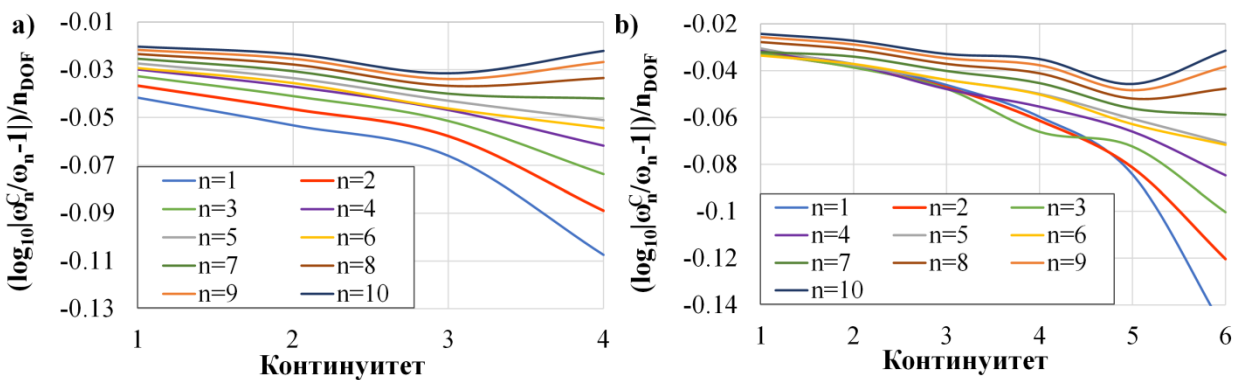
Слика 42. Испитивање конвергенције у зависности од броја степени слобода, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=6$



Слика 43. Испитивање конвергенције, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 20 елемената и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 40 елемената, $p=6$

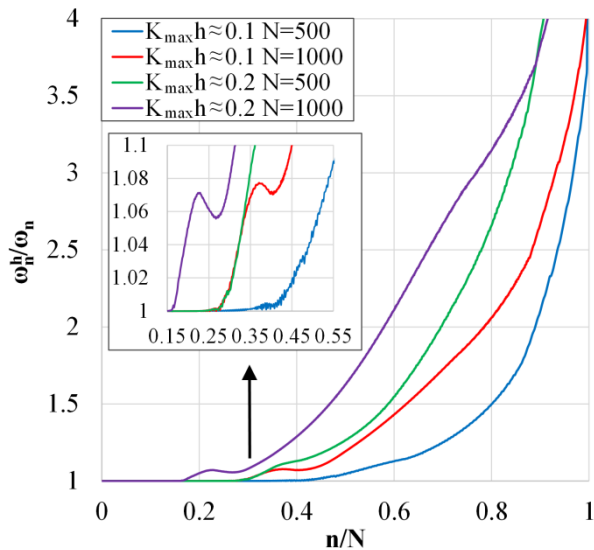


Слика 44. Испитивање конвергенције у зависности од броја степени слободе, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 20 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 40 елемената, $p=6$



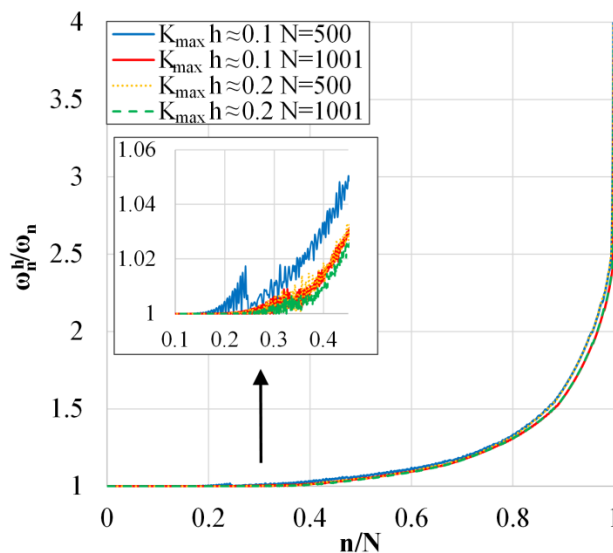
Слика 45. Испитивање конвергенције у зависности од броја степени слободе, Тимошенкова гредна теорија: а) k - побољшање мреже са 20 елемента, $p=5$, б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=7$

Референтно рјешење за анализу нормализованог нумеричког дискретног спектра је за случај Бернули-Ојлерове гредне добијено са око 1000 кварталних елемената са континуитетом C^3 . Анализирана је *Tschirnhausen*-ова греда која је слободно ослоњена на оба краја. Анализа је рађена са 500 и 1000 степени слободе за добијање $N=500$ и $N=1000$ сопствених фреквенција греда различитих закривљености. Са наредне слике се може уочити да број степени слободе знатно утиче на спектар, што није очекиван резултат. Такође, тачност опада за повећање закривљености, као и за већи број степени слободе.



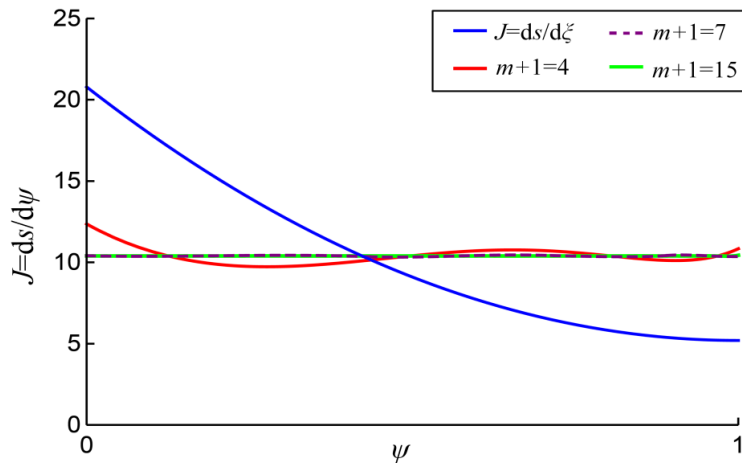
Слика 46. *Tschirnhausen*-ова крива, нормализовани дискретни спектар за Бернули-Ојлерову гредну теорију, [6]

У случају Тимошенкове гредне теорије, референтно рјешење је добијено са око 670 кварталних елемената са континуитетом C^3 , односно око 2000 степени слободе. Са Сlike 47 се може уочити да број степени слободе у овом случају не утиче у знатној мјери на спектар. Повећање нивоа закривљености у овом случају такође није имало утицаја на облик спектра.



Слика 47. *Tschirnhausen*-ова крива, нормализовани дискретни спектар за Тимошенкову гредну теорију

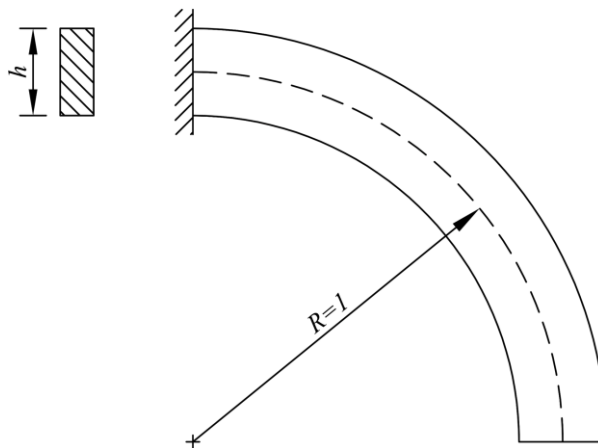
Извршена је и репараметризација криве и на наредној слици се може уочити утицај повећања броја контролних тачака *PTF*-а на Јакобијан, који је већ у случају 7 контролних тачака готово константа.



Слика 48. Tschirnhausen-ова крива, Јакобијан

Примјер 2:

У другом примјеру је испитана четвртина кружнице правоугаоног попречног пресека која је укљештена на лијевом крају, Слика 49. На примјеру је детаљно испитана и примјенљивост изогеометријске анализе за греде већих нивоа закривљености.



Слика 49. Кружни лук, [6]

Резултати су поређени са оним добијеним у *Abaqus*-у анализирањем *2D* и *1D* модела. Направљен је и *2D* модел са ортотропним материјалним карактеристикама, како би се детаљно извршило поређење са Бернули-Ојлеровим гредама већих нивоа закривљености. Модул еластичности у правцу η координате и модул смицања су знатно увећани, како би се симулирале претпоставке Бернули-Ојлерове гредне теорије.

Након детаљне анализе, за фактор мултипликације модула је усвојена емиријска вриједност $100Kh$. Битно је напоменути да је у овом примјеру вриједност кривине јединична, па утицај тог дијела на фактор мултипликације није утврђен. Резултати су поређени и са егзактним рјешењима датим у [16]. У наредним табелама су приказане вриједности сопствених фреквенција за првих десет модова за различите нивое закривљености: $Kh=0.2$, $Kh=0.5$ и $Kh=1$ које су нормализоване са $r\sqrt{E/\rho}$, гдје је ρ густина, E модул еластичности, а r полупречник инерције. Резултати изогеометријске анализе су добијени са мрежом од 32 квартна елемента са континуитетом C^3 , што је 72 степена слободе у случају Бернули-Ојлерове и 108 степени слободе за случај Тимошенкове гредне теорије. У случају $2D$ модела, резултати су добијени са око 160 000 степени слободе. Испитивање $1D$ модела је рађено са густим мрежама $B21$ и $B23$ елемената, који одговарају Тимошенковом моделу и Бернули-Ојлеровом моделу без утицаја ротационе инерције, респективно.

У случају Бернули-Ојлерове теорије без утицаја ротационе инерције су поклапања резултата добијених у *Abaqus*-у са густом мрежом $B23$ елемената и рјешењима датим у [16] веома добра. Изузетак је први мод гдје релативне грешке износе преко 1.6 % за ниво закривљености $Kh=0.5$ и 1.1% за $Kh=1$. У поређењу са изогеометријском анализом, за $Kh=0.2$ су грешке мање од 1%, док за веће вриједности нивоа закривљености варирају и највећа је у трећем моду за $Kh=1$ и износи 16%.

Узимајући у обзир и утицај ротационе инерције, добијени резултати су слични. Максимална релативна грешка у поређењу са [16] се јавила у другом моду греде нивоа закривљености $Kh=0.2$ у износу 1.1%, док за $Kh=1$ износи 11%. Ове разлике проистичу из геометријски егзактног приступа дефинисању примијењене теорије, због којих је она погодна и за анализу греда великих нивоа закривљености.

Анализом Тимошенкове греде, при поређењу резултата са рјешењима датим у [16], може се примијетити да су релативне грешке мање од 0.8% у свим модовима за $Kh=0.2$. Повећањем нивоа закривљености се повећавају и грешке, при чему се максималне јављају у другом моду и износе 3.6% за $Kh=0.5$ и 10.7% за $Kh=1$.

Анализа Бернули-Ојлеровим гредним елементом показује одлична поклапања са ортотропним моделом, чак и за веће нивое закривљености. Највеће грешке се јављају у деветом моду и за закривљености $Kh=0.2$ и $Kh=1$ износе 1.3% и 2.84%, респективно.

Најбоља поклапања се јављају за $Kh=0.5$, гдје је највећа грешка 0.7% и јавила се у четвртом моду.

У поређењу са резултатима добијеним употребом $B21$ елемента се могу уочити добра поклапања са изотропним $2D$ моделом, као и да се релативне грешке повећавају са порастом броја мода и нивоа закривљености греде. У поређењу са Бернули-Ојлеровим моделима са и без утицаја ротационе инерције се, такође, може уочити да се одступања повећавају у вишим модовима и већим вриједностима Kh . Међутим, у неким вишим модовима се, такође, могу уочити добра поклапања, као и одступања у нижим, нпр. у другом и петом му за закривљеност $Kh=0.5$. Анализом резултата у овим модовима по Бернули-Ојлеровој теорији и моделима са утицајем ротационе инерције и оним без, се може закључити да је у другом моду доминантно смицање, док у петом превадава утицај ротационе инерције. У поређењу са изогеометријским моделом Тимошенкове греде, модели са густом мрежом $B21$ елемената показују добро поклапање. За вриједности $Kh=0.2$, највећа релативна грешка је у првом моду и износи 0.64%. За ниво закривљености $Kh=0.5$ максимална грешка се јавља у другом моду и износи 3.2%, док је за $Kh=1$, вриједност највеће релативне грешке 10.7%, такође у другом моду.

Табела 7. Поређење сопствених фреквенција кружног лука са *Abaqus*-ом, $Kh=0.2$

Мод	<i>Abaqus 2D</i> модел		<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа		
	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Ортотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули-Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули-Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули-Ојлерова греда	Тимошенкова греда
1	1.481	1.495	1.482	1.504	1.494	1.502	1.486
2	6.683	7.037	6.627	7.053	7.046	7.110	6.669
3	18.08	19.21	18.10	19.80	19.26	19.82	18.111
4	24.81	25.78	24.73	26.31	25.82	26.47	24.804
5	37.93	43.63	37.80	47.20	43.93	47.49	37.876
6	53.43	54.01	53.55	54.86	54.03	54.77	53.543
7	57.89	69.67	57.99	79.11	70.38	79.75	57.913
8	78.38	87.26	77.92	88.68	87.29	88.37	78.070
9	87.13	99.08	88.21	118.4	100.3	119.4	87.744
10	100.3	121.2	99.97	123.4	121.2	123.0	100.027

Табела 8. Поређење сопствених фреквенција кружног лука са [16], $Kh=0.2$

Мод	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције			Бернули- Ојлерова греда			Тимошенкова греда		
	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]
1	1.494	1.492	1.092	1.502	1.498	0.784	1.486	1.482	0.731
2	7.046	6.970	0.097	7.110	7.055	0.072	6.669	6.620	0.205
3	19.26	19.278	0.688	19.82	19.800	0.590	18.111	18.074	0.343
4	25.82	25.647	0.733	26.47	26.314	0.617	24.804	24.720	0.468
5	43.93	43.612	0.596	47.49	47.198	0.167	37.876	37.700	0.061
6	54.03	54.354	0.836	54.77	54.861	0.800	53.543	53.510	0.135
7	70.38	69.795	0.776	79.75	79.115	0.344	57.913	57.835	0.591
8	87.29	87.969	0.826	88.37	88.680	0.833	78.070	77.611	0.511
9	100.3	99.528	0.812	119.4	118.410	0.308	87.744	88.194	0.506
10	121.2	122.213	1.092	123.0	123.360	0.784	100.027	99.523	0.731

Табела 9. Поређење сопствених фреквенција кружног лука са *Abaqus*-ом, $Kh=0.5$

Мод	<i>Abaqus 2D</i> модел		<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа		
	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Ортотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда
1	1.400	1.470	1.407	1.519	1.471	1.521	1.429
2	5.038	6.041	4.808	5.924	6.065	6.141	4.963
3	8.819	9.319	9.069	10.35	9.331	10.39	9.000
4	14.68	19.59	14.12	20.34	19.73	20.79	14.501
5	20.00	20.61	20.98	25.03	20.62	25.32	20.669
6	23.06	32.95	22.84	35.46	33.12	35.03	23.004
7	30.83	34.24	30.50	44.62	34.38	47.19	30.969
8	32.53	46.41	34.39	52.54	46.66	50.74	33.977
9	35.01	48.85	35.38	61.96	49.07	62.43	34.989
10	38.87	60.28	40.25	73.63	60.69	75.79	40.883

Табела 10. Поређење сопствених фреквенција кружног лука са [16], $Kh=0.5$

Мод	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције			Бернули- Ојлерова греда			Тимошенкова греда		
	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]
1	1.471	1.463	0.528	1.521	1.494	1.769	1.429	1.406	1.641
2	6.065	5.759	5.311	6.141	5.924	3.665	4.963	4.793	3.545
3	9.331	9.466	1.427	10.39	10.347	0.378	9.000	9.062	0.691
4	19.73	18.521	6.519	20.79	20.344	2.170	14.501	14.062	3.124
5	20.62	21.734	5.132	25.32	25.025	1.181	20.669	20.930	1.246
6	33.12	32.204	2.851	35.03	35.455	1.187	23.004	22.762	1.063
7	34.38	35.247	2.467	47.19	44.619	5.751	30.969	30.311	2.169
8	46.66	46.879	0.461	50.74	52.544	3.426	33.977	34.135	0.462
9	49.07	48.978	0.181	62.43	61.964	0.751	34.989	35.357	1.042

10 60.69 61.821 1.832 75.79 73.634 2.922 40.883 39.979 2.261

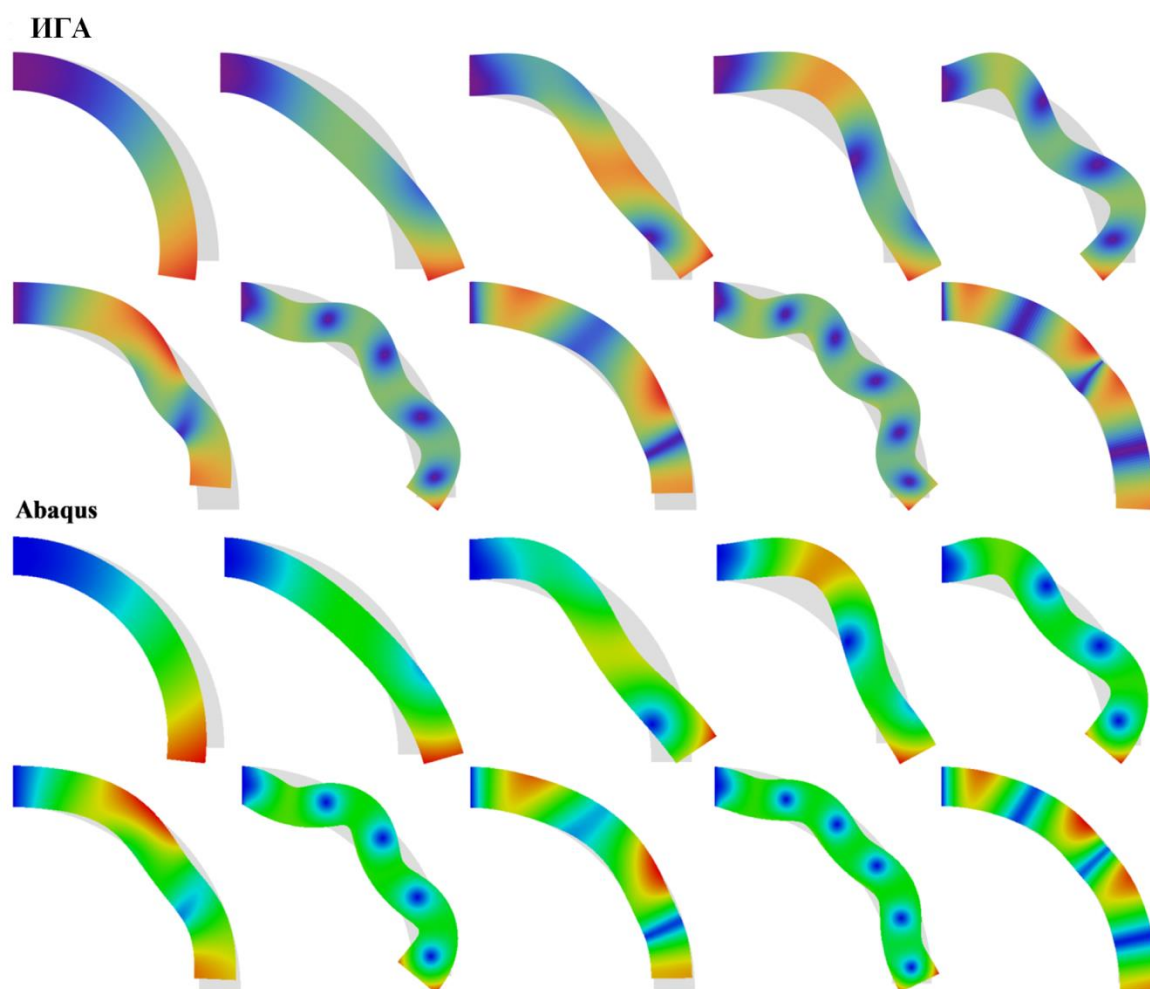
Табела 11. Поређење сопствених фреквенција кружног лука са *Abaqus*-ом, $Kh=1$

Мод	<i>Abaqus 2D</i> модел		<i>Abaqus 1D</i> модел		Изогеометријска анализа		
	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Ортотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули-Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули-Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули-Ојлерова греда	Тимошенкова греда
1	1.198	1.391	1.219	1.498	1.393	1.593	1.290
2	3.245	3.750	2.868	3.584	3.755	3.759	3.162
3	4.476	6.545	4.774	7.905	6.58	9.179	4.673
4	8.140	9.750	8.080	11.54	9.78	10.77	8.866
5	8.616	13.28	9.780	16.85	13.33	17.43	9.778
6	9.925	17.85	10.83	22.43	18.03	24.01	10.494
7	10.59	19.20	13.73	27.36	19.36	26.81	14.914
8	11.46	24.15	14.54	30.45	24.39	31.19	15.820
9	12.68	28.04	17.53	37.66	28.84	38.11	16.025
10	13.57	29.53	18.97	44.41	30.01	45.02	20.210

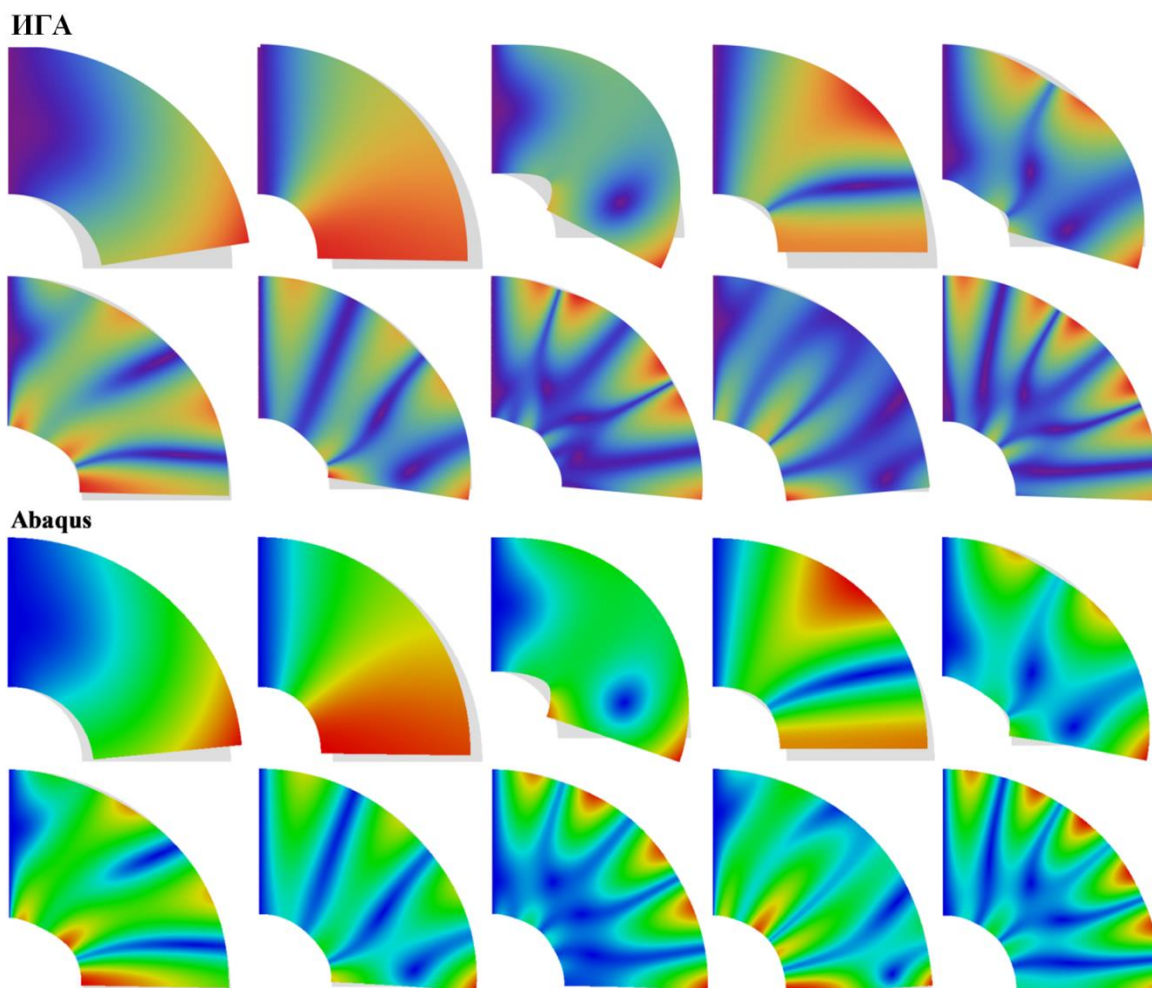
Табела 12. Поређење сопствених фреквенција кружног лука са [16], $Kh=1$

Мод	Бернули-Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције			Бернули-Ојлерова греда			Тимошенкова греда		
	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]	ИГА	[16]	Рел. грешка [%]
1	1.393	1.370	1.689	1.593	1.481	7.539	1.290	1.216	6.091
2	3.755	3.562	5.393	3.759	3.584	4.884	3.162	2.857	10.692
3	6.58	5.928	11.037	9.179	7.902	16.168	4.673	4.764	1.914
4	9.78	10.624	7.916	10.77	11.535	6.620	8.866	8.036	10.335
5	13.33	12.886	3.417	17.43	16.847	3.463	9.778	9.708	0.723
6	18.03	17.482	3.134	24.01	22.428	7.056	10.494	10.821	3.028
7	19.36	20.301	4.658	26.81	27.355	1.978	14.914	13.641	9.339
8	24.39	24.377	0.050	31.19	30.448	2.421	15.820	14.451	9.478
9	28.84	27.828	3.629	38.11	37.663	1.176	16.025	17.529	8.579
10	30.01	31.281	4.081	45.02	44.411	1.376	20.210	18.837	7.291

Облици осциловања добијени изогеометријском анализом Бернули-Ојлерове греде су упоређени са оним добијеним анализом ортотропног модела у *Abaqus*-у, што је приказано на наредним сликама за нивое закривљености $Kh=0.2$ и $Kh=1$, при чему се може уочити добро поклапање. Такође, могу се уочити центри ротације, односно мјеста са најнижом амплитудом помјерања (плава боја). Нарочито су изражени код модова у којима је доминантно савијање, као нпр. седми и девети мод (Слика 50.) и трећи мод (Слика 51.).



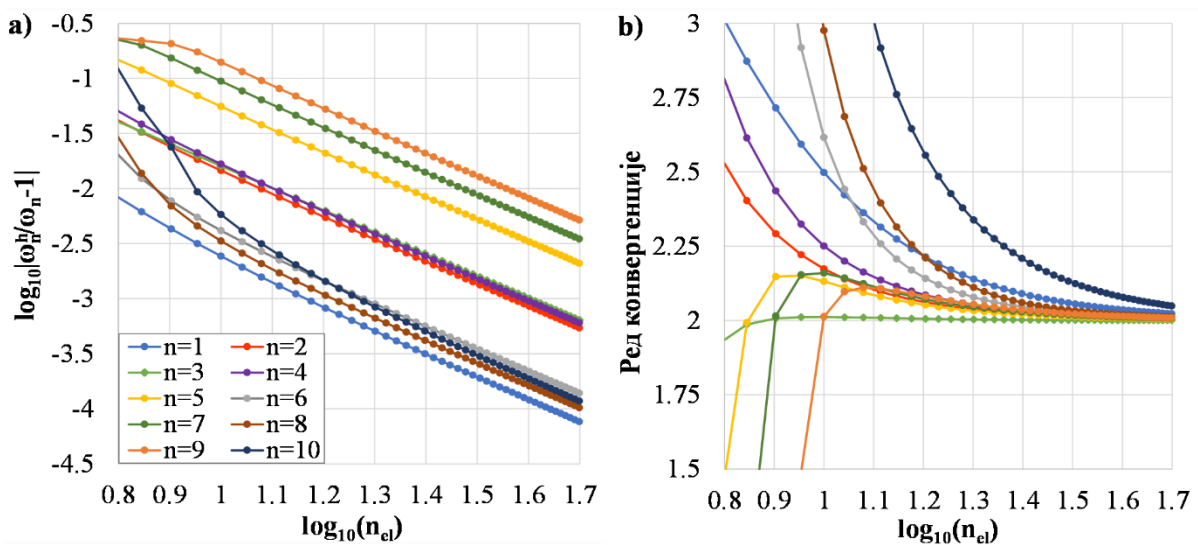
Слика 50. Поређење облика осциловања за првих десет модова, $Kh=0.2$, [6]



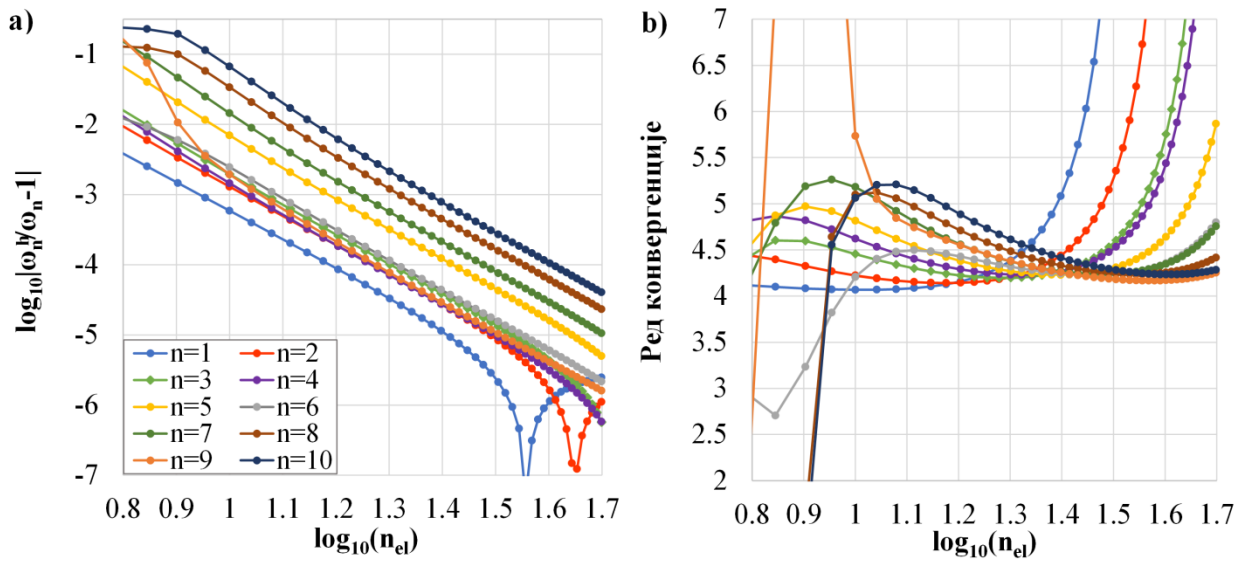
Слика 51. Поређење облика осциловања за првих десет модова, $Kh=1$, [6]

Конвергенција је испитана за ниво закривљености $Kh=0.2$, уз повећање броја коначних елемената за степене функције $p=2$, $p=3$ и $p=4$ и континуитете од C^1 до C^{p-1} . Резултати су поређени са оним добијеним мрежом са 120 кварталних елемената континуитета C^3 за Бернули-Ојлерову теорију и 111 кварталних елемената континуитета C^1 за Тимошенкову теорију и приказани су на наредним сликама (Слика 52. – Слика 63.). За квадратни степен НУРБС-а, се у случају обе гредне теорије могу уочити добра својства конвергенције. Код Бернули-Ојлерове гредне теорије, ред конвергенције тежи аналитичкој вриједности и најбоља тачност је остварена за први, шести, осми и десети мод, док резултати за пети, седми и девети мод показују мању тачност. Може се примјетити да у случају модова са нижом тачности, ред конвергенције тежи теоретској вриједности са дна, док за модове који су показали вишу тачност тежи са врха. У случају Тимошенкове гредне теорије, ред конвергенције тежи готово два пута већој вриједности и већа тачност је остварена код нижих тонова. У поређењу са квадратним елементима, кубни, генерално, дају бољу тачност. Боља тачност је

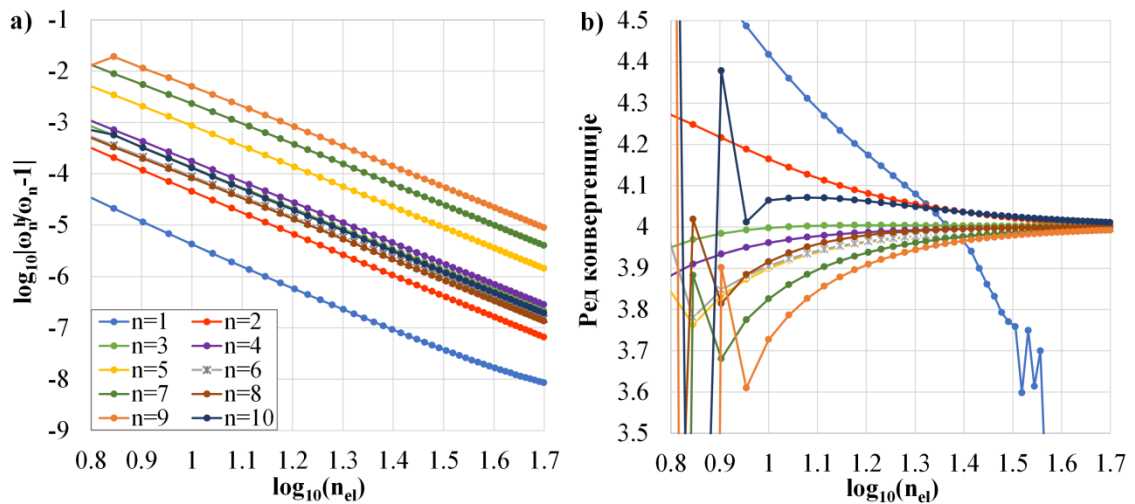
нарочито изражена у првом моду и с обзиром на то, може се уочити пад у реду конвергенције за овај мод за случај Бернули-Ојлерове греде, као и за већи број модова који брзо конвергирају у случају Тимошенкове гредне теорије. У Бернули-Ојлеровој греди је примјетно и осцилаторно понашање првог мода код густих мрежа за C^1 континуитет које је резултат већ поменуте конвергенције релативне грешке. С обзиром да је уочено слично понашање и за виши континуитет којим се смањује број контролних тачака, долази се до закључка да се повећањем континуитета може доћи до боље тачности са мање степени слободе. За оба континуитета, ред конвергенције тежи теоретској вриједности, док су у случају Тимошенкове гредне теорије те вриједности веће. Код Тимошенкове теорије се, такође, може примјетити да ред конвергенције модова који показују бољу тачност тежи одређеној вриједности и затим опада, док за модове ниже тачности расте. Слична запажања су и код кварталних елемената, гдје у великом броју случајева резултати конвергирају великом брзином, чак и за мање густе мреже коначних елемената. Као резултат тога, ред конвергенције у већем броју случајева тежи нешто вишим вриједностима у односу на теоретску за Бернули-Ојлерову греду, док код Тимошенкове греде опада.



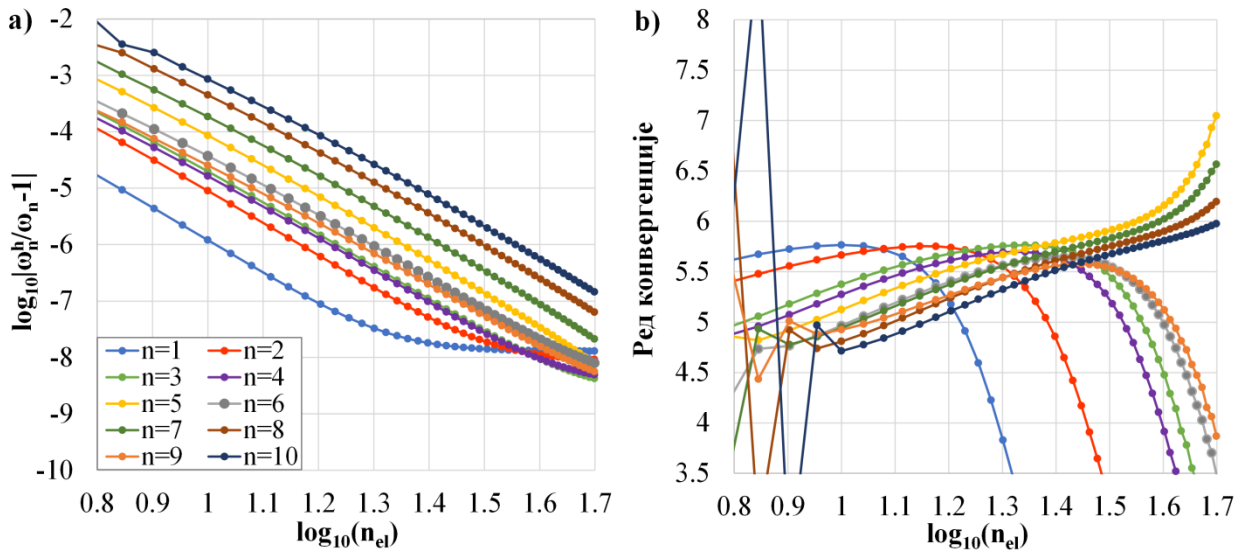
Слика 52. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=2$ и C^1 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



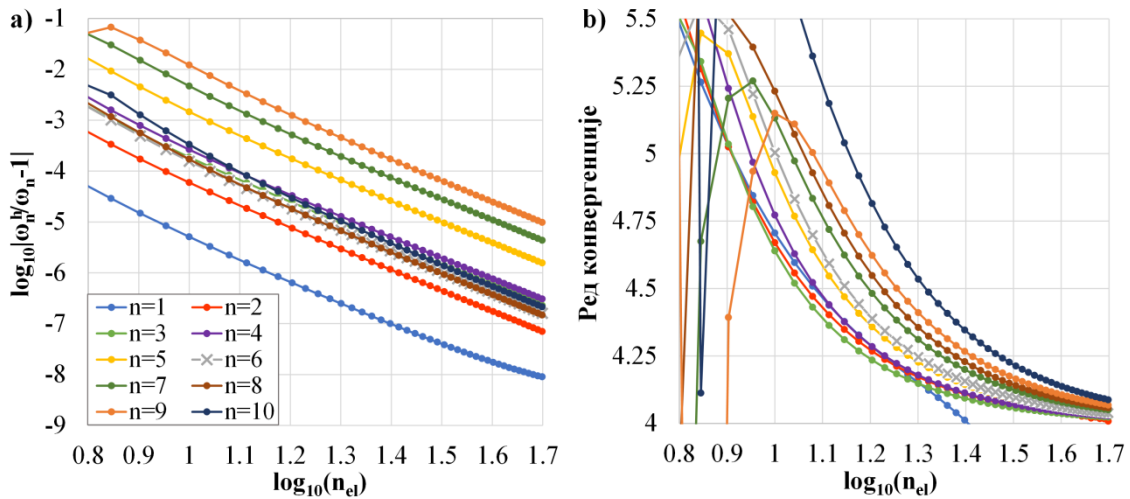
Слика 53. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=2$ и C^1 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



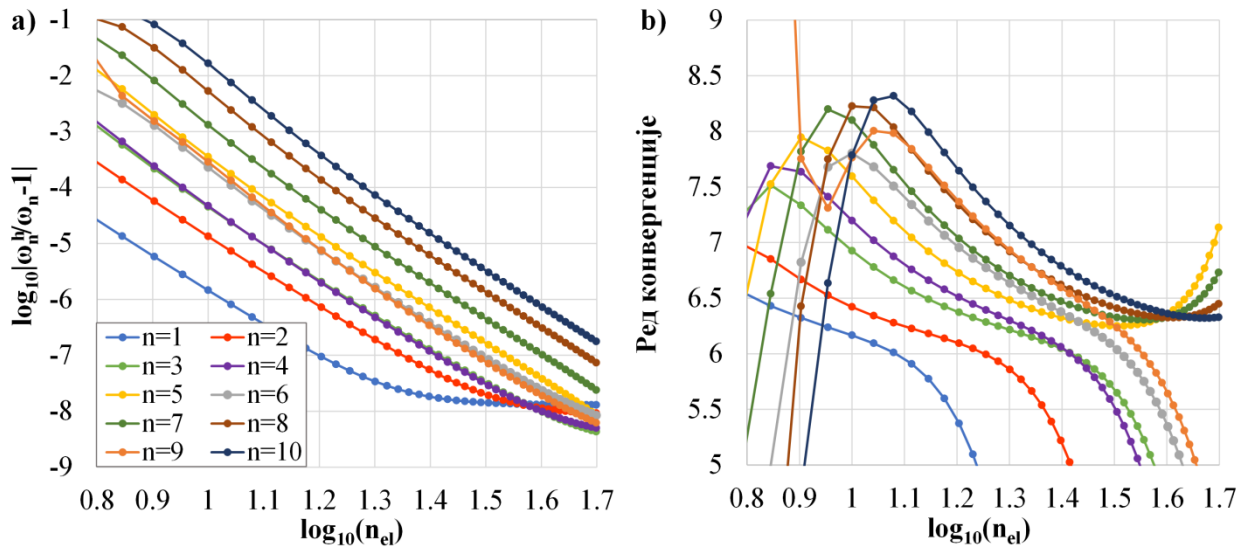
Слика 54. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=3$ и C^1 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



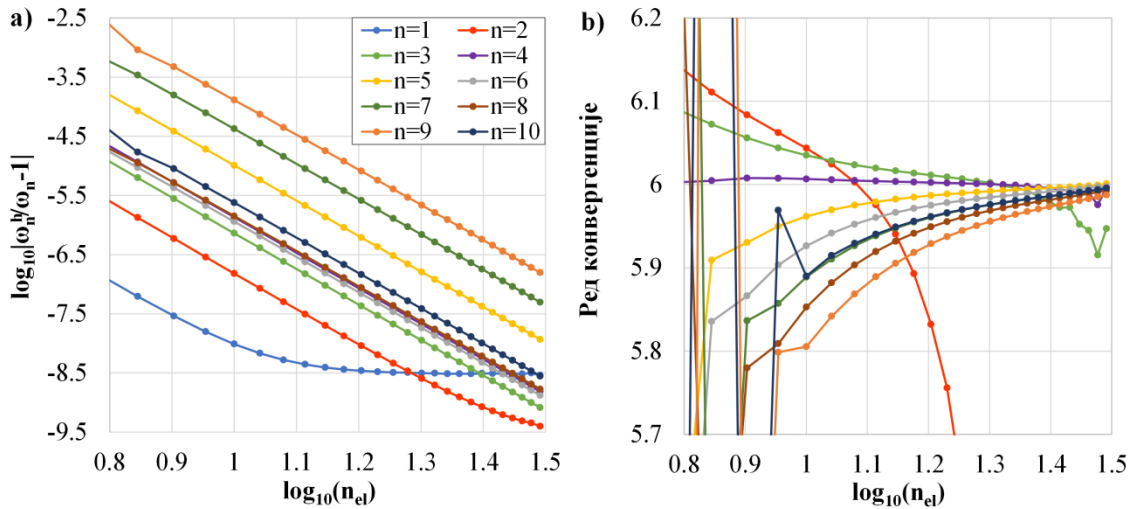
Слика 55. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=3$ и C^1 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



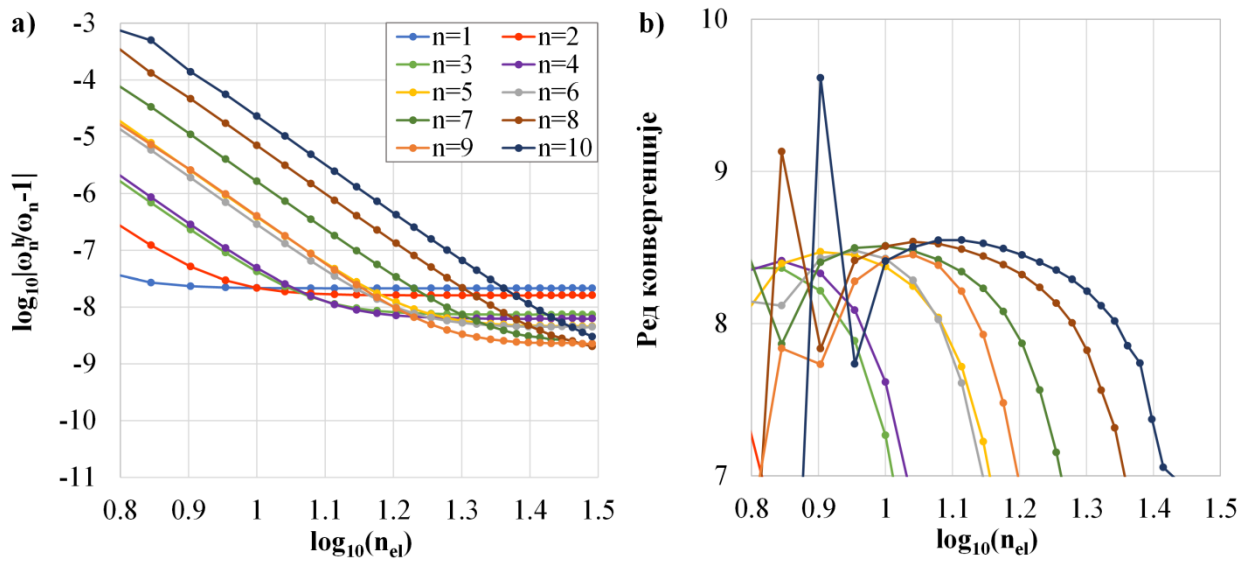
Слика 56. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=3$ и C^2 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



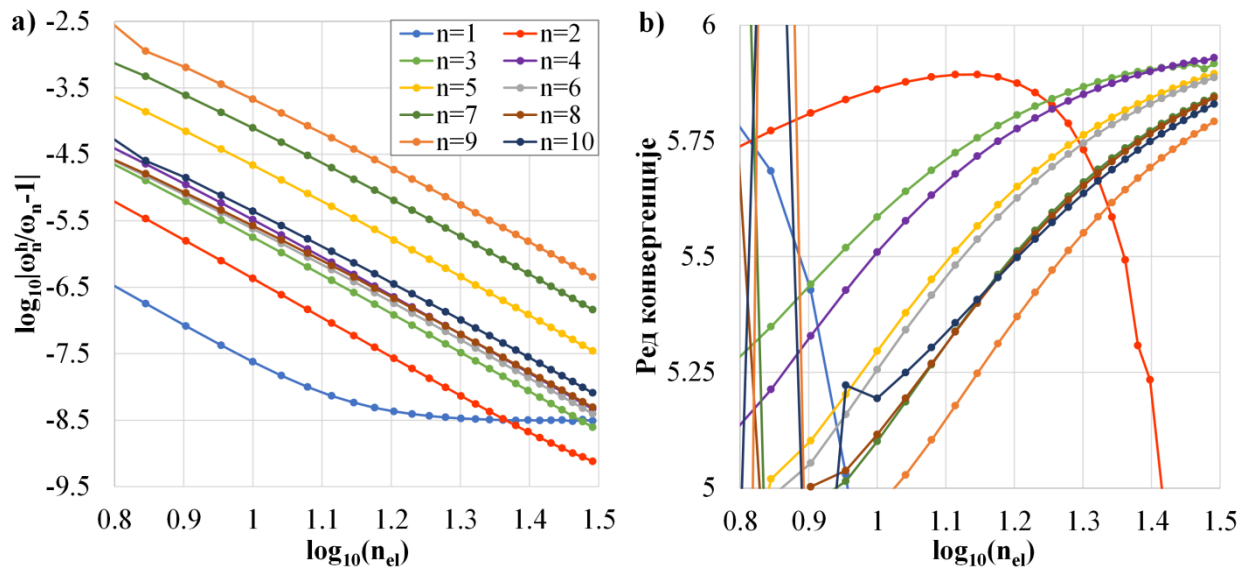
Слика 57. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=3$ и C^2 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



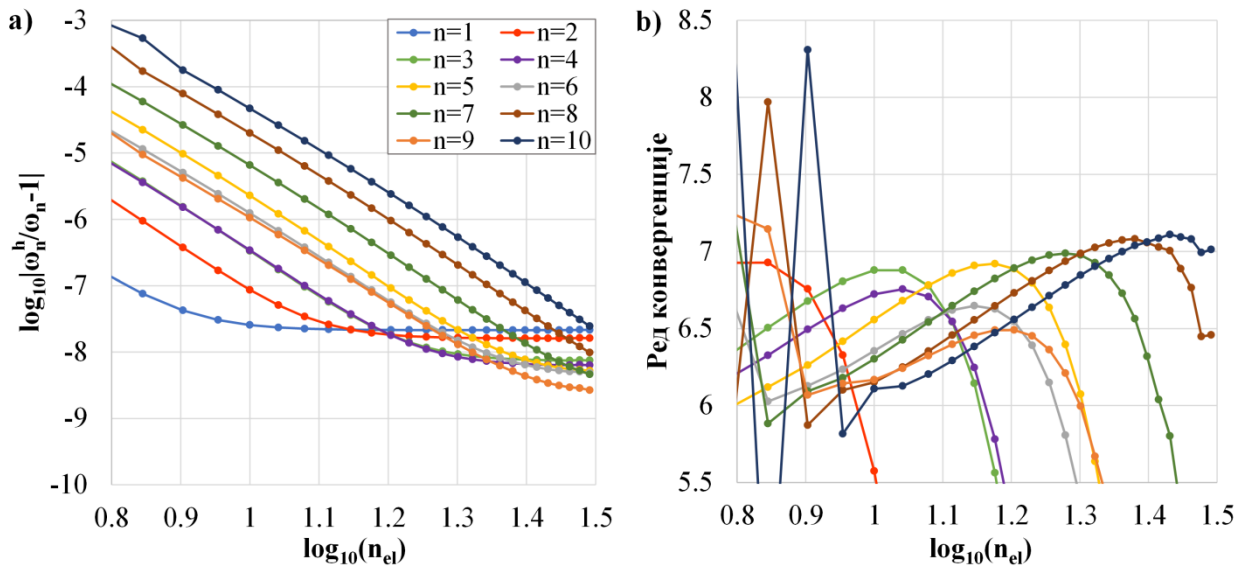
Слика 58. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=4$ и C^1 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



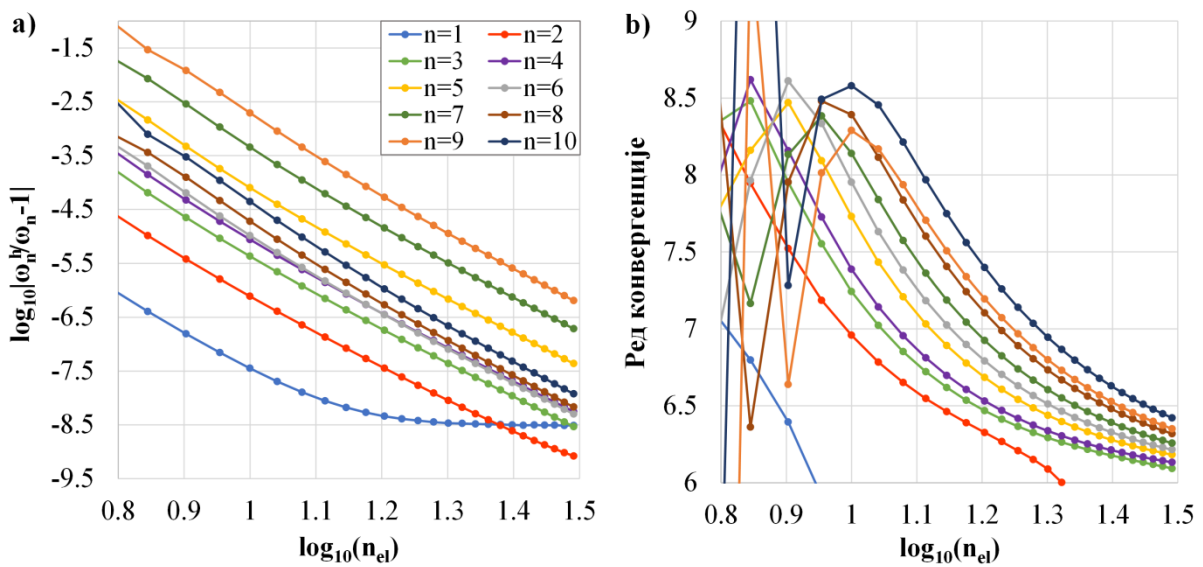
Слика 59. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=4$ и C^1 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



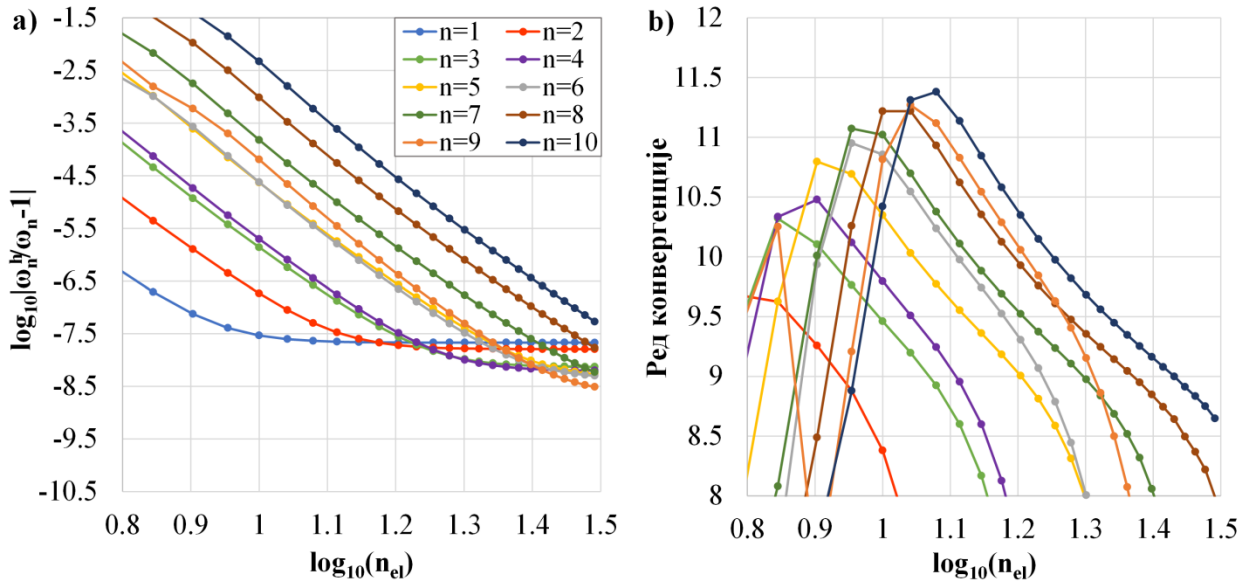
Слика 60. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=4$ и C^2 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



Слика 61. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=4$ и C^2 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције

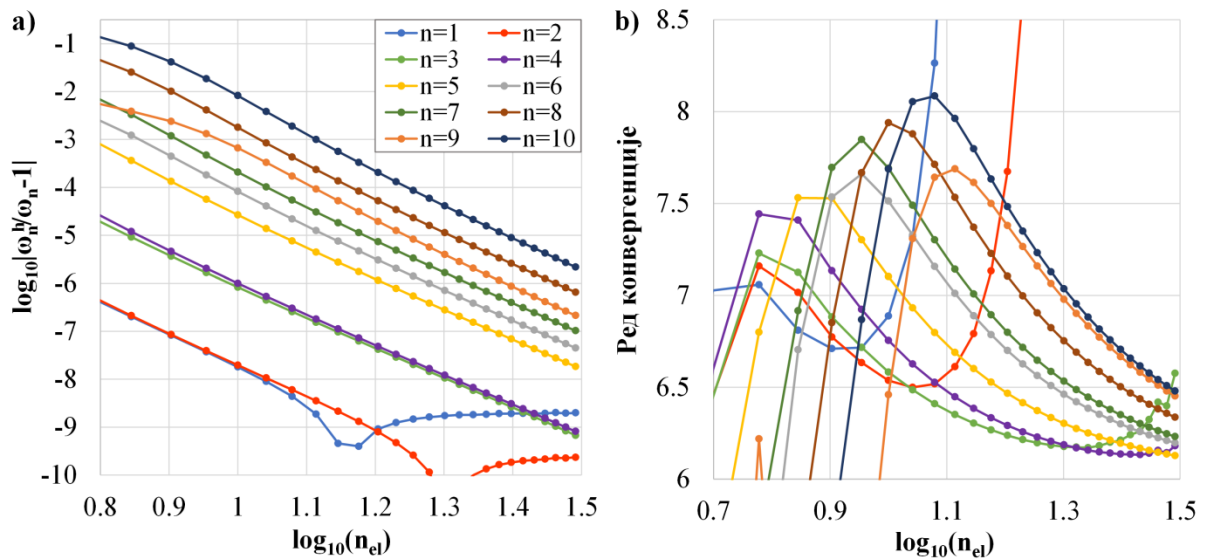


Слика 62. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=4$ и C^3 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]

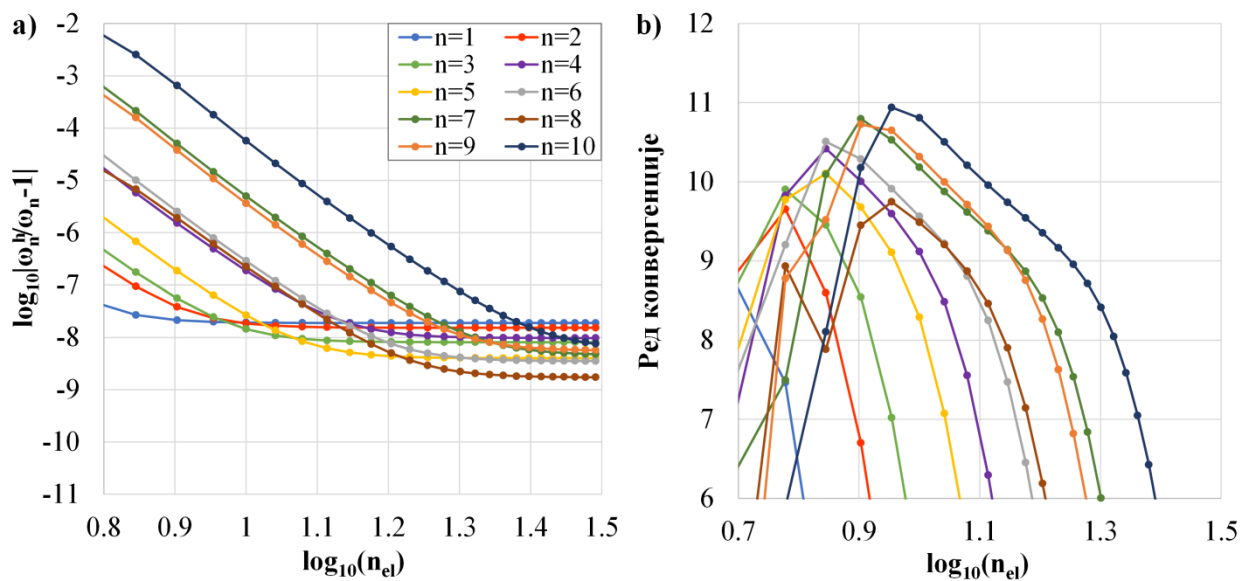


Слика 63. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.2$, $p=4$ и C^3 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције

Урађена је и анализа конвергенције снажно закривљене греде са вриједности $Kh=1$, Слика 64. и Слика 65. За анализу су одабрани квартни елементи са континуитетом C^3 . Генерално, за обе греде се могу уочити слична понашања и добра својства конвергенције.

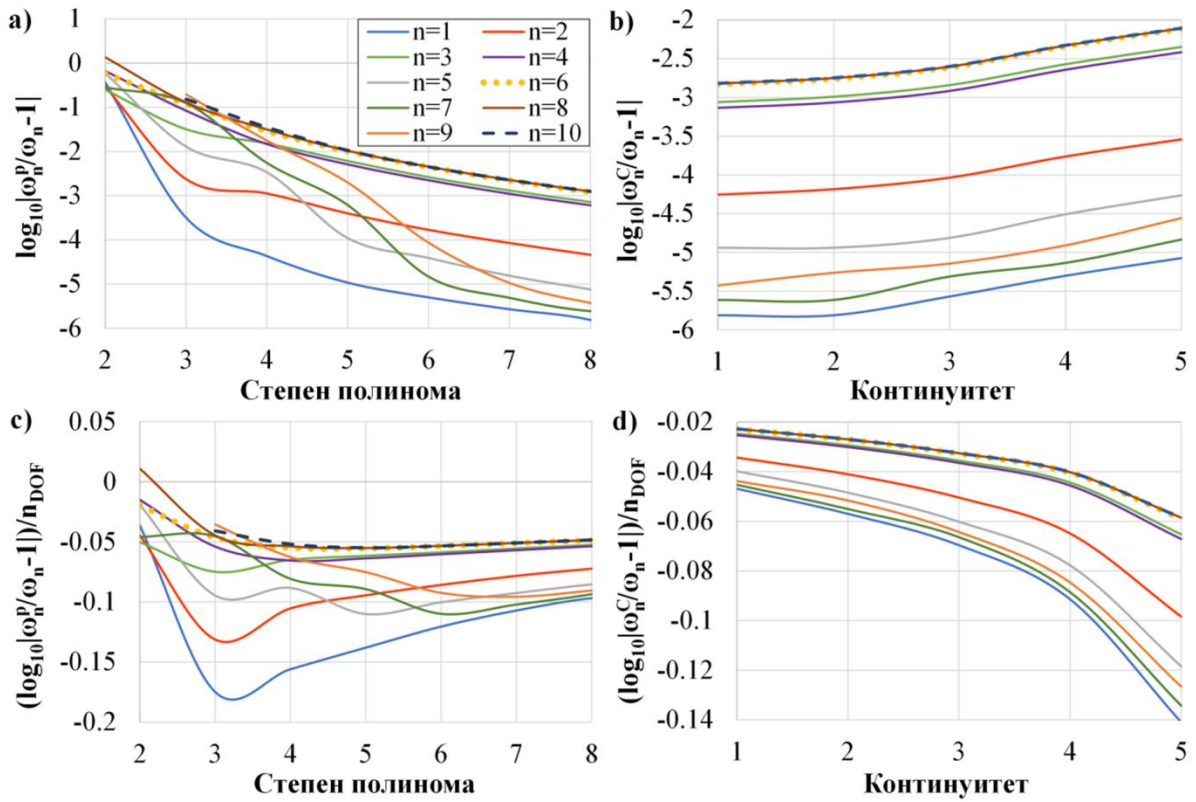


Слика 64. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=1$, $p=4$ и C^3 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]

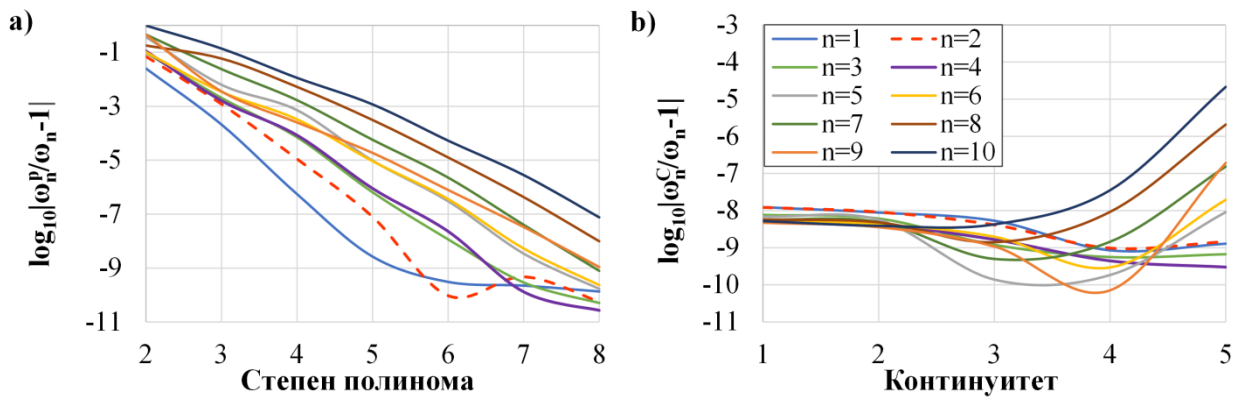


Слика 65. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=1$, $p=4$ и C^3 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције

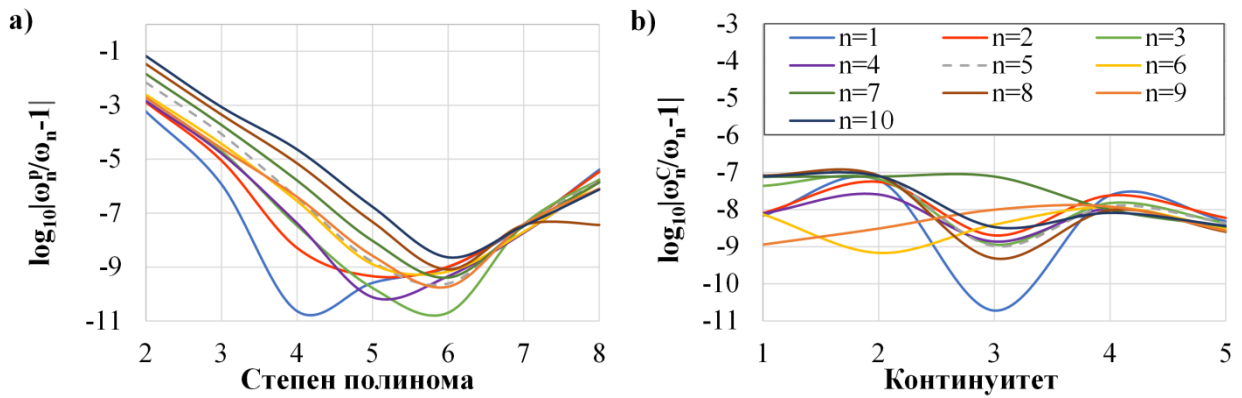
Извршена је анализа и k - и p - побољшања мреже коначних елемената, што је приказано на наредним сликама. У случају Бернули-Ојлерове теорије се могу уочити добра својства конвергенције приликом повећања степена полинома, Слика 66а и Слика 66б. Такође, за фиксиран број елемената и континуитет се могу уочити оптимални степени полинома за одређене модове, у овом случају за прва три мода је оптималан степен полинома $p=3$, а у случају четвртог $p=4$. Повећањем континуитета на границама елемената се повећава релативна грешка, Слика 66б, међутим, уколико се грешка подијели са бројем степени слободе, може се уочити побољшана тачност с обзиром на број степени слободе за више континуитета, Слика 66д. За случај Тимошенкове гредне теорије, побољшања мреже су испитана за двије дискретизације модела и за мрежу са мањим бројем елемената су уочена слична понашања код повећања степена функције, Слика 69а. Локални минимум је изражен код другог мода и као оптималан се показује степен функције $p=6$. У случају мреже са већим бројем елемената је изражено повећање грешке за више степене, што је нарочито наглашено за степене полинома $p=7$ и $p=8$, Слика 70а. За мрежу са 20 елемената се види побољшање тачности резултата повећањем континуитета с обзиром на број степени слободе (Слика 70б), док се за мрежу са мање елемената јавља одступање код виших модова (Слика 69б).



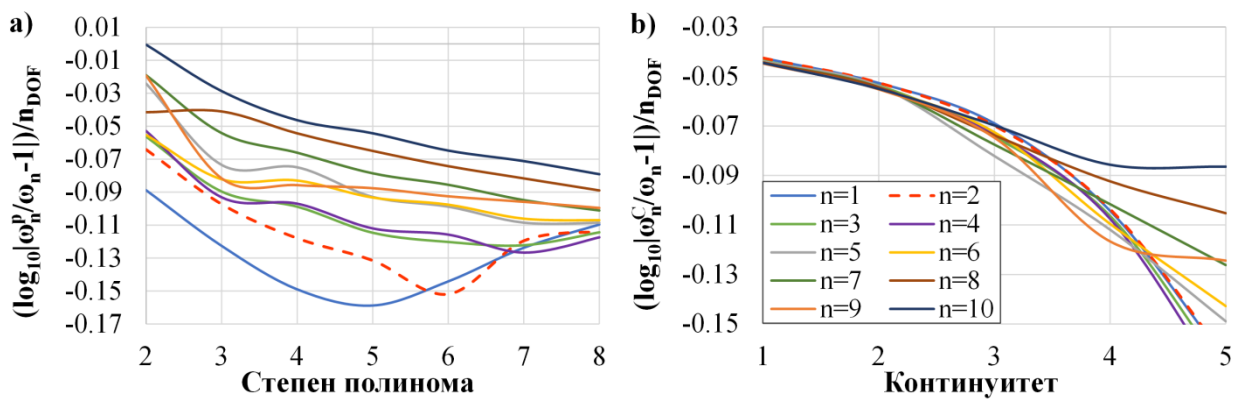
Слика 66. Испитивање конвергенције, $Kh=0.2$, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а), б) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , ц), д) k - побољшање мреже са 12 елемената, $p=6$, [6]



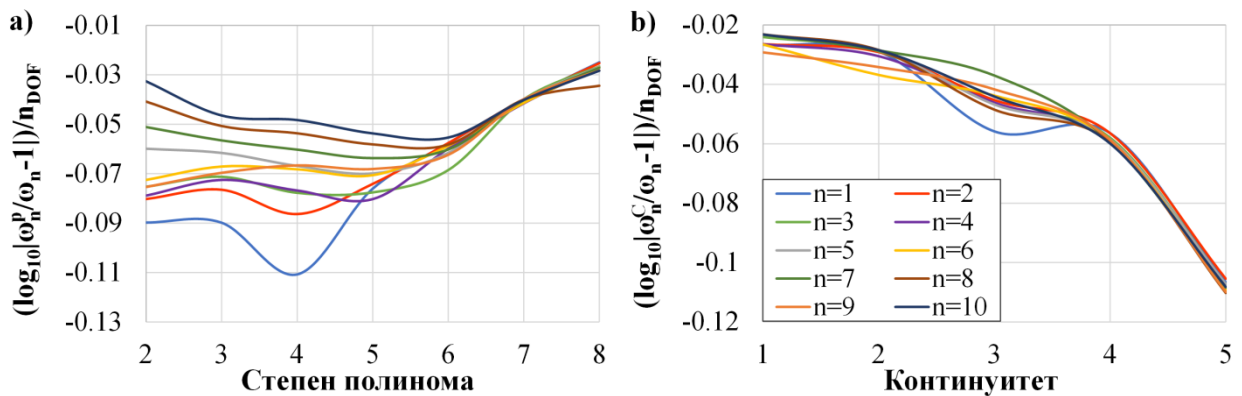
Слика 67. Испитивање конвергенције, $Kh=0.2$, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 12 елемената, $p=6$



Слика 68. Испитивање конвергенције, $Kh=0.2$, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 10 елемената и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=6$



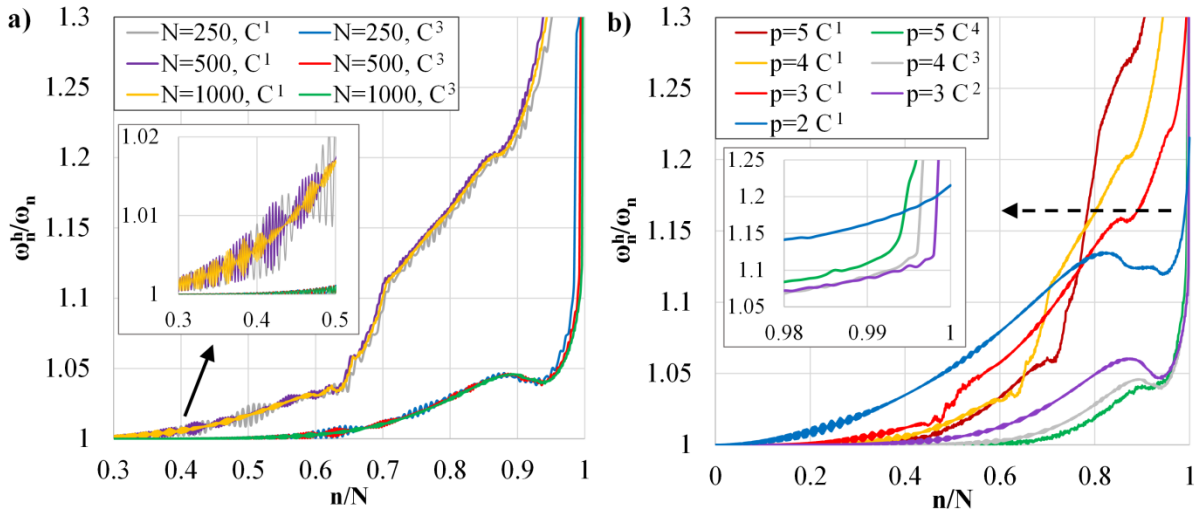
Слика 69. Испитивање конвергенције у зависности од броја елемената, $Kh=0.2$, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемената и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 12 елемената, $p=6$



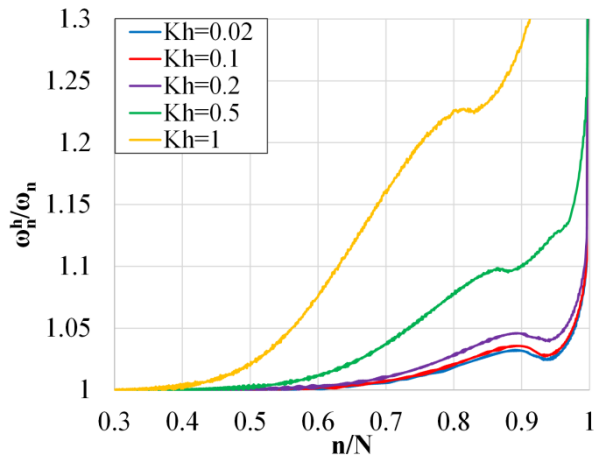
Слика 70. Испитивање конвергенције у зависности од броја елемената, $Kh=0.2$, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 10 елемената и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=6$

Референтни модел за нормализовани дискретни спектар је, за случај Бернули-Ојлерове греде, добијен са око 1000 квартних елемената са континуитетом C^3 , што даје око 2000 степени слободе. У наставку су приказани спектри за квартне елементе континуитета

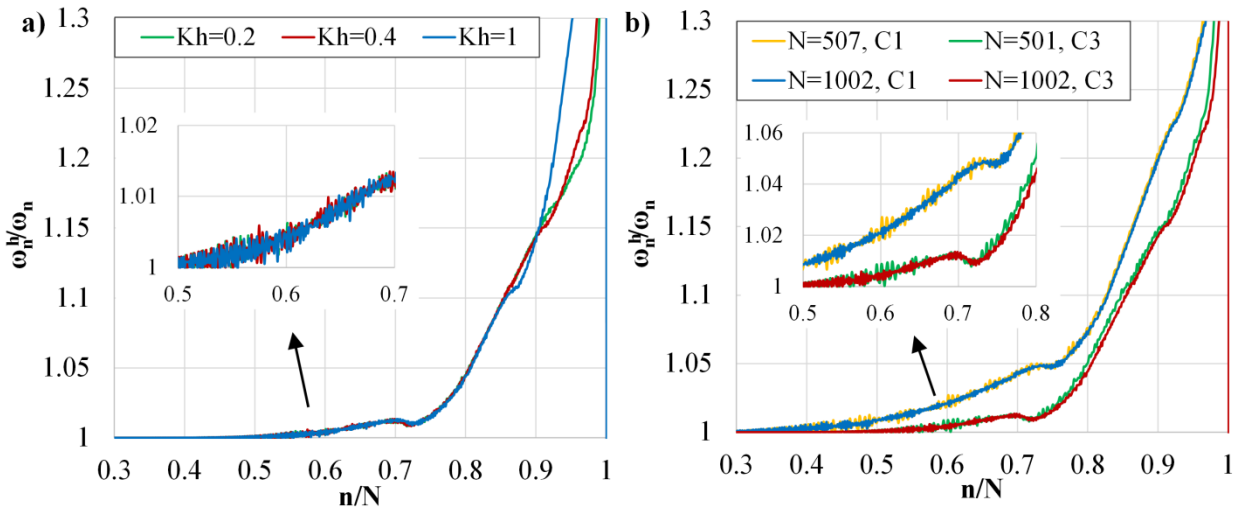
C^1 и C^3 са $N=250$, $N=500$ и $N=1000$ степени слободе, Слика 71а. Може се закључити да је утицај континуитета на резултате велики, те је потврђена супериорност виших континуитета у зависности од броја степени слободе. Такође, може се уочити да спектри не зависе од посматраног броја степени слободе. Модел са континуитетом C^3 даје веома добре резултате за однос $n/N < 0.6$, као и довољно тачне за $n/N \in [0.6, 0.95]$. За $n/N > 0.95$, резултати се нагло погоршавају. Код модела са континуитетом C^1 , резултати су готово егзактни за однос $n/N < 0.3$ и могу се сматрати довољно тачним за $n/N \in [0.3, 0.65]$. Испитани су и различити степени функција и њихови максимални и минимални континуитети за модел са $N=1000$ степени слободе, Слика 71б. Модели са вишим степеном функције дају тачније резултате за ниже вриједности односа n/N , док се за веће вриједности односа грешка повећава у односу на моделе са нижим степеном функције. Анализиран је и спектар са $N=1000$ степени слободе за различите нивое закривљености греде, Слика 72. Може се уочити да за креде са нивоом закривљености већим од 0.5 значајно губе на тачности. Генерално се, повећавањем вриједности Kh губи на тачности, што је нарочито изражено код виших модова. У случају Тимошенкове гредне теорије, референтни модел је рађен са око 2000 кварталних елемената, континуитета C^3 , што даје око 3000 степени слободе. У случају повећања нивоа закривљености се утицај види тек код односа $n/N > 0.9$, гдје се за веће вриједности Kh уочава смањење тачности резултата, Слика 73а. Код испитивања најнижег и највишег континуитета кварталних елемената се, такође, може уочити супериорност виших континуитета, при чему варирани број степени слободе није знатно утицао на резултате.



Слика 71. Кружни лук, $Kh=0.2$, нормализовани дискретни спектар за Бернули-Ојлерову греду, а) за степен полинома $p=4$, б) различити степени и континуитети, [6]



Слика 72. Кружни лук, $Kh=0.2$, нормализовани дискретни спектар за Бернули-Ојлерову греду, [6]

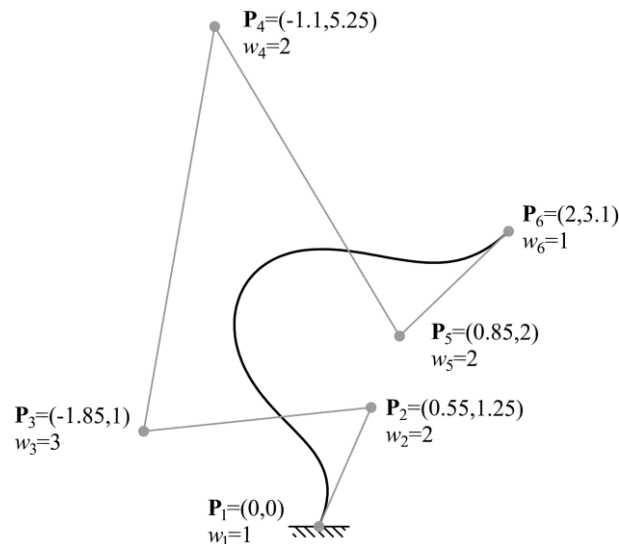


Слика 73. Кружни лук, $Kh=0.2$, нормализовани дискретни спектар за Тимошенкоу греду, а) различити нивои закривљености, б) степен полинома $p=4$

Примјер 3:

У последњем примјеру је анализирана произвољно закривљена греда правоугаоног попречног пресека, чија је почетна геометрија описана рационалном Безиеровом кривом петог степена, Слика 74. Параметарске једначине осе греде су дате као:

$$x(\xi) = \frac{-65\xi^5 + 272\xi^4 - 355\xi^3 + 155\xi^2 - 11\xi}{20\xi^5 - 50\xi^4 + 40\xi^3 - 10\xi - 2} \quad y(\xi) = \frac{-706\xi^5 + 1500\xi^4 - 900\xi^3 + 200\xi^2 - 125\xi}{100\xi^5 - 250\xi^4 + 200\xi^3 - 50\xi - 10},$$



Слика 74. Квинтна греда, [6]

У наредним табелама су дате нормализоване вриједности првих десет сопствених фреквенција за три нивоа закривљености. Резултати су добијени са мрежом од 32 елемента петог степена са континуитетом C^4 . Из добијених резултата се уочава добро поклапање резултата добијених изогеометријском анализом Бернули-Ојлерове греде и оних добијених анализом $2D$ модела у *Abaqus*-у за греду закривљености $K_{max}h=0.1$. Максимална релативна грешка се јавља у десетом моду и износи 0.93%. За снажно закривљене греде релативна грешка расте и до 6.1% за вриједност $K_{max}h=0.4$. У случају нижих модова, сопствене фреквенције се добро поклапају. У случају Тимошенкове гредне теорије, у свим случајевима су грешке мање од 2%, највећа грешка је у осмом моду у случају највећег посматраног нивоа закривљености и износи 1.74%. Поређењем резултата Бернули-Ојлерових модела добијеним изогеометријском анализом и анализом $1D$ модела се уочавају незнатна одступања, нарочито код мањих вриједности $K_{max}h$, док се повећањем нивоа закривљености повећавају и релативне грешке. Највећа релативна грешка се јавља у шестом моду за $K_{max}h=0.4$ и износи 1.3%. Ефекти ротационе инерције су наглашенији код виших модова. У поређењу са моделом

анализираним густом мрежом $B21$ елемената, Тимошенкова греда показује одлична поклапања, нарочито за греде мање закривљености. Ни у једном случају, релативна грешка не прелази 1%. Највећа грешка се јавља за $K_{max}h=0.4$ у износу од 0.94%.

Табела 13. Поређење сопствених фреквенција квинтне греде, $K_{max}h=0.1$

Мод	<i>Abaqus ID</i> модел	<i>Abaqus ID</i> модел			Изогеометријска анализа	
	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда
1	2.380	2.379	2.378	2.379	2.379	2.379
2	5.363	5.358	5.360	5.362	5.362	5.36
3	23.40	23.38	23.40	23.40	23.41	23.38
4	45.78	45.73	45.83	45.83	45.85	45.725
5	63.01	62.93	63.18	63.18	63.22	62.909
6	102.4	102.2	102.7	102.7	102.7	102.169
7	157.1	156.8	157.8	157.8	157.9	156.762
8	220.3	220.0	221.8	221.6	222.0	219.802
9	292.7	292.3	295.3	294.9	295.6	291.878
10	373.7	373.2	378.0	377.2	378.4	372.494

Табела 14. Поређење сопствених фреквенција квинтне греде, $K_{max}h=0.2$

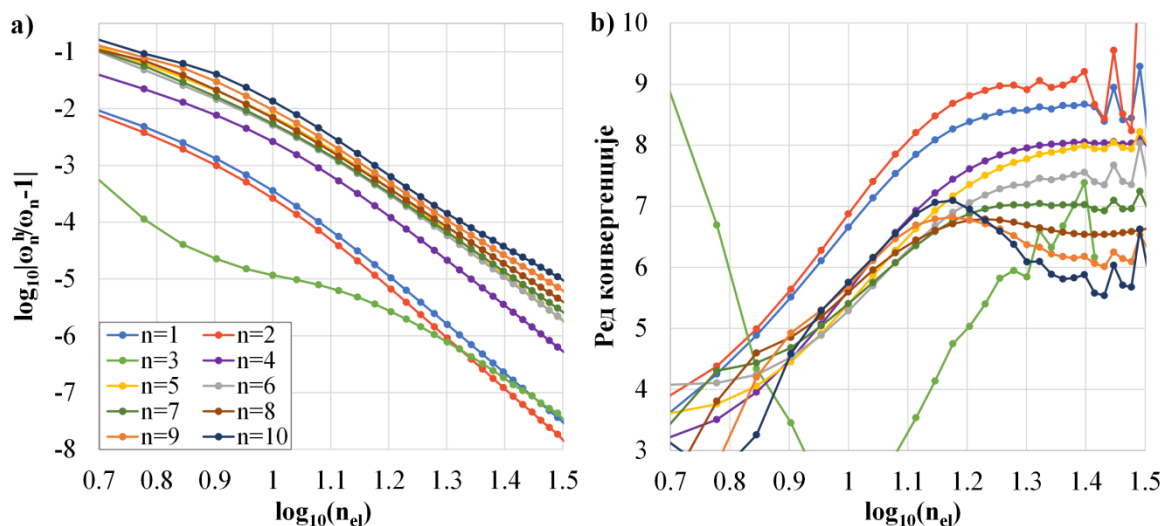
Мод	<i>Abaqus ID</i> модел	<i>Abaqus ID</i> модел			Изогеометријска анализа	
	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова греда <i>B21</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Бернули- Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Бернули- Ојлерова греда	Тимошенкова греда
1	2.381	2.378	2.379	2.379	2.380	2.379
2	5.367	5.351	5.359	5.366	5.367	5.357
3	23.39	23.26	23.36	23.37	23.40	23.284
4	45.52	45.35	45.74	45.73	45.81	45.314
5	61.95	61.66	62.59	62.61	62.74	61.564
6	100.5	99.81	101.5	101.63	101.9	99.733
7	153.6	152.6	156.3	156.0	156.8	152.369
8	214.1	212.8	219.3	218.5	220.0	212.073
9	282.4	280.8	291.7	289.8	292.5	279.326
10	357.1	355.2	371.6	368.3	372.6	352.747

Табела 15. Поређење сопствених фреквенција квинтне греде, $K_{max}h=0.4$

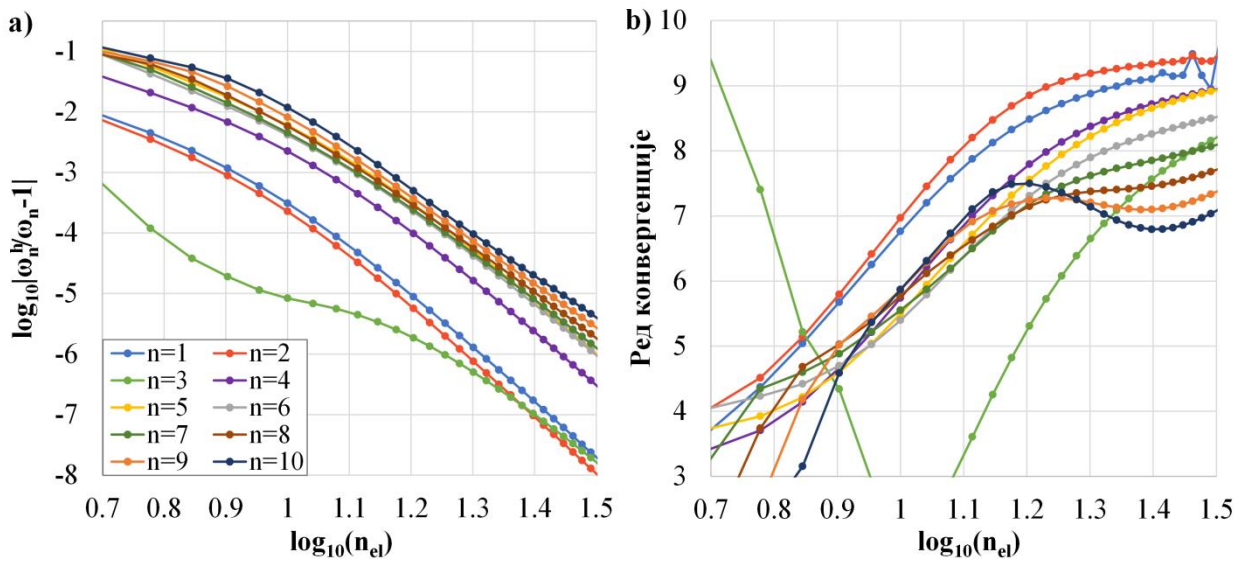
<i>Abaqus 1D</i> модел		<i>Abaqus 1D</i> модел			Изогеометријска анализа	
Мод	Изотропан материјал <i>CPS3</i> елемент	Тимошенкова	Бернули-	Бернули-	Бернули- Ојлерова	Тимошенкова
		греда <i>B21</i> елемент	Ојлерова греда <i>B23</i> елемент	Ојлерова греда са утицајем ротационе инерције	Ојлерова греда	греда
1	2.373	2.375	2.384	2.380	2.383	2.385
2	5.337	5.324	5.357	5.382	5.387	5.348
3	22.95	22.83	23.19	23.23	23.35	22.91
4	43.97	43.84	45.36	45.30	45.60	43.688
5	57.53	57.14	60.24	60.30	60.78	56.911
6	92.95	91.78	97.03	97.42	98.26	91.685
7	140.4	138.8	149.3	148.6	151.0	138.138
8	190.3	188.6	204.5	201.9	206.0	186.937
9	231.4	232.1	239.6	236.4	239.2	230.054
10	246.6	245.6	264.5	259.4	265.1	243.247

Анализа конвергенције за првих десет сопствених фреквенција је вршена за ниво закривљености $K_{max}h=0.1$, док су референтне вриједности добијене са мрежом од 120 елемената, степена $p=6$ и континуитета C^5 (Слика 75.- Слика 82.). У случају континуитета C^1 , за обе гредне теорије се уочава слично понашање. Генерално, редови конвергенција теже готово истим вриједностима и за неке модове одударају од теоретске, при чему су за Тимошенкову греду те вриједности нешто више у односу на Бернули-Ојлеров модел. Код Бернули-Ојлерове греде је нарочито наглашено осцилаторно понашање реда конвергенције, што је последица комплексне геометрије и већ поменуте анализе са веома малим вриједностима код густих мрежа.

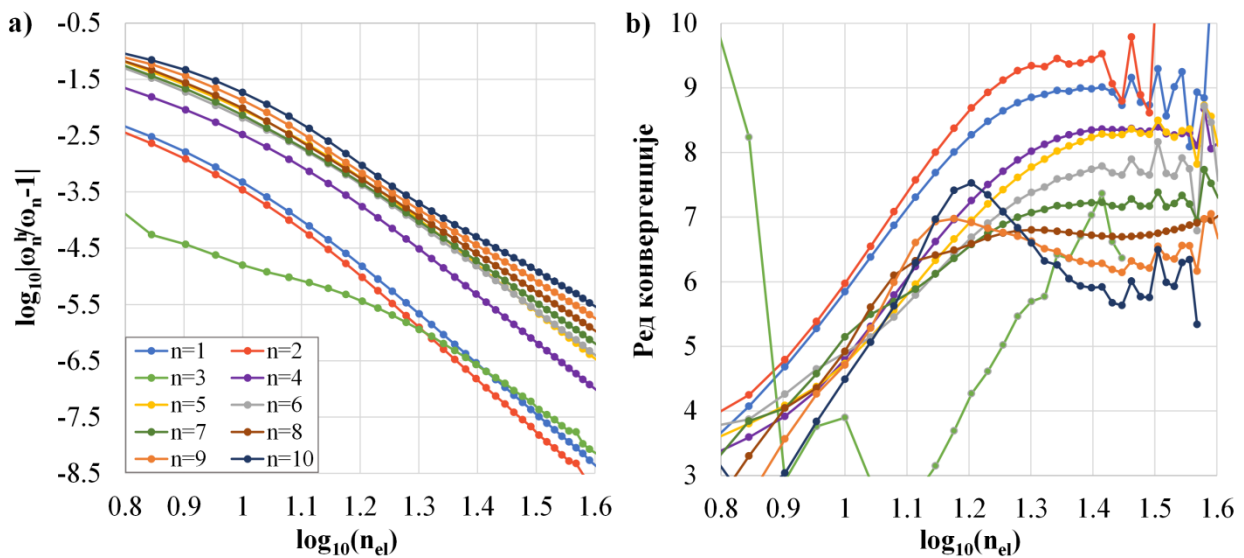
Анализа конвергенције уз k - и p - побољшање мреже коначних елемената је приказана на сликама Слика 83.-Слика 85. Понашање је слично као и у претходним примјерима. Интересантно је примјетити да је за Бернули-Ојлерову греду, оптималан степен функције за прва два мода $p=9$, док је за више модове то $p=10$. Оптималан степен за трећи мод и обе гредне теорије је $p=6$, док су за гушћу мрежу коначних елемената оптимални степени $p=5$ и $p=10$, Слика 85а. У случају повећања континуитета, уз фиксиран степен слободне и број елемената, побољшава се рјешење с обзиром на број степени слободне.



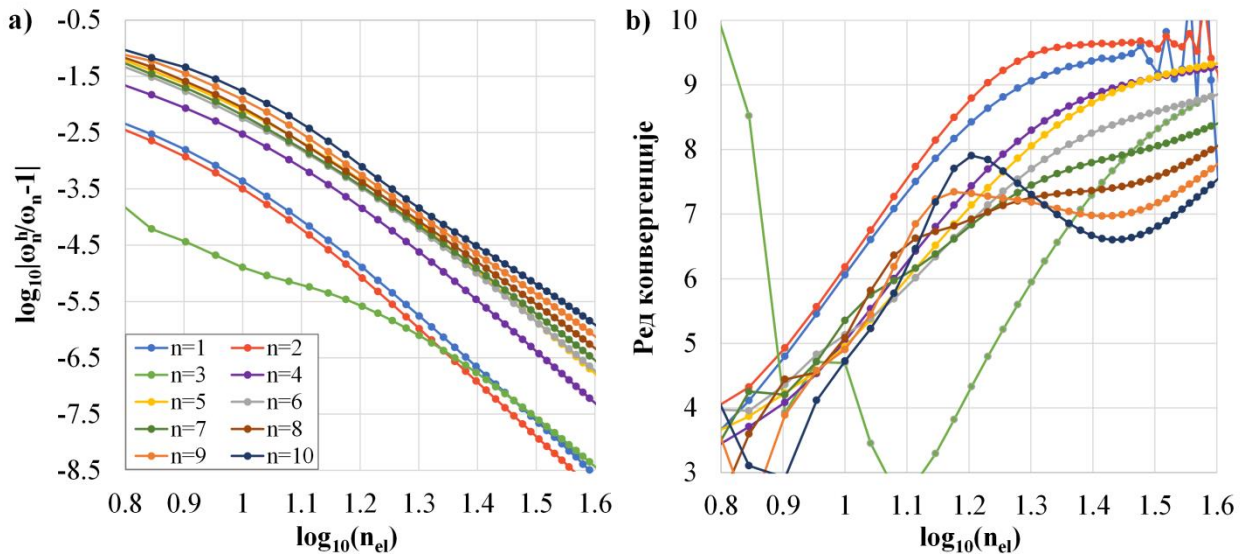
Слика 75. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^1 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



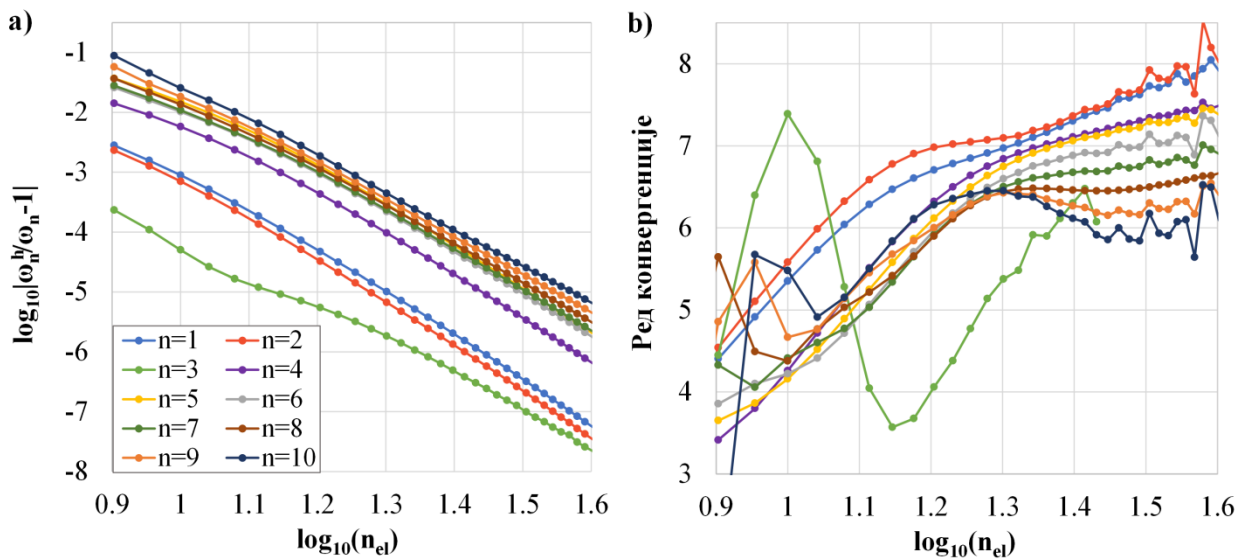
Слика 76. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^1 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



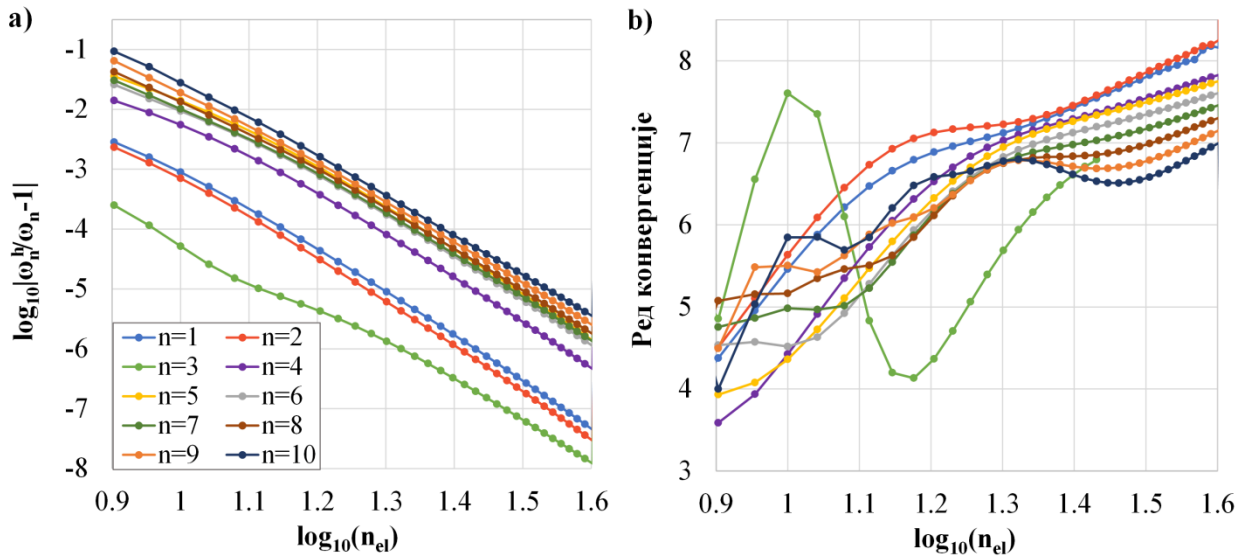
Слика 77. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^2 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



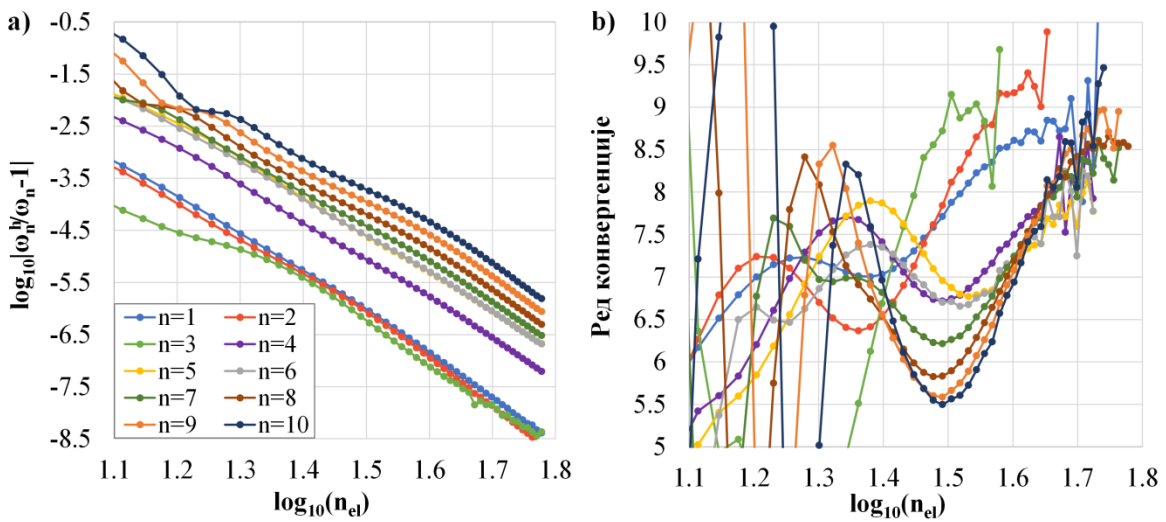
Слика 78. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $Kh=0.1$, $p=5$ и C^2 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



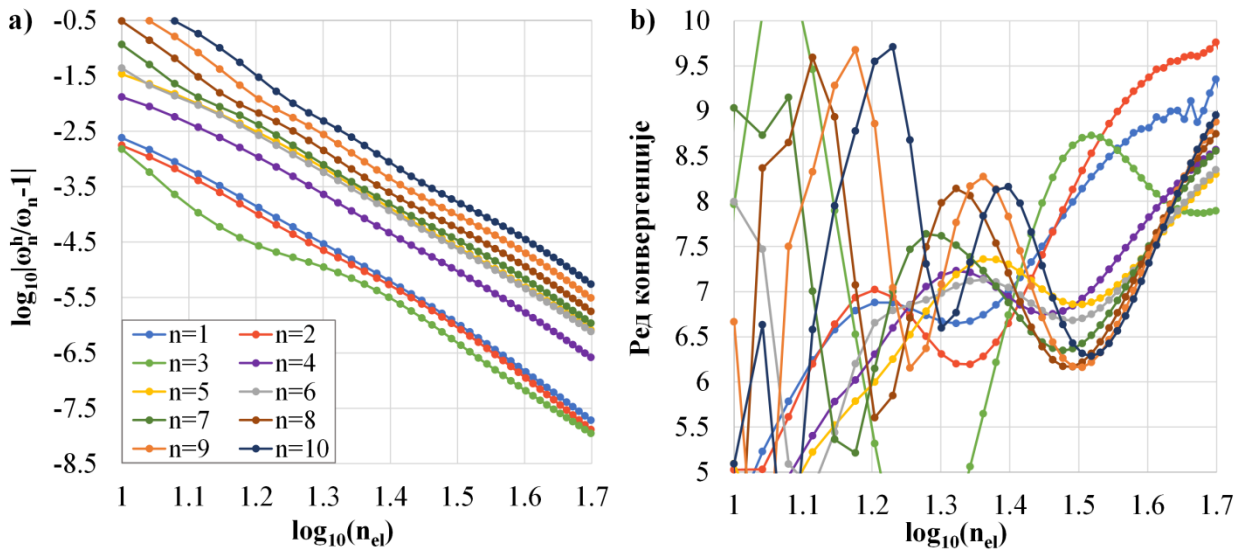
Слика 79. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^3 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



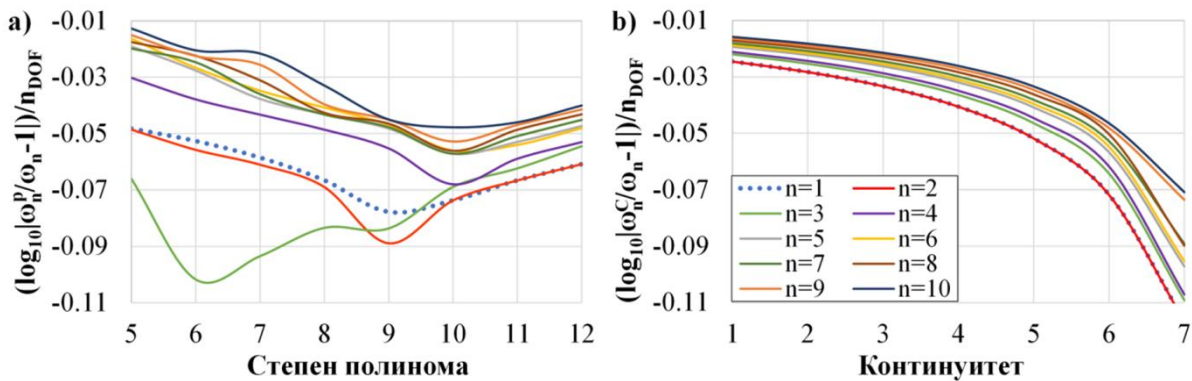
Слика 80. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^3 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



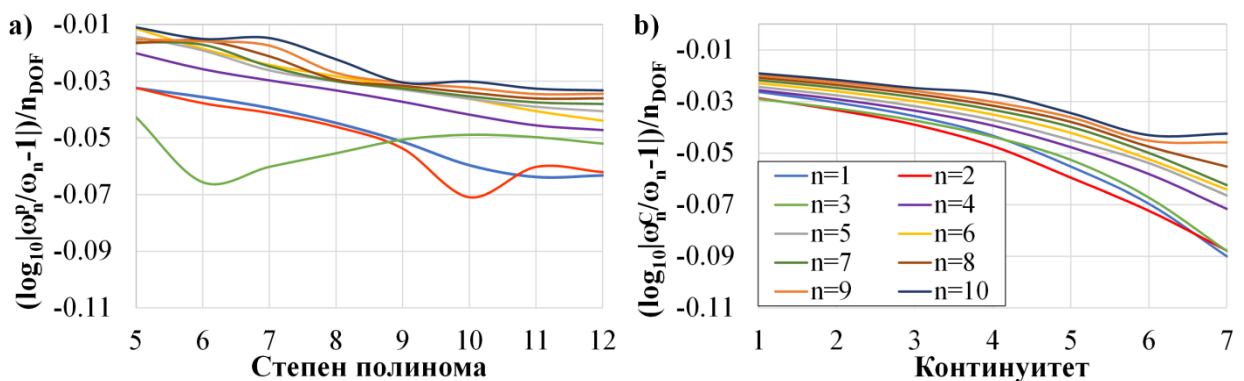
Слика 81. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^4 континуитет, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције, [6]



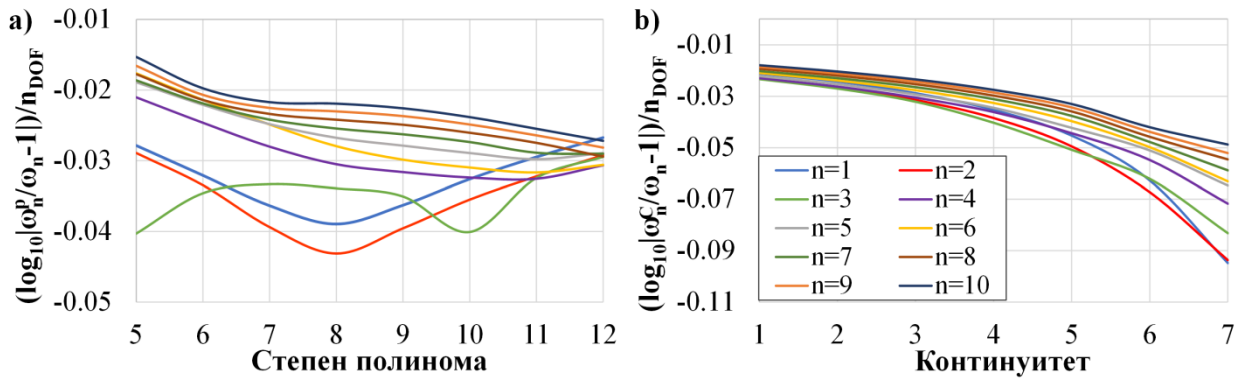
Слика 82. Својства конвергенције за првих 10 сопствених фреквенција, $K_{max}h=0.1$, $p=5$ и C^4 континуитет, Тимошенкова гредна теорија: а) релативна грешка, б) ред конвергенције



Слика 83. Испитивање конвергенције у зависности од броја елемената, $K_{max}h=0.1$, Бернули-Ојлерова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 16 елемената, $p=8$, [6]

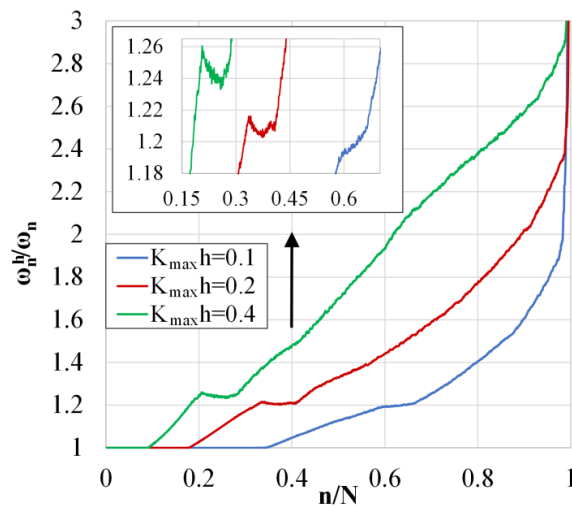


Слика 84. Испитивање конвергенције у зависности од броја елемената, $K_{max}h=0.1$, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 4 елемента и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 16 елемената, $p=8$

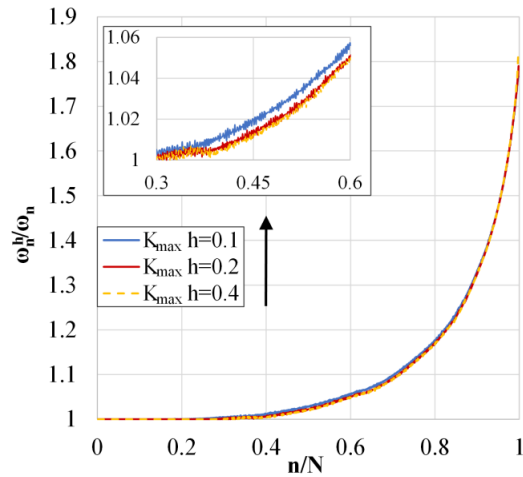


Слика 85. Испитивање конвергенције у зависности од броја елемената, $K_{max}h=0.1$, Тимошенкова гредна теорија: а) p - побољшање мреже са 10 елемената и континуитетом C^1 , б) k - побољшање мреже са 20 елемената, $p=8$

На наредним сликама су приказани нормализовани дискретни спектри за двије гредне теорије, при чему је вариран ниво закривљености. Референтно рјешење је за Бернули-Ојлеров модел добијено са мрежом од 1000 квинтних елемената, континуитета C^4 , што је око 2000 степени слободе, док је за Тимошенков модел кориштена мрежа са око 665 квинтних елемената, са континуитетом C^4 на границама, што даје готово исти број степени слободе. У случају Бернули-Ојлерове греде, резултати се могу сматрати веома тачним од односа $n/N < 0.1$ за $K_{max}h=0.4$, $n/N < 0.2$ за $K_{max}h=0.2$ и $n/N < 0.4$ за $K_{max}h=0.1$. У случају Тимошенкове гредне теорије, резултати дају бољу тачност у зависности од броја степени слободе, при чему се спектри готово поклапају за сва три испитана нивоа закривљености.

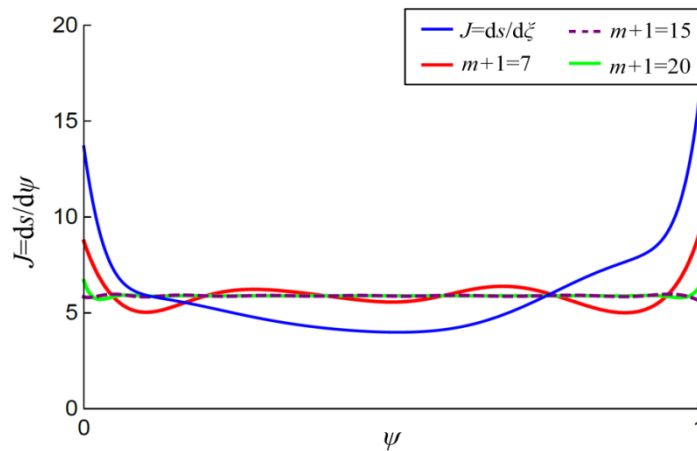


Слика 86. Квинтна греда, нормализовани дискретни спектар за Бернули-Ојлерову греду и различите нивое закривљености, [6]



Слика 87. Квинтна греда, нормализовани дискретни спектар за Тимошенкову греду и различите нивое закривљености

У поређењу са *Tschirnhausen*-овом гредом, Јакобијан квинтне криве има изражено веће вриједности на почетку и крају, у односу на остатак функције, док код кубне греде, Јакобијан опада и уочавају се велике разлике почетка и краја. Репараметризација криве је приказана на наредној слици, са које се може уочити да повећање броја контролних тачака *PTF*-а доводи до постизања готово константног Јакобијана.



Слика 88. Квинтна крива, Јакобијан

8. ЗАКЉУЧАК

Изогеометријском анализом је омогућено егзактно представљање почетне геометрије, описивањем помоћу НУРБС-а, као најопштијег случаја. У раду је извршена изогеометријска анализа слободних вибрација произвољно закривљених раванских греда према Бернули-Ојлеровој и Тимошенковој гредној теорији, при чему је разматран и утицај ротационе инерције на одговор система. Анализа је спроведена у систему конвективних координата и геометријски је егзактна. С обзиром на основне претпоставке Бернули-Ојлерове теорије, за степене слободе је било довољно усвојити компонентална помјерања контролних тачака, док је у случају Тимошенкове теорије било неопходно и додавање ротација као генералисаних координата.

Верификација успостављеног нумеричког модела је извршена експерименталном модалном анализом произвољно закривљене челичне греде. Анализа је показала добро поклапање резултата са оним добијеним нумерички. Приликом поставке теста за експерименталну модалну анализу, посебна пажња је усмјерена остваривању дефинисаног граничног услова како би физички модел био погодан за провјеру исправности нумеричког модела.

Детаљна анализа одабраних нумеричких примјера је указала на погодност изогеометријске анализе, те да је овако дефинисан приступ валидан и за анализу греда већих нивоа закривљености. Генерално, анализом конвергенције је утврђено да се за веће континуитете добијају резултати повећане тачности уколико се посматра и број степени слободе, с обзиром на чињеницу да се повећањем континуитета смањује број контролних тачака, а самим тим и број степени слободе. Закључак је потврђен и кроз анализу нормализованих нумеричких дискретних спектра. Приликом анализе k -побољшања мреже коначних елемената за случај Тимошенкове греде је, за одређене дискретизације и усвојено референтно рјешење, ипак дошло до постизања боље тачности са нижим континуитетима с обзиром на број степени слободе. Такође, детаљно су анализирани конвергенција релативне грешке и ред конвергенције при повећању броја елемената, те је примијећено да се овим приступом постижу добра својства. У случају Бернули-Ојлерове теорије, ред конвергенције углавном тежи вриједности $2(p-1)$, док су за случај Тимошенкове гредне теорије те вриједности веће. Такође, уочено је и осцилаторно понашање реда конвергенције, што је више наглашено код греда комплексне геометрије. Повећање степена полинома је довело до постизања

боље тачности с мањим бројем степени слободe само у неким од посматраних случајева. Анализа нормализованих нумеричких спектра греда са комплекснијом геометријом је указала на значајнију деградацију тачности код виших модова. У случају Тимошенкове гредне теорије, за одабрану дискретизацију, ниво закривљености није знатно утицао на спектар, док се код Бернули-Ојлерове теорије могло примијетити да за веће нивое закривљености долази и до повећања одступања од усвојене референтне вриједности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Г. Раденковић, Изогеометријска теорија носача, Београд: Архитектонски факултет, 2014.
- [2] Г. Раденковић, Коначне ротације и деформације у изогеометријској теорији носача, Београд: Архитектонски факултет, 2017.
- [3] T. Hughes, J. Cottrell, Y. Bazilevs, „Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, pp. 4135-4195, 2005.
- [4] T. Hughes, „Isogeometric analysis: Progress and challenges“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 316, p. 1, 2017.
- [5] A.-T. Luu, N.-I. Kim, J. Lee, „Isogeometric vibration analysis of free-form Timoshenko curved beams“, *Meccanica*, vol. 50, no. 1, p. 169–187, 2015.
- [6] A. Borković, S. Kovačević, G. Radenković, S. Milovanović, D. Majstorović, „Rotation-free isogeometric dynamic analysis of an arbitrarily curved plane Bernoulli-Euler beam“, *Engineering Structures*, vol. 181, pp. 192-215, 2019
- [7] S. Hosseini, A. Hashemian, A. Reali, „On the application of curve reparameterization in isogeometric vibration analysis of free-from curved beams“, *Computers & Structures*, vol. 209, pp. 117-129, 2018.
- [8] L. Piegl, W. Tiller, *The NURBS Book*, Springer, 1995.
- [9] J. Cottrell, T. Hughes, Y. Bazilevs, *Isogeometric analysis: Toward integration of CAD and FEA*, Chichester: Wiley, 2009.
- [10] В. Голубовић-Бугарски, Модална анализа - теорија, експеримент и примјене у детекцији структурних оштећења, Бања Лука: Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, 2015.
- [11] B. J. Schwarz, M. H. Richardson, „Experimental modal analysis“, *CSI Reliability Week*, Orlando, 1999.

- [12] R. J. Allemang, D. Brown, Harris' Shock and Vibration Handbook, Part 21: Experimental Modal Analysis, 1999.
- [13] A. Borković, G. Radenković, V. Golubović-Bugarski, S. Milovanović, D. Majstorović, O. Mijatović, „Free vibration analysis of a curved beam by the isogeometric and experimental approach“, *7th international Congress of Serbian Society of Mechanics*, Sremski Karlovci, Srbija, Jun 24-26, 2019.
- [14] T. Hughes, A. Reali, G. Sangalli, „Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 100, no. 5-8, pp. 301-313, 2010.
- [15] J. Cottrell, A. Reali, Y. Bazilevs, T. Hughes, „Isogeometric analysis of structural vibrations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pp. 5257-5296, 2006.
- [16] E. Tufekci, A. Arpaci, „Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects“, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 209, no. 5, pp. 845-856, 1998.

О аутору

Сњежана Миловановић је рођена 01.03.1993. године у Прњавору, Република Српска, Босна и Херцеговина. Основну школу, као и средњу Грађевинску школу, похађала је у Бањалуци. Добитник је Вукове награде за постигнут успјех током школовања у основној школи, коју завршава као ђак генерације. Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет уписује 2012. године, а окончава га одбраном завршног рада за први циклус студија, чиме стиче образовање дипломираног инжењера грађевине. Поводом Дана Универзитета у Бањој Луци добија и награду „Златна значка са ликом Никола Тесла“, за постигнут успјех као најбољи дипломирани студент за академску 2016/17. годину на Архитектонско-грађевинско-геодетском факултету у Бањој Луци. Постдипломске студије, односно мастер студије, уписује 2017. године на Архитектонско-грађевинско-геодетском факултету у Бањалуци, СП Грађевинарство, Конструктивно усмјерење, гдје је од октобра 2018. године, ангажована као стручни сарадник у настави.



УНИВЕРЗИТЕТ У БАЊОЈ ЛУЦИ

АРХИТЕКТОНСКО-ГРАЂЕВИНСКО-ГЕОДЕТСКИ ФАКУЛТЕТ

На основу члана 42. став (2) и члана 61. Закона о високом образовању РС и члана 54. Статута Универзитета у Бањој Луци, Наставно-научно вијеће Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета је на сједници одржаној 19.11.2019. донијело одлуку о измјени одлуке број 14/3.649 /19 од 21.5.2019. којом је именована Комисија за преглед и оцјену завршног рада другог циклуса студија СП Грађевинарство, кандидата Сњежане Миловановић, под називом

Изогеометријска анализа слободних вибрација гредних система у равни

Наведеном одлуком, именована је Комисија у сљедећем саставу

1. проф. др Мато Уљаревић, предсједник, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет Универзитета у Бањој Луци,
2. проф. др Александар Борковић, ментор и члан, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет Универзитета у Бањој Луци,
3. проф. др Валентина Голубовић-Бугарски, коментор и члан, Машински факултет Универзитета у Бањој Луци.

Комисија је детаљно прегледала и анализирала достављени завршни рад те установила да је кандидат Сњежана Миловановић, број индекса 02МГР/2017, испунила све формалне услове и предала текст завршног рада за други циклус студија у прописаној форми, те Научно-наставном вијећу подноси сљедећи извјештај.

ИЗВЈЕШТАЈ О ПРЕГЛЕДУ И ОЦЈЕНИ ЗАВРШНОГ РАДА

I БИОГРАФСКИ ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

- *Име, име оца и презиме:* Сњежана (Здравко) Миловановић
- *Датум рођења:* 01.03.1993.
- *Мјесто рођења:* Прњавор, Република Српска, БиХ
- *Подаци о образовању:*
 - Основна школа „Иван Горан Ковачић“, Бања Лука (2000. – 2004.)
 - Основна школа „Јован Цвијић“, Бања Лука (2004. – 2008.)
 - Средња грађевинска школа, Бања Лука (2008. – 2012.), смјер: грађевински техничар

- Универзитет у Бањој Луци, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет (ак. 2012/2013), студије I циклуса, студијски програм Грађевинарство, усмјерење: конструктивно
- Универзитет у Бањој Луци, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет (ак. 2017/ 2018), студије II циклуса, студијски програм Грађевинарство, усмјерење: конструктивно
- *Подаци о запослењу:* Универзитет у Бањој Луци, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет (од октобра 2018.)

II ПОДАЦИ О ЗАВРШНОМ РАДУ

Кандидат се определијелио за истраживачки рад у области механике деформибилних тијела који припада ужој научној области Механика и теорија конструкција. Конкретно, анализирани су динамичке карактеристике произвољно закривљених раванских линијских система. Завршни рад је урађен под насловом *Изогеометријска анализа слободних вибрација гредних система у равни* и обухвата 92 странице, 88 слика и 15 табела. С обзиром да ће завршни прелом бити урађен након овог Извјештаја, могуће је мање одступање од укупног броја страница.

Предметна мастер теза је структурирана у три основне цјелине: теоријске поставке, експериментална анализа и нумеричка анализа, према слједећем садржају:

1. Увод
2. Б-сплајн
 - 2.1. Особине Б-сплајна
 - 2.2. Безиерове криве
 - 2.3. Инсертовање чворова
 - 2.4. Елевација Б-сплајна
 - 2.5. Побољшање мреже коначних елемената
3. Неуниформни рационални Б-сплајн (НУРБС)
 - 3.1. Елевација НУРБС-а и инсертовање чворова
4. Изогеометријска теорија носача
 - 4.1. Геометрија осе штапа
 - 4.2. Метрика произвољне тачке попречног пресека
 - 4.3. Бернули-Ојлерова теорија
 - 4.3.1. Матрица крутости Бернули-Ојлеровог гредног елемента
 - 4.3.2. Матрица маса Бернули-Ојлеровог гредног елемента
 - 4.4. Тимошенкова теорија
 - 4.3.1. Матрица крутости Тимошенковог гредног елемента
 - 4.3.2. Матрица маса Тимошенковог гредног елемента
 - 4.5. Једначина слободних вибрација
5. Репараметризација криве

6. Експериментална модална анализа

6.1. Модално тестирање

6.1.1. Основни мјерни ланац

6.1.2. Основне претпоставке модалног тестирања

6.1.3. Мјерење функција фреквенцијског одзива

6.2. Модално тестирање челичне греде

7. Нумерички примјери

8. Закључак

Литература

III ПРИКАЗ И АНАЛИЗА ЗАВРШНОГ РАДА

Задатак кандидата је био да изучи и примијени савремене поступке за прорачун динамичких карактеристика закривљених греда чија оса лежи у једној равни. Циљ је био формирати механички и физички модел предметних конструкција, те испитати њихов однос и примјенљивост.

У раду је дат преглед постојећих поступака за прорачун слободних вибрација произвољно закривљених греда у равни. Метрика Бернули-Ојлерове и Тимошенкове греде је детаљно изведена узимајући егзактно у обзир утицај закривљености осе. Просторна дискретизација је извршена примјеном изогеометријског поступка који посједује многе предности у односу на стандардни изопараметарски приступ. Кандидат је показао да влада траженом методологијом са изузетно високим степеном разумијевања.

На основу постављеног прорачунског модела, формиран је одговарајући рачунарски код. Основни допринос рада је садржан у детаљној нумеричкој анализи и дискусији добијених резултата. Извршена су детаљна испитивања утицаја побољшања мреже коначних елемената са посебним акцентом на утицај континуитета на границама елемената. Показане су предности и мане разматраних поступака те је указано на могућност примјене репараметризације криве у циљу добијања квалитетнијих дискретних нумеричких спектра предметних конструкција.

Кандидат је успјешно извршио и експерименталну модалну анализу једног физичког модела закривљене челичне греде. Поређењем са нумеричким резултатима, потврђена је валидност постављених модела.

Провјером оригиналности урађеног завршног рада, установљено је да не постоји недозвољена подударност са постојећим публикацијама.

IV ЗАКЉУЧНО МИШЉЕЊЕ

Кандидат Сњежана Миловановић је успјешно одговорила на постављени задатак кроз израду завршног рада. Стога, Комисија констатује да кандидат испуњава све услове

предвиђене Законом о високом образовању РС и Статута Универзитета у Бањој Луци да може приступити одбрани завршног рада за други циклус студија СП Грађевинарство.

На основу наведеног, Комисија предлаже Наставно-научном вијећу Архитектонско-грађевинско-геодетског факултета Универзитета у Бањој Луци да кандидату Сњежани Миловановић одобри јавну одбрану рада под називом

Изогеометријска анализа слободних вибрација гредних система у равни

Бања Лука, јануар 2020.

Потпис чланова Комисије:



проф. др Мато Уљаревић
предсједник



проф. др Александар Борковић
ментор и члан



проф. др Валентина Голубовић-Бугарски
коментор и члан

УНИВЕРЗИТЕТУ У БАЊОЈ ЛУЦИ
ПОДАЦИ О АУТОРУ ОДБРАЊЕНОГ МАСТЕР/МАГИСТАРСКОГ РАДА

Име и презиме аутора мастер/магистарског рада:

Сњежана Миловановић

Датум, мјесто и држава рођења аутора:

01.03.1993. Прњавор, БиХ (РС)

Назив завршеног факултета/Академије аутора и година дипломирања:

Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, 2017.

Датум одбране завршног/дипломског рада аутора:

20.01.2017.

Наслов дипломског/завршног рада аутора:

Изогеометријска анализа гредних система у равни

Академско звање које је аутор стекао одбраном завршног/дипломског рада:

Дипломирани инжењер грађевинарства

Академско звање које је аутор стекао одбраном мастер/магистарског рада:

Мастер инжењер грађевинарства

Назив факултета/Академије на коме је мастер/магистарски рад одбрањен:

Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет

Наслов мастер/магистарског рада и датум одбране:

Изогеометријска анализа слободних вибрација гредних система у равни, 14.02.2020.

Научна област мастер/магистарског рада према CERIF шифрарнику:

T220

Имена ментора и чланова комисије за одбрану мастер/магистарског рада:

- 1. др Александар Борковић, ванредни професор, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, Универзитет у Бањој Луци, ментор*
- 2. др Валентина Голубовић-Бугарски, ванредни професор, Машински факултет, Универзитет у Бањој Луци, коментор*
- 3. др Мато Уљаревић, ванредни професор, Архитектонско-грађевинско-геодетски факултет, Универзитет у Бањој Луци, предсједник*

У Бањој Луци, дана 17.02.2020.



Декан

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је мастер/магистарски рад

Наслов рада ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА СЛОБОДНИХ ВИБРАЦИЈА ГРЕДНИХ СИСТЕМА У РАВНИ

Наслов рада на енглеском језику

ISOGEOMETRIC FREE VIBRATION ANALYSIS OF PLANE BEAMS

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да мастер/магистарски рад, у цјелини или у дијеловима, није био предложен за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

У Бањој Луци 17.02.2020.

Потпис кандидата

Снежана Милошевић

Изјава 2

Изјава којом се овлашћује АРХИТЕКТОНСКО - ГРАЂЕВИНСКО - ГЕОДЕТСКИ
факултет/Академија умјетности Универзитета у Бањој Луци да
мастер/магистарски рад учини јавно доступним

Овлашћујем АРХИТЕКТОНСКО - ГРАЂЕВИНСКО -
ГЕОДЕТСКИ факултет/Академију умјетности
Универзитета у Бањој Луци да мој мастер/магистарски рад , под насловом

ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА СЛОБОДНИХ ВИБРАЦИЈА ГРЕДНИХ
СИСТЕМА У РАВНИ
који је моје ауторско дјело, учини јавно доступним.

Мастер/магистарски рад са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату,
погодном за трајно архивирање.

Мој мастер/магистарски рад, похрањен у дигитални репозиторијум Универзитета у
Бањој Луци, могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу
лиценце Креативне заједнице (*Creative Commons*), за коју сам одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде
4. Ауторство - некомерцијално - дијелити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство - дијелити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци
дат је на полеђини листа).

У Бањој Луци 17.02.2020.

Потпис кандидата

Снежана Миловановић

Изјава 3

Изјава о идентичности штампане и електронске верзије мастер/магистарског рада

Име и презиме аутора СВЕНАНА МИЛОВАНОВИЋ

Наслов рада ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА СЛОБОДНИХ ВИБРАЦИЈА ГРЕДНИХ СИСТЕМА У РАВНИ

Ментор ПРОФ. ДР АЛЕКСАНДАР БОРКОВИЋ

КОМЕНТОР: ПРОФ. ДР ВАЛЕНТИНА ГОЛУБОВИЋ - БУГАРСКИ

Изјављујем да је штампана верзија мог мастер/магистарског рада идентична електронској верзији коју сам предао/ла за дигитални репозиторијум Универзитета у Бањој Луци.

У Бањој Луци 17. 02. 2020.

Потпис кандидата

Свенана Миловановић